МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения

Часть 1

Могилев 2021

УДК 519.6
ББК 22.161
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» февраля 2021 г., протокол № 6

Составители: ст. преподаватель Т. Ю. Орлова;
канд. физ.-мат. наук, доц. А. А. Романенко

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по дисциплине «Математический анализ», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Практическое занятие № 1. Введение в математический анализ. Числовые множества и числовая ось. Характеристики числовых множеств. Математическая символика

Математический анализ − раздел высшей математики, в котором изучаются функциональные зависимости методами дифференциального и интегрального исчисления.

Некоторые наиболее часто используемые обозначения:

$\Rightarrow$ – знак следования;

$\to$ – знак соответствия;

$\in$ – знак принадлежности;

$\forall$ – знак (квантор) общности (для любого, для каждого, для всех);

$\exists$ – знак (квантор) существования;

$\sim$ или $\Leftrightarrow$ − знаки эквивалентности (равносильности);

∞ – знак бесконечности;

$\{\ldots\}$ – знак множества;

$\varnothing$ – знак пустого множества;

$\subseteq, \subset$ – знаки включения;

$\sup A$ – точная верхняя грань множества A ;

$\inf A$ – точная нижняя грань множества A.

Множество – совокупность (собрание, класс, семейство, …) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Обозначают заглавными латинскими буквами $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Объекты a_i, из которых состоят множества, называют элементами множества. Множество называется счетным, если его элементы можно сосчитать.

Множества, элементами которых являются числа, называют числовыми. Некоторые числовые множества:

1) $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ – множество **натуральных** чисел (числа при счете);

2) $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ – множество **целых** чисел, $n \in N$;

3) $Q = \left\{\dfrac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$ – множество **рациональных чисел**. Рациональные числа – это числа, которые можно представить в виде отношения двух целых чисел, или числа, которые выражаются конечной или бесконечной периодической десятичной дробью. Так, например, $\dfrac{1}{2} = 0,5$ или $\dfrac{1}{3} = 0,333(3)$;

4) числа, которые нельзя представить в виде отношения двух целых чисел, или числа, которые выражаются бесконечной непериодической дробью, называются **иррациональными**. Так, например, $\sqrt{2} \approx 1,414235\ldots$, $\pi \approx 3,141592\ldots$, $\lg 2 \approx$, $\sin 20^\circ \approx$ и т. д.;

5) объединением множеств рациональных и иррациональных чисел является множество **действительных** чисел, которое обозначают буквой R.

Прямая линия, на которой указано начало отсчета, масштаб и направление отсчета, называется числовой осью. Числовая ось представляет собой множество действительных чисел, поскольку каждой точке числовой оси поставлено в соответствие действительное число и наоборот.

Множество натуральных чисел счетно. Множество действительных чисел несчетно, его также называют числовым континуумом. Оно непрерывно заполняет всю числовую ось.

Ограниченность множеств. Пусть множество чисел $A \in R$. Множество чисел A называется ограниченным сверху (снизу), если существуют такие числа M (m), что каждый элемент $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \le M$ $(x \ge m)$. При этом числа M (m) называют верхней (нижней) гранью множества A. Любое ограниченное сверху (снизу) множество $A \in R$ имеет бесконечно много верхних (нижних) граней.

Например, множество целых неотрицательных чисел ограничено снизу. В качестве нижней грани можно взять любое действительное число m, удовлетворяющее неравенству $m \le 0$.

Наименьшую из всех верхних граней ограниченного сверху множества называют точной верхней гранью и обозначают $M = \sup A$ (от лат. *supremum* – наивысшее). Наибольшую из всех нижних граней ограниченного снизу множества называют точной нижней гранью и обозначают $m = \inf A$ (от лат. *infimum* – наинизшее).

Например, пусть дано множество, состоящее из элементов $A = \{1/n\}$, где $n \in N$. Тогда $\sup A = 1 \in A$, $\inf A = 0 \notin A$.

Множество, ограниченное снизу и сверху, называют ограниченным. Примером ограниченного множества может служить множество значений $\cos x$.

Множества могут не иметь границ, т. е. быть неограниченными. Например, множества Z и Q неограниченные как сверху, так и снизу.

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется число, обозначаемое $|x|$ и равное $|x| = \begin{cases} x, & \forall x \ge 0, \\ -x, & \forall x < 0. \end{cases}$

Некоторые свойства модуля:

1) $|x| \ge 0$;

2) $|x| = |-x|$;

3) $-|x| \le x \le |x|$;

4) $\forall \varepsilon > 0 : |x| \le \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \le x \le \varepsilon$;

5) $|x + y| \le |x| + |y| \quad \forall x, y \in R$;

6) $|x - y| \ge |x| - |y| \quad \forall x, y \in R$.

Примеры для самостоятельной работы

1 Установить счетность множества рациональных чисел.

2 Пусть дано множество $A = \{x^2 < 5\}$. Найти $\sup A$ и $\inf A$.

3 Указать sup и inf множества: а) всех неотрицательных чисел; б) всех действительных чисел.

4 Доказать свойства модуля 5) и 6).

Практическое занятие № 2. Отображения и функции. Числовые функции. Характеристики поведения функций

Понятие функции связано с установлением зависимости (связи, соответствия) между элементами множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое **каждому** элементу $x \in X$ сопоставляет **один и только один элемент** $y \in Y$, называют функцией и записывают $y = f(x)$. Говорят, что функция f отображает множество X на множество Y, т. е $X \to Y$. При этом множество X называют областью **определения функции** и обозначают $D(f)$, а множество Y – **множеством (областью) значений функции** и обозначают $E(f)$. Кроме того, элементы $x \in X$ называют **аргументом** функции или **независимой переменной**, а $y \in Y$ – **зависимой переменной** или **функцией**.

Ранее было дано определение **однозначной** функции. При этом для краткости слово **«однозначная»** опущено. В случае, когда **каждому** элементу $x \in X$ ставится в соответствие **несколько** значений $y \in Y$, то такую функцию называют многозначной.

Если элементами множеств X и Y являются числа, то f называют **числовой** функцией. В дальнейшем будем иметь дело только с числовыми функциями, поэтому слово «числовая» будем опускать.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости Oxy, для которых x является значением аргумента, а y – значением функции.

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, по которому каждому значению x соответствует значение y. Существуют 4 способа задания.

Аналитический способ задания функций. При таком способе функция задается в виде одной или нескольких формул, например, $S = \pi r^2, y = x^3$. Функцию, заданную несколькими формулами, называют составной, например, $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2, \\ x - 4, & x \geq 2. \end{cases}$ При аналитическом способе задания функции под областью определения $D(f)$ понимают множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл, т. е. подразумеваются такие значения x, для которых можно вычислить значения y, и говорят, что $D(f)$ является **естественной областью определения** функции.

Задание функции в виде $y = f(x)$ называют **явным**, т. е. при таком задании указано правило вычисления значений y. Однако функция f, т. е. соответствие $X \to Y$, может быть задана неявно уравнением $F(x, y(x)) = 0$. Например, уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ (это уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат), оно неявно задает две функции, которые в явном виде выглядят как $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. При этом знак «$+$» соответствует части, окружности лежащей выше оси Ox, а знак «$-$» – части окружности, лежащей ниже оси Ox. Заметим, что в некоторых случаях разрешить уравнение $F(x,y)=0$ относительно y не удается. Например, $\operatorname{tg}(xy)-x-y=0$.

Функция $y=f(x)$ может быть задана в виде $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ где $t-$ некоторая дополнительная переменная, называемая параметром, и она связывает переменные x и y. Например, $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t. \end{cases}$ Эти уравнения задают все ту же окружность радиусом R с центром в начале координат. При этом параметр t изменяется в пределах $0\le t<2\pi$ и имеет смысл угла. Возводя оба уравнения в квадрат, после сложения получаем уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$.

Табличный способ задания функций. Осуществляется табличным перечислением значений аргумента и значений функций.

Графический способ задания функций. Состоит в представлении функции $y=f(x)$ графиком в некоторой системе координат. При заданных значениях x из графика находятся значения y.

Алгоритмический (программный) способ задания функций. Состоит в задании алгоритма (программы) вычисления значений y для заданных x.

Для функций определяются характеристики.

Нули и знаки функции. Значение $x\in D(f)$, при котором функция $y=f(x)$ обращается в нуль, называется **нулем** функции, т. е. нули функции являются корнями уравнения $f(x)=0$. В нуле график функции пересекает ось Ox. В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox. В интервале, на котором функция отрицательна, график ее расположен ниже оси Ox.

Четность и нечетность функции. Если для функции $y=f(x)$ выполняются равенства $f(-x)=f(x)$, то $f(x)$ называется четной, а если $f(-x)=-f(x)$, то $f(x)$ называется нечетной для $\forall x\in D(f)$. При этом график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции − относительно начала координат.

Монотонность. Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве X, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, т. е. если $\forall a,b\in X$, при значениях $b>a$ выполняются условия $f(b)>f(a)$ $\left(f(b)<f(a)\right)$.

Функция $f(x)$ называется невозрастающей (неубывающей) на множестве X, если выполняются условия для $b>a$ $f(b)\ge f(a)$ $\left(f(b)\le f(a)\right)$. Невозрастающие и неубывающие функции называются монотонными. Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными.

Периодичность. Если для функции $f(x)$ выполняется равенство $f(x)=f(x\pm T)=f(x\pm 2T)=\ldots=f(x\pm nT)$ $(n\in N)$ для $\forall x\in D(f)$, то она называется периодической с периодом T. Если $f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $f(\alpha x)$ периодическая с периодом, равным T/α.

Ограниченность функций. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X, если $\exists$ такие числа M и m, принадлежащие X, что для $\forall x\in X$ выполняются условия $f(x)\le M$ $\left(f(x)\ge m\right)$. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если $\exists$ такие числа M и m, принадлежащие X, что для $\forall x\in X$ выполняются условия $m\le f(x)\le M$.

Обратная функция. Пусть задана функция $y=f(x)$ с $D(f)$ и $E(f)$. Если каждому значению $y\in E(f)$ соответствует единственное значение $x\in D(f)$, то говорят, что на множестве $E(f)$ может быть определена обратная функция с областью определения $E(f)$ и областью значений $D(f)$. Ее обозначают $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$. Любая строго монотонная функция $y=f(x)$ имеет обратную $x=f^{-1}(y)$ (достаточное условие ее существования). При этом если $y=f(x)$ − возрастающая, то $x=f^{-1}(y)$ − возрастающая, а если $y=f(x)$ − убывающая, то и $x=f^{-1}(y)$ − убывающая. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных четвертей.

Сложная функция – это функция от функции или композиция функций. Например, $y=f\left(\varphi(x)\right)$. Сложную функцию можно разбить на отдельные звенья (цепочки равенств): $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Причем таких вложений может быть несколько.

Классификация функций. Функции: x^{α} −степенная $(\alpha\in R)$; a^x −показательная; $\log_a x$ – логарифмическая $(a>0,\ a\ne 1)$; $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ – тригонометрические и $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ − обратные тригонометрические. Их называют **основными элементарными** функциями. Функции, полученные с помощью конечного числа арифметических операций над основными элементарными функциями, а также их композиции составляют класс элементарных функций, например: 1) $f(x)=\operatorname{tg}5x+3^{\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$.

Функцию вида $f(x)=P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, где $n\in N$, $a_i\in R\left(i=\overline{0,n}\right)$, называют целой рациональной функцией или многочленом (полиномом) степени n. Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, называется дробно-рациональной функцией или рациональной дробью. Функции, полученные с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических операций над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями и не являющие рациональными, называются иррациональными. Например, $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{x^2+1}$. Рациональные и иррациональные функции образуют класс **алгебраических** функций. Всякая функция, не являющаяся алгебраической, называется **трансцендентной.**

Примеры для самостоятельной работы

1 Найти области определения следующих функций:

а) $y=x^2$; б) $y=\sqrt{x}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\lg(x-1)}$.

2 Установить четность (нечетность) следующих функций:

а) $y=x^2$; б) $y=x^3$; в) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$; г) $y=x^2+2x+5$.

3 Найти периоды следующих функций:

а) $\sin 2x$; б) $\sin 0{,}5x$.

4 Построить графики обратных функций, пользуясь свойством симметрии графиков взаимно обратных, если прямые функции имеют вид:

а) $y=3x+2$; б) $y=\operatorname{tg} x$ $x\in(-\pi/2,\pi/2)$; в) $y=\sin x$ $x\in(-\pi/2,\pi/2)$; г) $y=\cos x$ $x\in(0,\pi)$.

5 Представить сложную функцию в виде цепочки основных элементарных функций:

а) $y=\sqrt{ax+b}$; б) $y=a^{\sin x}$; в) $y=\sin^2(2x+1)$; г) $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Практическое занятие № 3. Числовая последовательность и ее предел. Число *e*

Под числовой последовательностью, т. е. последовательностью чисел $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots\}$, понимают функцию $y_n=f(n)$, заданную на множестве натуральных чисел $(n\in N)$, и кратко записывают $\{y_n\}$. При этом:

y_1 – первый член последовательности;

y_2 – второй член последовательности;

…

y_n – n-*й* член последовательности или общий член.

Последовательность считается заданной, если задана формула общего члена, т. е. $y_n=f(n)$. Например:

1) $Y_n=\dfrac{1}{n}=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right\}$; 3) $V_n=n^2=\{1,4,9,\ldots,n^2,\ldots\}$;

2) $U_n=\dfrac{n-1}{n}=\left\{0,\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\ldots,\dfrac{n-1}{n},\ldots\right\}$; 4) $Z_n=(-1)^n=\left\{-1,1,\ldots,(-1)^n,\ldots\right\}$.

Поскольку последовательности являются числовыми функциями, то к ним применимы большинство понятий числовых функций, например, ограниченность сверху (снизу), возрастание (убывание), т. е. монотонность, и т. д. Например, последовательности: $\{Y_n\}$ и $\{U_n\}$ – монотонные и ограниченные; $\{V_n\}$ – монотонна и неограниченна; $\{Z_n\}$ – ограничена, но немонотонна.

Число a называют пределом последовательности $\{x_n\}$, если для $\forall$ сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, что для $\forall\, n > n_0$ члены последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$, и кратко записывают $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Если a конечно, то последовательность **сходится**, если $a = \infty$ или a не $\exists$, то **расходится**.

Пример 1 – Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+1} = 2$.

Решение

Поскольку предел $\exists$, то можем составить разность

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Преобразуем ее. $\left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\dfrac{-1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Отсюда $n+1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

Из последнего неравенства видно, что можно указать n_0, для которого выполняется неравенство $(*)$. Пусть $\varepsilon = 0{,}01$. Тогда $n > 99$, т. е. в качестве n_0 можно взять, например, $n_0 = 100$.

Необходимый признак сходимости. Если последовательность **сходится**, то она ограничена.

Докажем признак на численном примере. Пусть последовательность $y_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ сходится и имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+1} = 2$. На основании определения предела можем записать, что $\left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$. Очевидно, что $\left|\dfrac{2n+1}{n+1}\right| = \left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2 + 2\right| \le \left|\dfrac{2n+1}{n+1} - 2\right| + 2 < \varepsilon + 2$, т. е. $\left|\dfrac{2n+1}{n+1}\right| < 2 + \varepsilon$ и $y_n < 2 + \varepsilon$.

Эта означает, что последовательность ограничена, т. е., задаваясь конкретным значением ε, последнее неравенство останется справедливым для $\forall n$.

Ограниченность последовательности не является достаточным условием сходимости. Например, последовательность $\left((-1)^n\right) = (-1, +1, -1, +1, \ldots)$ является ограниченной, однако расходится (не имеет предела).

Достаточный признак сходимости (теорема Вейерштрасса). Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится, т. е. имеет предел.

В качестве примера рассмотрим последовательность $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$. Последовательность ограничена снизу числом 2 $(n=1)$. Строго показано, что она ограничена сверху числом 3. Убедимся в этом на числах. Задаем n и вычисляем y_n (таблица 1).

Таблица 1 – Значения рассматриваемой последовательности

n	1	2	10	100	1000	10000	100000	…
$y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,706	2,717	2,7181	2,71826	…

Видно, что с ростом n последовательность монотонно растет и ее члены не превосходят $2{,}72$. Согласно теореме Вейерштрасса она имеет предел, который обозначают буквой e и называют числом e. Число e – иррациональное. Его приближенное значение $e = 2{,}718281828459045\ldots$. На практике принято за приближенное значение брать $e \simeq 2{,}72$, аналогия с $\pi \simeq 3{,}14$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ называют **вторым замечательным** пределом.

Примеры для самостоятельной работы

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. При каких значениях $n > N$ будет выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если:

1) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $a=1$, $\varepsilon = 0{,}001$;

2) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, $a=1$, $\varepsilon = 0{,}0001$;

3) $x_n = \dfrac{n}{3n-1}$, $a=\dfrac{1}{3}$, $\varepsilon = 0{,}001$;

4) $x_n = \dfrac{1-3n^2}{2+6n^2}$, $a=-\dfrac{1}{2}$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Практическое занятие № 4. Экспоненциальная функция, натуральный логарифм и гиперболические функции

Если число e использовать как основание показательной функции $y = a^x$, т. е. взять $a = e$, то функцию $y = e^x$ называют экспоненциальной или экспонентой. Если число e использовать как основание логарифмической функции $y = \log_a x$, т. е. $a = e$, то функцию $y = \log_e x$ обозначают $y = \ln x$ и называют натуральным логарифмом. Это взаимно обратные функции, строго возрастающие. Их графики симметричны относительно биссектрисы $y = x$ и изображены на рисунке 1.

Для $y=e^x$ $\begin{cases} D(f): x\in R \ (-\infty,\infty), \\ E(f): y>0 \ (0,\infty); \end{cases}$

для $y=\ln x$ $\begin{cases} D(f): x>0 \ (0,\infty), \\ E(f): y\in R \ (-\infty,\infty). \end{cases}$

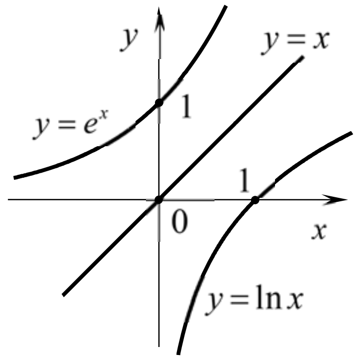


Рисунок 1

Гиперболический синус $\operatorname{sh} x$ и косинус $\operatorname{ch} x$ определяются формулами

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Для $\operatorname{sh} x$ $\begin{cases} D(f): x\in R, \\ \mathring{A}(f): y\in R; \end{cases}$

для $\operatorname{ch} x$ $\begin{cases} D(f): x\in R, \\ \mathring{A}(f): y\in [1,\infty). \end{cases}$

Их графики изображены на рисунке 2.

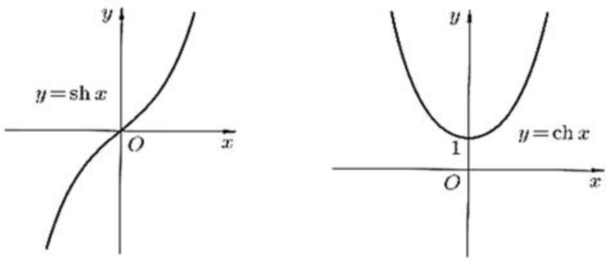


Рисунок 2

Гиперболический тангенс $\operatorname{th} x$ и котангенс $\operatorname{cth} x$ определяются формулами

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};\qquad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Для $\operatorname{th} x$ $\begin{cases} D(f): x\in R, \\ E(f): y\in(-1,1); \end{cases}$

для $\operatorname{cth} x$ $\begin{cases} D(f): x\in R,\ x\neq 0, \\ E(f): y\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty). \end{cases}$

Их графики изображены на рисунке 3.

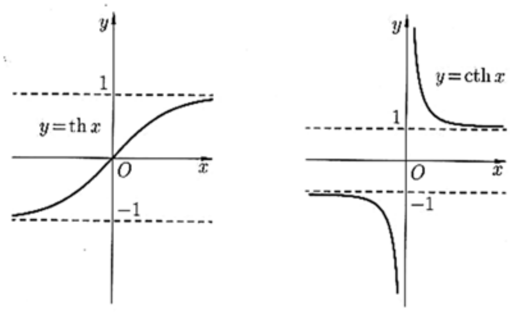


Рисунок 3

Примеры для самостоятельной работы

Доказать равенства:

1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$;

2) $\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} y$;

3) $\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} y$;

4) $\operatorname{th}(x\pm y)=\dfrac{\operatorname{th} x\pm\operatorname{th} y}{1\pm\operatorname{th} x\cdot\operatorname{th} y}$;

5) $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x$;

6) $\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x$.

Практические занятия № 5 и 6. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Замечательные пределы. Основные приёмы раскрытия неопределённостей при нахождении пределов

Конечный предел функции в точке. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть самой точки x_0.

Число A называют пределом функции в точке $x = x_0$, если для $\forall\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для $\forall\, x \neq x_0$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

В данном определении предела не указано, каким образом $x \to x_0$ (слева или справа). Встречаются случаи, когда от способа стремления $x \to x_0$ зависит значение предела. В этих случаях пределы называют лево- и правосторонним и записывают

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = A_1; \quad \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

При этом если $A_1 = A_2 = A$, то говорят, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в точке x_0 существует, а если $A_1 \neq A_2$, то говорят, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в точке x_0 не существует.

Аналогично дают определения:

– бесконечного предела функции в точке и записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$;

– конечного предела при $x \to \pm\infty$ и записывают $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A \neq \pm\infty$;

– бесконечного предела при $x \to \pm\infty$ и записывают $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Данные определения используют для доказательства того, что число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, и позволяют находить пределы непосредственной подстановкой предельного значения $x = x_0$ в выражение под знаком предела, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0}(x)\right)$.

Пример 2 **–** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$.

Решение

Зададимся $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы для любых значений x, отличных от 2 и удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \delta$, выполнялось неравенство $|2x+1-5| < \varepsilon$. Поскольку предел $\exists$, то составим разность $|f(x) - A| = |2x+1-5| < \varepsilon$. При этом ε задано, но пока не конкретизировано. Имеем $|2x-4| < \varepsilon$. Отсюда $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$. Видно, что $\exists\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, т. е. найдено δ, которое не зависит от x.

Пример 3 **–** Найти пределы функций.

Решение

1 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}x$. Непосредственной подстановкой предельного значения $x=0$ убеждаемся, что $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}x=0$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. Видно, что предел функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ в точке $x=0$ не $\exists$, поскольку $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

Основные свойства пределов. Вычисление пределов значительно упрощается, если использовать их свойства, которые вытекают из определения предела. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные $(\neq\infty)$ пределы, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, то:

1) при $f(x)=C=\text{const}$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}C=C$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a\pm b$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=ab$,

как следствие, $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=Ca$, $\quad C=\text{const}$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{a}{b}$ при $b\neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$.

Вычисление пределов основано на этих свойствах и осуществляется непосредственной подстановкой $x=x_0$ в выражение под знаком предела.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (б. м. ф.) в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, и бесконечно большой (б. б. ф.), если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$.

Так, например, функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является б. м. ф. при $x\to\pm\infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$, и б. б. ф. при $x\to\pm 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{1}{x}=\pm\infty$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции могут определяться при $x\to x_0\pm 0$. Так, например, функция $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ – б. м. ф. при $x\to -0$, поскольку $\lim\limits_{x\to -0}2^{\frac{1}{x}}=0$, и б. б. ф. при $x\to +0$, поскольку $\lim\limits_{x\to +0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$, т. е. одна и та же функция в окрестности некоторой точки x_0 может быть как б. м. ф., так и б. б. ф., поскольку все зависит от способа стремления к ней. Б. м. ф. принято обозначать греческими буквами $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \ldots$.

Для сравнения б. м. ф. в точке x_0 находят предел их отношения. Так, например, пусть $\alpha(x), \beta(x)$ – б. м. ф. и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. В математике (в плане различных приложений) востребованы функции, для которых $C = 1$. Такие функции называют эквивалентными и обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Это означает, что они ведут себя одинаковым образом при $x \to x_0$, а предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C = 1$ называют первым замечательным пределом. Приведем примеры таких функций, которые расположим в таблице 2.

Таблица 2 – Примеры эквивалентных бесконечно малых функций

В простейшем варианте $(x \to 0)$	В общем случае ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$)
$\sin x \sim x$	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$
$e^x - 1 \sim x$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
$\ln(1 + x) \sim x$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\log_a (1 + x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$	$\log_a (1 + \alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
$(1 + x)^k - 1 \sim kx$, $k \in R$	$(1 + \alpha(x))^k - 1 \sim k\alpha(x)$, $k \in R$
Из определения эквивалентных б. м. можем записать	
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{\alpha(x) \to 0} \dfrac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\lim\limits_{\alpha(x) \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{\alpha(x) \to 0} \dfrac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$
И т. д.	

Приведенные пределы (+ и т. д.) называют **первыми замечательными**. Их доказательство будет дано позже в теории рядов, а пока примем на веру.

Конструкции второго замечательного предела. В теории числовых последовательностей было показано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)^n = e$, $n\in N$. Данный предел остается в силе при замене дискретного n на непрерывное x, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+1/x\right)^x = e$. Формулы, приведенные в таблице 3, называют конструкциями второго замечательного предела.

Таблица 3 – Конструкции второго замечательного предела

В простейшем варианте	В общем случае
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{\substack{\alpha(x)\to\infty \\ x\to x_0}}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e$
$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{\substack{\alpha(x)\to 0 \\ x\to x_0}}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$

Основные приемы раскрытия неопределенностей. Нахождение пределов $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ осуществляется непосредственной подстановкой значения $x = x_0$ в выражение под знаком предела. При этом могут встречаться выражения вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(0\cdot\infty\right)$, $\left(\infty-\infty\right)$, $\left(1^{\pm\infty}\right)$, $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, которые называют неопределенностями. Приемы их раскрытия зависят от вида функции $f(x)$, стоящей под знаком предела (см. пр. з. № 3, классификация функций), и значения x_0 (конечного или бесконечного). Неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ называют основными.

Раскрытие неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, когда $x_0 \neq \infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Если $f(x)$ – дробно-рациональная или дробно-иррациональная функция, то для раскрытия данной неопределенности следует в числителе и знаменателе выделить множитель $\left(x - x_0\right)$.

Пусть $f(x)$ – дробно-рациональная функция, т. е. отношение двух многочленов. В этом случае числитель и знаменатель раскладываются на множители согласно следствию из теоремы Безу (см. курс алгебры). В числителе и знаменателе выделяем множитель $\left(x - x_0\right)$ и после сокращений получаем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\left(x-x_0\right)^l M_{n-l}(x)}{\left(x-x_0\right)^k N_{m-k}(x)} = \begin{cases} 0 & \text{, если } l>k, \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{M_{n-l}(x)}{N_{m-k}(x)} & \text{, если } l=k, \\ \infty & \text{, если } l<k. \end{cases}$$

Здесь l и k – числа, которые означают кратность корня $x = x_0$ многочленов в числителе и знаменателе соответственно.

Пример 4 – Найти пределы.

Решение

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{3}{4}$.

2 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(2x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)}{(2x-3)}=\dfrac{1}{7}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^3}{x^3+2x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x+3)}{x^2(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{(x+2)}=\dfrac{0}{2}=0$.

Пусть $f(x)-$ дробно-иррациональная функция. В этом случае выделение множителя $(x-x_0)^k$ в иррациональном выражении достигается переводом иррациональности из знаменателя в числитель и наоборот.

Пример 5 – Найти предел.

Решение

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)(x-2)}=\frac{1}{8}.$$

Если $f(x)-$ дробь, содержащая трансцендентные функции (тригонометрические, обратные тригонометрические, логарифмическую, показательную или экспоненту), и $x\to 0$, то для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ следует воспользоваться таблицей эквивалентных бесконечно малых или, что равносильно, таблицей первых замечательных пределов. Однако если $x\to x_0\neq 0$, то в этом случае неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ следует раскрывать, сделав предварительно замену $z=x-x_0$ или $x=z+x_0$, где $z\to 0$, и после тождественных преобразований воспользоваться таблицей эквивалентных бесконечно малых.

Пример 6 – Найти пределы.

Решение

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^2/2}{x^2}=2$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$, имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, но $x\to 1\neq 0$. Делаем замену $z=x-1$ или $x=1+z$, где $z\to 0$. В результате получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^2-1}{\ln(1+z)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+2z}{z}=\lim_{z\to 0}(z+2)=2.$$

Здесь воспользовались эквивалентностью $\ln(1+z)\sim z$ при $z\to 0$.

Раскрытие неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, когда $x\to\pm\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Если $f(x)$ – дробно-рациональная или дробно-иррациональная функция, то неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ раскрывается вынесением за скобки x в старшей степени как в числителе, так и знаменателе. Согласно сказанному, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\dfrac{a_2}{x^{n-2}}+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\dfrac{b_2}{x^{m-2}}+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}\right)}=\begin{cases}0 & ,\text{ если } n<m,\\ \dfrac{a_n}{b_m} & ,\text{ если } n=m,\\ \infty & ,\text{ если } n>m,\end{cases}$$

поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x^{\gamma}}=0$, где c – любое число, $\gamma>0$.

Таким образом, если n – старшая степени x числителя, а m – старшая степени x знаменателя, тогда:

– если $n<m$, то предел равен нулю;

– если $n=m$, то предел равен отношению коэффициентов при них;

– если $n>m$, то предел равен бесконечности.

Указанный предел часто называют **третьим замечательным.**

***Пример** 7* – Найти пределы.

Решение

1 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+4}{x^5+6x+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+3/x^2+4/x^3\right)}{x^5\left(1+8/x^4+7/x^5\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0.$$

2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2-1}{7x^3+3x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4+5/x-1/x^3\right)}{x^3\left(7+3/x^2+1/x^3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4+5/x-1/x^3\right)}{\left(7+3/x^2+1/x^3\right)}=\frac{4}{7}.$$

Старшие степени x числителя и знаменателя равны, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при них.

3 $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+2x+3}{7x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(5+2/x^3+3/x^4\right)}{x^2\left(7+1/x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{7}=\infty.$$

Пусть $f(x)-$ дробь, содержащая иррациональность. Тогда, как и в предыдущем случае, в числителе и знаменателе выделяются множители x^{α} ,x^{β}, где α и β – максимально возможные показатели степеней x в числителе и знаменателе, $\alpha,\beta\in Q$. Затем производим сокращения на x^{γ}, где $\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$.

Пример 8 – Найти предел.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+5}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3\left(1+5/x^3\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt[3]{\left(1+5/x^3\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+5/x^3\right)}}=1.$$

Раскрытие неопределенностей $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$. Для раскрытия таких неопределенностей их следует свести к основным $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ с помощью тождественных преобразований.

Пример 9 – Найти пределы.

Решение

1 $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}3x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}.$

2 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}=$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{\left(1+x+x^2\right)}=\frac{-3}{3}=-1.$$

Раскрытие неопределенностей $\left(1^{\infty}\right)$, $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов показательно-степенных функций $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$. Для их раскрытия следует воспользоваться конструкциями второго замечательного предела. Так, например, если $\lim\limits_{x\to x_0}u^v=\left(1^{\infty}\right)$, то выделяем одну из конструкций, поступая следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0}u^v=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(1+(u-1)\right)^{\frac{1}{u-1}\cdot(u-1)\cdot v}=\lim_{x\to x_0}e^{(u-1)\cdot v}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)\cdot v},$$

где $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ u-1=\alpha(x)\to 0}}\left(1+(u-1)\right)^{\frac{1}{u-1}}=e$, а неопределенность $(0\cdot\infty)$, которая возникает при $\lim\limits_{x\to x_0}(u-1)v$, раскрывается по методике, рассмотренной ранее.

Пример 10 – Найти пределы.

Решение

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{5x} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x\cdot\frac{5}{3}} = e^{\frac{5}{3}}.$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x+2}\right)^{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{3x+8}{3x+2}-1\right)\right)^{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{6}{3x+2}\right)\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{1}{\dfrac{3x+2}{6}}\right)\right)^{\frac{3x+2}{6}\cdot\frac{6}{3x+2}x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{3x+2}} = e^{2}.$$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+7}{2x+1}\right)^{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{\infty} = \infty.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\infty} = 0.$

Примеры для самостоятельной работы

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2}-1}{\left(x-1\right)^{2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^{2}-5x+6}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^{3}-4x^{2}-17x+26}{x^{2}+x-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^{3}+5x^{2}+8x+4}{x^{3}+7x^{2}+16x+12}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$;

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^{2}-3x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x^{2}-x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^{3}}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^{2}\,3x}{2x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\pi-2x\right)^{2}}$;

12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2}-1}{\ln x}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln\left(1+2x\right)}$;

14) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^{2}-2x-1}-\sqrt{x^{2}-7x+3}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{5x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+5x)}{x^2+5x}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{2x-1}\right)^x$;

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{7x-2}\right)^x$.

Практические занятия № 7 и 8. Исследования функций на непрерывность и точки разрыва. Равномерная непрерывность

Интуитивное представление о непрерывной функции связывают с такой функцией, график которой – непрерывная линия. Дадим строгие определения непрерывности функции в точке. Используется несколько определений.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е. $f(x_0)=A$.

В некоторых случаях прибегают к односторонней непрерывности. Функция $y=f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0, называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции и он равен $f(x_0)$. Если левосторонний предел равен значению функции, т. е. $\lim\limits_{x\to x-0} f(x)=f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева, а если правосторонний предел $\lim\limits_{x\to x+0} f(x)=f(x_0)$, то непрерывной справа.

Дадим третье определение непрерывности. Но прежде введем понятия приращение аргумента Δx и приращение функции Δy. Величину $\Delta x=x-x_0$ называют приращением аргумента функции в точке x_0, а величину $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращением функции.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx функции соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Продемонстрируем это определение на примере функции $y=x^2$. Функция определена для всех $x\in R$. Пусть x_0 – произвольная точка области определения. Найдем $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$ и его предел при $\Delta x\to 0$. Видно, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right)=0$. Так как точка x_0 выбрана произвольно, то функция непрерывна для всех точек из $D(f)$.

Функция $y=f(x)$, непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется непрерывной на этом множестве.

Точки разрыва функции и их классификация. Для классификации точек разрыва используют первое определение. Если хотя бы одно из условий определения не соблюдено, то точка x_0 является точкой разрыва.

Различают следующие случаи:

1) если условие 2 выполнено, но функция не определена в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точку x_0 называют точкой устранимого разрыва;

2) если условие 2 нарушено, оба односторонних предела $\exists$ и конечны, но не равны друг другу, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 является точкой разрыва первого рода (конечный скачок);

3) если хотя бы один из односторонних пределов равен $\pm\infty$ или не $\exists$, то точка x_0 является точкой разрыва второго рода (бесконечный скачок).

На основании данных определений и свойств пределов доказано, что всякая элементарная функция (содержащая конечное число арифметических операций над основными элементарными функциями), а также сложные и обратные функции непрерывны в своих естественных областях определения.

В этой связи при анализе функции на непрерывность следует устанавливать ее область определения и говорить, что функция непрерывна в области определения, а в точках, где функция неопределена, устанавливать характер точек разрыва на основании приведенной классификации. В случае составных функций в исследование на разрыв следует включать точки стыка аналитических выражений.

Пример 11 – Исследовать на непрерывность функции.

Решение

1 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Функция определена на всей числовой оси, за исключением точки $x_0 = 0$. Следовательно, она непрерывна на всей числовой оси, за исключением точки $x_0 = 0$, поскольку одно из условий первого определения уже нарушено. Установим характер разрыва. Для этого найдем пределы слева и справа в точке $x_0 = 0$, т. е. $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел. Функция имеет конечный предел. А поскольку в точке $x_0 = 0$ она не определена, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Следовательно, $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва.

2 $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при} \quad x < 2, \\ 2 - x & \text{при} \quad x \geq 2. \end{cases}$ Область определения $D(f): x \in R$. Функция состоит из двух аналитических выражений, заданных на различных участках оси Ox, а в точке $x = 2$ эти выражения стыкуются. Следовательно, функция непрерывна на всей числовой оси, за исключением, быть может, точки стыка $x = 2$. Исследуем точку $x = 2$ на непрерывность по первому определению.

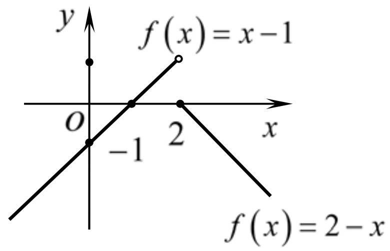


Рисунок 4

В точке $x=2$ функция определена выражением $f(x)=2-x$ и ее значение $f(2)=0$. Найдем пределы слева и справа в точке $x=2$.

$$\lim_{x\to 2-0}(x-1)=2-1=1;\quad \lim_{x\to 2+0}(2-x)=2-2=0.$$

Функция имеет конечные пределы слева и справа в точке $x=2$, однако пределы не равны друг другу, т. е. условие 2 первого определения нарушено. Следовательно, точка $x=2$ – точка разрыва первого рода (конечный скачок). График функции изображен на рисунке 4. Правосторонний предел функции равен значению функции в точке $x=2$. Значит, функция в точке $x=2$ непрерывна справа.

3 $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$. $D(f): x\in R,\, x\neq 2$. Функция не определена только в точке $x=2$. Следовательно, она непрерывна везде, за исключением точки $x=2$. Исследуем характер разрыва в $x=2$. Для этого найдем пределы слева и справа.

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} 9^{\frac{1}{2-x}}=9^{\frac{1}{2-(2-0)}}=9^{\frac{1}{0}}=9^{\infty}=\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} 9^{\frac{1}{2-x}}=9^{\frac{1}{2-(2+0)}}=9^{\frac{1}{-0}}=9^{-\infty}=\frac{1}{9^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

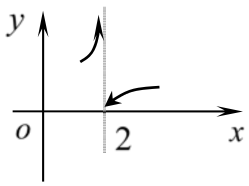


Рисунок 5

Один из пределов равен ∞, следовательно, точка $x=2$ – точка разрыва второго рода (бесконечный скачок). График функции в окрестности точки $x=2$ изображен на рисунке 5.

Примеры для самостоятельной работы

Исследовать на непрерывность функции:

1) $y=\dfrac{\cos x}{x}$; 3) $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}$; 5) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; 7) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$;

2) $y=\dfrac{x}{|x|}$; 4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 6) $y=3^{\frac{1}{x}}$; 8) $y=\ln|x-1|$.

Равномерная непрерывность функции. Из множества функций, непрерывных на числовом промежутке, выделяют равномерно непрерывные.

Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве $D\subset R$, если для $\forall\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых $x_1, x_2\in D$, удовлетворяющих условию $|x_1-x_2|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Пример 12 – Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f\left(x\right)=2x+1$.

Решение

Возьмем некоторое число $\varepsilon>0$, которое не конкретизируем, и попробуем найти $\delta>0$ такое, чтобы выполнялись условия определения. Возьмем любые две точки $x_1, x_2\in R$ и проверим условие: из неравенства $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ следует неравенство $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$. Действительно, $\left|2x_1+1-2x_2-1\right|=$ $=2\left|x_1-x_2\right|<2\delta=\varepsilon$. Таким образом, для любых $\varepsilon>0$ существует $\delta=\varepsilon/2$. Следовательно, функция равномерно непрерывна во всей области определения. Качественно: малые (в частности, одинаковые) изменения аргумента приводят к малым (одинаковым) изменениям функции во всей области определения.

Заметим, что если $f\left(x\right)$ равномерно непрерывна на множестве D, то она непрерывна на D в обычном смысле. Для этого достаточно положить $x_1=x$, $x_2=x_0$ и из определения равномерной непрерывности будет следовать определение непрерывной функции в точке. **Однако обратное не всегда верно**. Условие, при котором непрерывная функция является и равномерно непрерывной, определяется теоремой.

Теорема (Кантора). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке (без доказательства).

Пример 13 – Исследовать на равномерную непрерывность функции.

Решение

1 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{9-x^2}$ на отрезке $\left[-1,1\right]$. Функция непрерывна на отрезке $\left[-1,1\right]$. Согласно теореме Кантора она равномерно непрерывна на отрезке $\left[-1,1\right]$.

2 $f\left(x\right)=\dfrac{5}{x^2}$ на интервале $\left(0,3\right]$. Функция $f\left(x\right)=\dfrac{5}{x^2}$ непрерывна на интервале $\left(0,3\right]$, но не является равномерно непрерывной на нем, т. к. для любых $\varepsilon>0$ невозможно подобрать $\delta\left(\varepsilon\right)>0$ такое, чтобы из неравенства $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ следовало неравенство $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$. В данном случае $\delta=\delta\left(\varepsilon,x\right)$. Качественно: для x, близких к нулю, малые изменения аргумента приводят к большим изменениям функции.

Практические занятия № 9 и 10. Производная и дифференциал функции. Нахождение производных

Производная функции. Пусть функция $y = f\left(x\right)$ определена на интервале $\left(a, b\right)$. Выполним следующие действия:

– произвольной точке с координатой $x \in \left(a, b\right)$ придадим приращения Δx, получим точку $x + \Delta x \in \left(a, b\right)$;

– вычислим значения функции в этих точках и найдем разность $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$, которую называют приращением функции (рисунок 6);

– составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и найдем его предел при $\Delta x \to 0$.

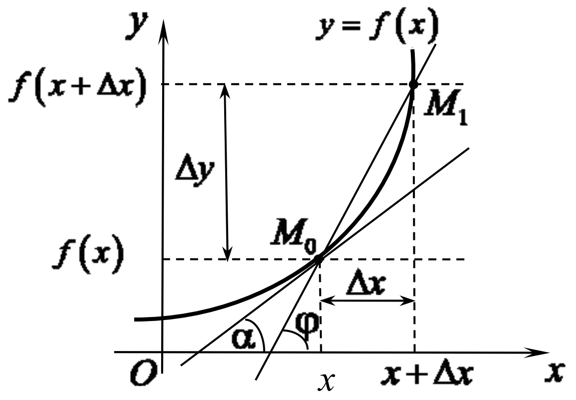


Рисунок 6

Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (приращения функции Δy к приращению аргумента Δx), когда $\Delta x \to 0$, то его называют производной функции $f\left(x\right)$ в точке x и обозначают $f'\left(x\right)$ или $\dfrac{df}{dx}$, $y'\left(x\right)$ или $\dfrac{dy}{dx}$, т. е.

$$f'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Эта формула справедлива для любой точки x из области определения функции. Значение производной в точке, например x_0, обозначают $f'\left(x_0\right)$ или $f'\left(x\right)\Big|_{x_0}$; $y'\left(x_0\right)$ или $y'\left(x\right)\Big|_{x_0}$. Операцию нахождения производной называют дифференцированием, а функцию, имеющую производную, дифференцируемой. Нахождение производной по определению называют непосредственным дифференцированием. На примере некоторых функции найдем производную по определению, т. е. непосредственно.

Пример 14 – Найти производную функций по определению.

Решение

1 $y = x^3$. Функция определена на всей оси. Возьмем произвольные точки x и $x_1 = x + \Delta x$, где Δx – приращение аргумента. Найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y = x_1^3 - x^3 = \left(x + \Delta x\right)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3 - x^3 =$$

$$= 3x_0^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3.$$

Теперь найдем предел $\left(x^3\right)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3x^2\Delta x + 3x\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta x\right)^3}{\Delta x} = 3x^2.$

Доказано, что в общем случае для любой действительной степени x (натуральной, дробной и отрицательной) производная от степенной функции находится по формуле $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Так, например, при $n=-1$ имеем $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1x_0^{-1-1} = -x_0^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, при $n=1$ имеем $x' = \left(x^1\right)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$,

при $n=\frac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 $y=\sin x$. Функция определена на всей оси. Возьмем произвольные точки x и $x_1 = x+\Delta x$. Найдем приращение функции Δy и соответствующий предел.

$$\Delta y = \sin x_1 - \sin x = \sin\left(x+\Delta x\right) - \sin x = 2\cos\left(x+\Delta x/2\right)\sin\left(\Delta x/2\right).$$

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\Delta x/2\right)\sin\left(\Delta x/2\right)}{\Delta x} = 2\cos\left(x\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= 2\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{2\cdot\left(\Delta x/2\right)} = \cos x.$$

Для справки: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x/2\right)}{\left(\Delta x/2\right)} = 1$ – первый замечательный предел.

Получили $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

На основании определения производной найдены производные **от основных элементарных функций** и составлена таблица таких производных (таблица 4), а нахождение производных от функций, полученных с помощью конечного числа алгебраических операций над **основными элементарными функциями**, основано на свойствах производной, которые называют **правилами дифференцирования** (они также приведены далее). Уделим внимание сложной функции.

Производная сложной функции. Сложная функция – это функция от функции (вложение функций), например $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$. Ее можно записать в виде цепочки $y = f\left(u\right)$, а $u = \varphi\left(x\right)$, где $f\left(u\right)$ и $\varphi\left(x\right)$– основные элементарные функции, производные от которых есть в таблице производных. В результате если функция $u=\varphi\left(x\right)$ имеет производную u_x' в точке x_0, а функция $y = f\left(u\right)$ имеет производную f_u' в точке $u_0 = \varphi\left(x_0\right)$, то сложная функция $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ имеет производную по x, которая находится по формуле $y_x' = f_u'\cdot u_x'$.

Заметим, что таких вложений может быть больше двух.

Таблица 4 – Таблица производных основных элементарных функций

В простейшем случае	В более общем случае сложных функций. Пусть $u=u(x)$
$C'=0 \quad C=\mathrm{const}$	
Степенная функция	
$\left(x^{a}\right)'=a\,x^{a-1} \qquad (a\in R)$ В частности: при $a=1$ имеем $(x)'=1$, при $a=-1$ имеем $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$, при $a=\dfrac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(u^{a}\right)'=a\,u^{a-1}\cdot u_x' \qquad (a\in R)$ В частности: при $a=1$ имеем $(u)'=u_x'$, при $a=-1$ имеем $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\left(u^{-1}\right)'=-\dfrac{1}{u^{2}}\cdot u_x'$, при $a=\dfrac{1}{2}$ имеем $\left(\sqrt{u}\right)'=\left(u^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u_x'$
Показательная функция	
$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a \quad (a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$	$\left(a^{u}\right)'=a^{u}\ln a\cdot u_x' \quad (a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$
В частности, при $a=e$ (экспонента)	
$\left(e^{x}\right)'=e^{x}$, т. к. $\ln e=1$	$\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u_x'$
Логарифмическая функция	
$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a} \quad (a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$	$\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u_x' \quad (a\in R,\ a>0,\ a\neq 1)$
В частности, при $a=e$ (натуральный логарифм)	
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, т. к. $\ln e=1$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u_x'$
Тригонометрические и обратно-тригонометрические функции	
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u_x'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u_x'$
$(\mathrm{tg}\ x)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$	$(\mathrm{tg}\ u)'=\dfrac{1}{\cos^{2}u}\cdot u_x'$
$(\mathrm{ctg}\ x)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$	$(\mathrm{ctg}\,u)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}u}\cdot u_x'$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u_x'$
$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u_x'$
$(\mathrm{arctg}\ x)'=\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$(\mathrm{arctg}\ u)'=\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u_x'$
$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$(\mathrm{arcctg}\ u)'=-\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u_x'$

Окончание таблицы 4

В простейшем случае	В более общем случае сложных функций. Пусть $u=u(x)$
Гиперболические функции	
$(\mathrm{sh}\,x)'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\mathrm{ch}\,x$	$(\mathrm{sh}\,u)'=\mathrm{ch}\,u\cdot u_x'$
$(\mathrm{ch}\,x)'=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\mathrm{sh}\,x$	$(\mathrm{sh}\,u)'=\mathrm{ch}\,u\cdot u_x'$
$(\mathrm{th}\,x)'=\left(\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\right)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$	$(\mathrm{th}\,u)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2u}\cdot u_x'$
$(\mathrm{cth}\,x)'=\left(\dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}\right)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$	$(\mathrm{cth}\,u)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2u}\cdot u_x'$

Правила дифференцирования (суммы, разности, произведения и частного).

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, $C=\mathrm{const}$, $v(x)\neq 0$. Тогда:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ – справедливо для любого конечного числа слагаемых;

2) $(uv)'=u'v+uv'$, в частности, $(Cu)'=Cu'$ – постоянный множитель можно выносить за знак производной;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{Cv'}{v^2}$.

Производная сложной функции. Пусть $y=f(\varphi(x))$, т. е. $y=f(u)$, а $u=\varphi(x)$, тогда $y_x'=f_u'\cdot u_x'$.

Примечание – Таблицу производных и правила дифференцирования следует **знать наизусть**.

Рассмотрим примеры по нахождению производных от функций, используя таблицу производных (см. таблицу 4) и правила дифференцирования.

Пример 15 – Найти производные функции.

Решение

1 $y=3x^2-4x+7$. Дифференцируем, используя правило суммы (разности):

$$y'=(3x^2-4x+7)'=(3x^2)'-(4x)'+(7)'=3(x^2)'-4(x)'+(7)'=6x-4.$$

2 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}$. Имеем степенные функции, которые следует преобразо-

вать к виду x^a, чтобы найти производные. Для этого воспользуемся свойствами степенной функции, которые приведём в качестве справки:

$$\text{а) } \frac{1}{x^n}=x^{-n};\quad \text{б) } x^n\cdot x^m=x^{n+m};\quad \text{в) } \left(x^n\right)^m=x^{n\cdot m};\quad \text{г) } \sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}},$$

где $n,m\in Z$. Преобразуем заданную функцию:

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+x\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{3}}+x^{1+\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}.$$

Теперь дифференцируем, используя правило суммы (разности):

$$y'=\left(x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{2}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'+\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

3 $y=x^3\cdot\operatorname{ctg}x$. Дифференцируем по правилу произведения:

$$y'=\left(x^3\cdot\operatorname{ctg}x\right)'=\left(x^3\right)'\operatorname{ctg}x+x^3\left(\operatorname{ctg}x\right)'=3x^2\operatorname{ctg}x-\frac{x^3}{\sin^2x}.$$

4 $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$. Дифференцируем по правилу частного:

$$y'=\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)'=\frac{(\ln x)'x^3-\ln x\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}=\frac{1-3\ln x}{x^3}.$$

5 $y=\sin x^3$. В данном случае имеем сложную функцию, которую представим в виде цепочки основных элементарных функций, производные от которых есть в таблице производных, т. е. $y=\sin u$, а $u=x^3$. Дифференцируем по правилу сложной функции:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=(\sin u)'_u\cdot\left(x^3\right)'_x=\cos u\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3.$$

6 $y=\sin^3x$. Опять имеем сложную функцию $y=\sin^3x=(\sin x)^3$. Представим ее в виде цепочки основных элементарных функций $y=u^3$, а $u=\sin x$. Дифференцируем:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x)=\left(u^3\right)'_u\cdot(\sin x)'_x=3u^2\cdot\cos x=3\sin^2x\cdot\cos x.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1) $y=x\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x}$;	5) $y=\cos^2x$;	9) $y=e^{\cos x}$;
2) $y=x^2\cdot 2^x$;	6) $y=\cos x^2$;	10) $y=\ln\sin x$;
3) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$;	7) $y=\sqrt{4x^3-x^2+5}$;	11) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;
4) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;	8) $y=x\sqrt{x-1}$;	12) $y=\ln\cos\operatorname{arctg}x$.

Геометрический смысл производной. Из рисунка 6 видно, что отношение $\Delta y/\Delta x = \mathrm{tg}\,\varphi$ представляет собой тангенс угла наклона секущей $M_0 M_1$, его называют угловым коэффициентом секущей.

Касательная к кривой в точке M_0 есть предельное положение секущей $M_0 M_1$, проходящей через точку M_0, когда точка M_1 неограниченно приближается к M_0, т. е. когда $\Delta x \to 0$.

Поскольку $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\,\varphi$, то $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\varphi \to \alpha} \mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\,\alpha$, т. е. $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = k$ есть угловой коэффициент касательной к кривой в точке M_0, где угол α есть угол, образованный касательной с положительным направлением оси Ox (см. рисунок 6).

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с координатами $M_0\,(x_0\,, y_0)$. В этом и состоит геометрический смысл производной.

Выводы. Поскольку $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = k$, то можно заключить, что:

– для возрастающих функций касательная образует острый угол с осью Ox, т. е. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и производная $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha = k > 0$ положительна;

– для убывающих функций касательная образует тупой угол с осью Ox, т. е. $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и производная $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha = k < 0$ отрицательна;

– для неизменяющихся функций $f(x) = \mathrm{const}$ касательная параллельна оси Ox, т. е. $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, а производная $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha = k = 0$ равна нулю. Верны также и обратные утверждения. Наглядно графически изображено на рисунке 7.

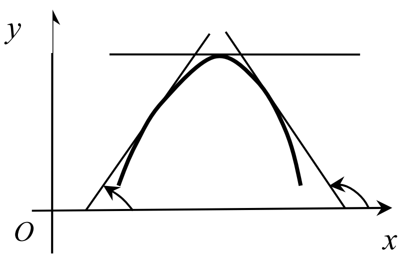


Рисунок 7

Общефизический смысл производной. Если функция $y = f(t)$ описывает какой-либо физический процесс, то отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ характеризует среднюю скорость протекания этого процесса за промежуток Δt, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t)$ есть мгновенная скорость протекания данного процесса в момент времени t. Из этих слов вытекают конкретные смыслы производной (механический, химический, экономический и т. д.). Так, например, если функция $S(t)$ описывает закон движения материальной точки, то отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ характеризует среднюю скорость этого движения за промежуток времени Δt, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=S_t'(t)=v(t)$ есть мгновенная скорость материальной точки в момент времени t (показания спидометра автомобиля).

Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства. Величина dy, изображенная на рисунке 4, является линейной (главной) частью приращения Δy функции $y=f(x)$, ее называют дифференциалом функции, или дифференциалом первого порядка. Из рисунка 8 видно, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{dy}{\Delta x}$, а поскольку $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$, то можем записать $dy=f'(x)\Delta x$. Принято величину Δx называть дифференциалом независимой переменной и обозначать $dx=\Delta x$. В результате формула для дифференциала принимает следующий вид:

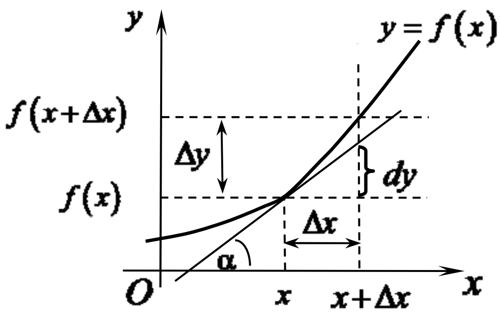


Рисунок 8

$$dy=f'(x)dx.$$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в некоторой точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции, когда x получает приращение $\Delta x=dx$. В этом состоит его геометрический смысл. Из определения дифференциала следует, что его свойства аналогичны свойствам производной.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, $C=\text{const}$, $v(x)\neq 0$. Тогда:

1) $d(C)=C'dx=0$;

2) $d(u\pm v)=du\pm dv$, в частности, $d(u\pm C)=du\pm dC=du$ – константу можно добавлять (вычитать) в выражении под знаком дифференциала;

3) $d(uv)=vdu+u\,dv$, в частности, $d(Cu)=C\,du$ – постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала или подносить;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-u\,dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\dfrac{C}{v}\right)=-\dfrac{C\,dv}{v^2}$.

Пример 16 – Записать дифференциал функции $y=\sin x-x\cos x+4$.

Решение

$$dy=f'(x)dx=(\sin x-x\cos x+4)'\,dx=x\sin x\,dx.$$

Примеры для самостоятельной работы

Записать дифференциал функций:

1) $y=\ln x-x+1$;
2) $y=x^2\cdot\arcsin x$;
3) $y=\dfrac{\lg x}{x}$;
4) $y=e^{\cos x}$;
5) $y=\sqrt{1+x^2}$;
6) $y=\ln\sqrt{1-x^3}$;
7) $y=xe^{x^2}$;
8) $y=\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
9) $y=\operatorname{tg}^2 x$.

Практическое занятие № 11. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически, логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование функций, заданных неявно. Неявно заданные функции – это функции $y=f(x)$, заданные уравнением $F(x,y(x))=0$, не разрешенным относительно y. Для нахождения производных от неявно заданных функций нет необходимости разрешать уравнение $F(x,y(x))=0$ относительно y. Существуют два способа нахождения производных.

1 Дифференцируем уравнение $F(x,y(x))=0$ по x, т. е. $\left(F(x,y(x))\right)_x'=0$, рассматривая y как функцию x, и полученное уравнение разрешаем относительно y', которое всегда разрешимо, поскольку является линейным относительно y'.

2 Используем формулу $y_x'=-\dfrac{F_x'(x,y=\text{const})}{F_y'(x=\text{const},y)}$, в которую следует подставить производные F_x' и F_y', которые находятся по следующему правилу: при нахождении производной F_x' переменную y считаем const, а при нахождении производной F_y' переменную x считаем const.

Пример 17 – Найти производную y_x' функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение

Первый способ.

$$\left(x^3+y^3-3xy\right)'=3x^2+3y^2y'-3(xy)'=3x^2+3y^2y'-3(x'y+xy')=$$
$$=3x^2+3y^2y'-3(y+xy')=3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0.$$

Разрешаем полученное уравнение $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$ относительно y' и получаем

$$y'=\frac{3x^2-3y}{-3y^2+3x}=-\frac{x^2-y}{y^2-x}.$$

Второй способ.

Имеем $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Находим F_x' и F_y'.

$$F_x'=\left(x^3+y^3-3xy\right)_x'=\left(x^3\right)_x'+\left(y^3\right)_x'-(3xy)_x'=3x^2+0-3y(x)_x'=3x^2-3y;$$

$$F_y'=\left(x^3+y^3-3xy\right)_y'=\left(x^3\right)_y'+\left(y^3\right)_y'-(3xy)_y'=0+3y^2-3x(y)_y'=3y^2-3x.$$

Подставляем в формулу

$$y_x'=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{3x^2-3y}{3y^2-3x}=-\frac{x^2-y}{y^2-x}.$$

Как видно, результат не зависит от способа нахождения.

Примеры для самостоятельной работы

Найти производные функций, заданных неявно:

1) $x=y-\operatorname{arctg}(xy)$; 2) $e^{x+y}=x-y$; 3) $\ln y-\dfrac{x}{y}=0$; 4) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=0$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически. При таком способе задания функции аргумент x и функция y связаны через вспомогательную переменную, например t, которую называют параметром и записывают в виде системы двух уравнений $\begin{cases} y=y(t), \\ x=x(t). \end{cases}$ Формула для дифференцирования, таким образом, заданной функции имеет следующий вид: $\begin{cases} y_x'=y_t'/x_t', \\ x=x(t). \end{cases}$

Пример 18 – Найти производную y_x' функции $y(x)$, заданной параметрически $\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t. \end{cases}$

Решение

$$\begin{cases} y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{(R\sin t)_t'}{(R\cos t)_t'}=\dfrac{R\cos t}{-R\sin t}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}=-\operatorname{ctg} t, \\ x=R\cos t. \end{cases}$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \cos t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^{-t} \sin t, \\ y = e^{t} \cos t. \end{cases}$

Логарифмическое дифференцирование. В ряде случаев для нахождения производной функцию целесообразно сначала прологарифмировать, а затем дифференцировать. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием. Логарифмическое дифференцирование целесообразно применять, когда функция $y = f(x)$ представляет собой произведение или частное большого числа сомножителей, т. е. имеет вид:

$$y = \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)\ldots\psi_m(x)}.$$

После логарифмирования дифференцирование существенно упрощается.

$$\ln y = \ln\varphi_1(x) + \ln\varphi_2(x) + \ldots + \ln\varphi_n(x) - \ln\psi_1(x) - \ln\psi_2(x) - \ldots - \ln\psi_m(x).$$

Находим производные от обеих частей последнего равенства, рассматривая $\ln y$ как сложную функцию x. Получаем

$$\frac{1}{y} y'_x = \left(\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots + \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} - \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} - \frac{\psi_2'(x)}{\psi_2(x)} - \ldots - \frac{\psi_m'(x)}{\psi_m(x)} \right)$$

или $y'_x = y\left(\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots + \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} - \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)} - \frac{\psi_2'(x)}{\psi_2(x)} - \ldots - \frac{\psi_m'(x)}{\psi_m(x)} \right)$,

где $y = \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)\ldots\psi_m(x)}$.

Пример 19 – Найти производную функции $y = \dfrac{(x^2+1)\sqrt[3]{(x+5)} e^x}{(x-3)^4}$.

Решение

Видно, что нахождение производной традиционным путем, используя правила дифференцирования, слишком громоздко. Логарифмируем:

$$\ln y = \ln(x^2+1) + \frac{1}{3}\ln(x+5) + x - 4\ln(x-3).$$

Далее дифференцируем:

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+5} + 1 - \frac{4}{x-3};$$

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+5}+1-\frac{4}{x-3}\right)=\frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x+5\right)^3}\,e^x}{\left(x-3\right)^4}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+5}+1-\frac{4}{x-3}\right).$$

Функцию вида $y=u\left(x\right)^{v(x)}=u^v$ называют показательно-степенной. Производная от нее находится только логарифмическим дифференцированием с использованием свойства логарифма $\ln a^b = b\cdot\ln a$, т. е.

$$\ln y = v\ln u;\qquad \left(\ln y\right)' = \left(v\ln u\right)';\qquad \frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\frac{1}{v}u';$$

$$y' = y\left(v'\ln u + v\frac{1}{u}u'\right)=u^v\left(v'\ln u+v\frac{1}{u}u'\right)\quad \text{или}\quad y' = u^v v'\ln u + vu^{v-1}u'.$$

Пример 20 – Найти производную функции $y=(\cos 3x)^{\frac{x^2}{2}}$.

Решение

Формула с течением времени забудется. Лучше каждый раз применять логарифмическое дифференцирование непосредственно, а именно сначала логарифмировать, а затем дифференцировать:

$$\ln y = \ln(\cos 3x)^{\frac{x^2}{2}};\qquad \ln y = \frac{x^2}{2}\ln(\cos 3x).$$

Дифференцируем обе части равенства по x:

$$\left(\ln y\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln(\cos 3x)+\frac{x^2}{2}(\ln(\cos 3x))';$$

$$\frac{1}{y}y' = x\ln(\cos 3x)+\frac{x^2}{2}\frac{1}{\cos 3x}(-3\sin 3x);$$

$$y' = y\left(x\ln(\cos 3x)-\frac{3}{2}x^2\operatorname{tg}3x\right)=\left(\cos 3x\right)^{\frac{x^2}{2}}\left(x\ln(\cos 3x)-\frac{3}{2}x^2\operatorname{tg}3x\right).$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1) $y=\dfrac{\left(x-2\right)^2\sqrt[3]{x+1}}{\left(x+4\right)^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}\sqrt[4]{\left(x-2\right)^3}}$; 5) $y=x^{2x}$;

2) $y=\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$; 4) $y=\left(\sin 2x\right)^{x^2+1}$; 6) $y=x^{\ln x}$.

Практическое занятие № 12. Производные и дифференциалы высших порядков

Производные высших порядков. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $y'=f'(x)$, ее также называют производной первого порядка, или первой производной. А поскольку она также является функцией, то от нее снова можно брать производную. Эту производную называют производной второго порядка, или второй производной, и обозначают $y''=(y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Выражение $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ следует читать «*дэ два y по дэ x в квадрате*». Аналогично $y'''=(y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ – производная третьего порядка, или третья производная. И т. д.

Дифференциалы высших порядков. Дифференциал от дифференциала первого порядка $dy=f'(x)dx$ называют дифференциалом второго порядка и обозначают d^2y, т. е.

$$d^2y=d(dy)=d\big(f'(x)dx\big)=\big(f'(x)dx\big)'\,dx=\ldots=f''(x)dx^2.$$

Аналогично дифференциал третьего порядка и т. д.

$$d^3y=d\left(d^2y\right)=d\left(f''(x)dx^2\right)=\left(f''(x)dx^2\right)'\,dx=\ldots=f'''(x)dx^3.$$

Пример 21 – Найти производную и дифференциал второго порядка.

Решение

1 $y=x\ln x$. Находим первую производную по правилу произведения: $y'=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$. Находим вторую производную: $y''=(\ln x+1)'=(\ln x)'+(1)'=\dfrac{1}{x}$. Теперь дифференциал $d^2y=\dfrac{1}{x}dx^2$.

2 $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$. Находим первую производную:

$$y'=1\cdot\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x.$$

Находим вторую производную: $y''=(y')'=(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$. Теперь записываем дифференциал $d^2y=\dfrac{1}{1+x^2}dx^2$.

Примеры для самостоятельной работы

Найти производную и дифференциал второго порядка от функций:

1) $y=\cos^2 x$; 4) $y=\ln(x-1)$; 7) $y=x\,e^x$;

2) $y=\operatorname{arctg} x^2$; 5) $y=x^2 \ln x$; 8) $y=\sqrt{x}$;

3) $y=e^{-x^2}$; 6) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 9) $y=x\sqrt{x}$.

Практическое занятие № 13. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой. Правило Лопиталя и его применение к вычислению пределов

Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с координатами $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид: $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной, проведенная через точку касания, называется нормалью. Ее уравнение $y=y_0-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Пример 22 – Записать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение

Неизвестными в искомых уравнениях являются значения $y_0=f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Найдем их.

$$y_0=f(x_0)=x_0^2=1^2=1; \qquad f'(x)=\left(x^2\right)'=2x; \qquad f'(x_0)=2x_0=2\cdot 1=2.$$

Подставляем найденные значения в уравнения и получаем $y=1+2(x-1)$ или $y=2x-1$ – уравнение касательной; $y=1-\dfrac{1}{2}(x-1)$ или $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ – уравнение нормали.

Графики функции, касательной и нормали изображены на рисунке 9.

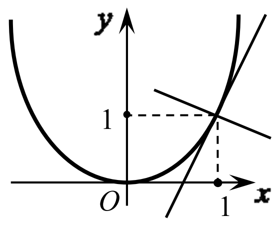


Рисунок 9

Примеры для самостоятельной работы

Записать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $y=x^2-5x+4$, $x_0=-1$; 3) $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$; 5) $y=e^{1-x^2}$, $x_0=-1$;

2) $y=x^3+2x^2-4x$, $x_0=-2$; 4) $y=\ln x$, $x_0=1$; 6) $y=\operatorname{tg} 2x$, $x_0=0$.

Применение производной к раскрытию неопределенностей при нахождении пределов. Правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности некоторой точки x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} \overset{\text{если}}{=} \left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{то}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \overset{\text{если}}{=} \left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{то}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т. д.}$$

При раскрытии неопределенностей $(0\cdot\infty),(\infty-\infty)$ их следует преобразовать к основным $(0/0)$ или (∞/∞), а затем применить правило Лопиталя.

Пример 23 – Найти пределы.

Решение

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+1}=\dfrac{1}{\ln 1+1}=1$, поскольку $\ln 1=0$.

2 $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}=\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{(\ln\sin x)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{(x\cos x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to +0}\frac{\cos x-x\sin x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

3 $\lim\limits_{x\to +0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1/x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1/x}{\left(-1/x^2\right)}=-\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x^2}{x}=0$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2\cdot 1-0}=0.$$

Примеры для самостоятельной работы

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+1}{x^3+2x^2+5}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Практическое занятие № 14. Исследования функций на монотонность и экстремумы

Возрастание и убывание функций. На основании геометрического смысла производной было показано, что если функция на (a,b) возрастает, то $f'(x)>0$, а если убывает, то $f'(x)<0$. Верно и обратное. При этом если функция $f(x)$ возрастает или убывает на (a,b), то ее называют монотонной.

Локальный максимум и минимум функций. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции, если существует δ окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ в этой окрестности выполняются условия $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$ (рисунок 10). Значения функции в точках максимума (минимума) функции называют **максимумом (минимумом)** функции. Максимум и минимум функции называют одним словом – **экстремум**.

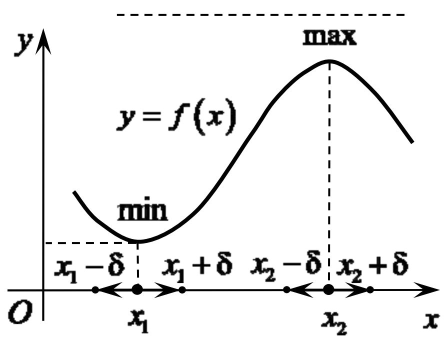


Рисунок 10

Необходимые условия существования экстремума. Из рисунка 10 видно, что смена характера поведения функции с возрастания на убывание или наоборот приводит к изменению знака производной. Это означает, что если дифференцируемая функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_i, то производная в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_i)=0$, а касательная параллельна оси Ox. **Однако обратное не всегда верно,** т. е. если $f'(x_i)=0$, то это не означает, что в точке x_i экстремум. В этой точке экстремум может быть, а может и не быть. Кроме того, в точке экстремум может быть, а производная не существует $(\nexists)$ (функция не дифференцируемая) или равна $\pm\infty$. Так, например, для функций $f(x)=x^3$ имеем $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$. Однако, как видно из графика (рисунок 11, *а*), точка $x=0$ не является точкой экстремума. Для функции $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ экстремум есть минимум (рисунок 11, *б*), а функция $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ не имеет производной, поскольку через точку с координатой $x=0$ можно провести бесконечно много касательных. Пример с $f'(x)=\pm\infty$ приведем далее.

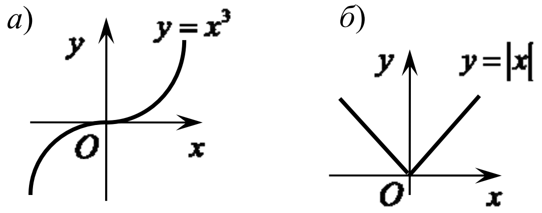


Рисунок 11

Вывод: непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или бесконечности либо она не существует. Эти точки называют критическими точками первого рода, или просто критическими, т. е. точками возможного экстремума.

Для однозначного определения наличия экстремума в критических точках формулируются так называемые достаточные условия, которые позволяют ответить на вопрос о его существовании и характере.

Достаточное условие существования экстремума. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_i и при переходе через нее (слева направо) $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_i – точка минимума, если с «+» на «–», то x_i – точка максимума. Наглядное геометрическое доказательство видно из рисунка 12.

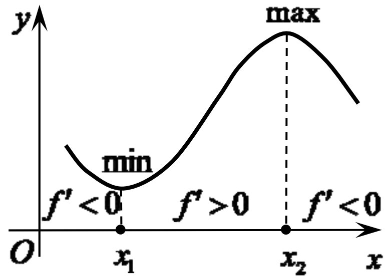


Рисунок 12

Из изложенного следуют ***правила исследования функции на экстремум, промежутки возрастания и убывания***.

1 Из необходимых условий $f'(x) = 0, \pm\infty, \nexists$ найти критические точки.

2 Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из найденных критических точек.

3 В соответствии с достаточными условиями установить наличие экстремума и его характер (min, max).

4 Вычислить значения функции в найденных критических точках и схематически построить график функции.

Пример 24 – Найти промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение

Функция определена на всей числовой оси. Найдём производную:

$$y' = \left(\frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(\frac{x}{3} - x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ищем точки, в которых $y' = 0$, т. е. $\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 8$.

Ищем точки, в которых $y' = \infty$, т. е. $\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = \infty \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Точки, в которых производная не существует, отсутствуют.

Имеем две критические точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = 8$. Отмечаем их на числовой оси (рисунок 13). Точки разбивают область определения на три интервала $(-\infty, 0), (0, 8), (8, \infty)$. Исследуем знак первой производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из

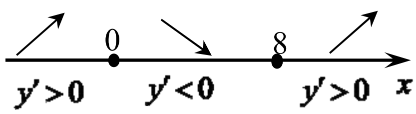


Рисунок 13

критических точек. Для этого возьмём по одному значению x из каждого интервала, подставим в выражение для производной и определим ее знак.

Для интервала $(-\infty, 0)$. Пусть $x=-1$, тогда $y'(-1)>0$. Следовательно, функция в интервале $(-\infty, 0)$ возрастает. Для интервала $(0, 8)$. Пусть $x=2$, тогда $y'(2)<0$. Следовательно, функция в интервале $(0, 8)$ убывает.

Производная при переходе точки $x_1=0$ слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, в точке $x_1=0$ – максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max}=f(0)=0$.

Для интервала $(8, \infty)$. Пусть $x=27$, тогда $y'(27)>0$. Следовательно, функция в интервале $(8, \infty)$ возрастает.

Производная при переходе точки $x_2=8$ меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_2=8$ – минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(8)=8/3-\sqrt[3]{8^2}=-4/3$. Схематически строим график (рисунок 14).

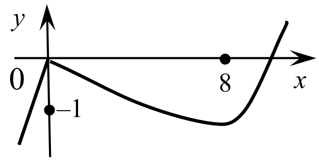


Рисунок 14

Примеры для самостоятельной работы

Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функций:

1) $y=xe^{x^2}$; 4) $y=\dfrac{x}{\ln x}$; 7) $y=x-2\ln x$; 10) $y=x\sqrt{1-x^2}$;

2) $y=x-2\sin x$; 5) $y=\dfrac{e^x}{x}$; 8) $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$; 11) $y=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$;

3) $y=x\ln^2 x$; 6) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$; 9) $y=-3x^4+6x^2$; 12) $y=x+\operatorname{arcctg} x$.

Практическое занятие № 15. Исследования функций на выпуклость (вогнутость) и точки перегиба. Нахождение асимптот графика функции

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. График функции $y=f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале, если он расположен ниже (выше) любой касательной к графику на этом интервале. Точка графика непрерывной функции, отделяющая выпуклость от вогнутости графика, называется точкой перегиба. Точка M – точка перегиба (рисунок 15).

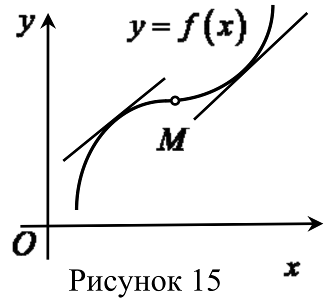


Рисунок 15

Промежутки выпуклости и вогнутости находят с помощью теоремы, которую называют **достаточным условием выпуклости, вогнутости графика функции:** если функция

$y = f(x)$ на интервале (a, b) имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то на этом интервале график функции выпуклый, а если $f''(x) > 0$ на (a, b), то график функции вогнутый.

Проиллюстрируем изложенное на графиках функций $f(x) = x^3$ и $f(x) = \frac{1}{x}$ с ярко выраженной выпуклостью и вогнутостью (рисунок 16).

Для функции $f(x) = x^3$ вторая производная $f''(x) = 6x$ и, соответственно, $f''(x) < 0$ для $x < 0$ и $f''(x) > 0$ для $x > 0$. При этом $f''(0) = 0$ и $f(0) = 0$. Следовательно, $(0;0)$ – точка перегиба.

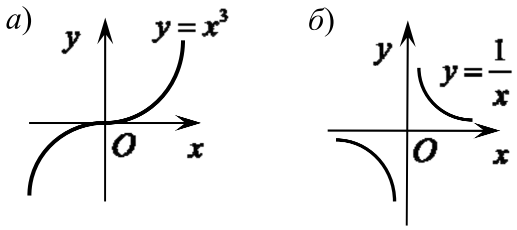


Рисунок 16

Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ вторая производная $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f''(x) < 0$ для $x < 0$ и $f''(x) > 0$ для $x > 0$. При этом $f''(\mp 0) = \mp\infty$ и функция $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не определена, следовательно, положение точки перегиба не определено.

Точки, в которых $f''(x_0) = 0$, или $f''(x_0) = \pm\infty$, или $f''(x_0)$ не существует, называют критическими точками второго рода, или точками возможного перегиба графика функции.

Для нахождения точек перегиба используется теорема, которую называют **достаточным условием существования точек перегиба:** если вторая производная $f''(x)$ при переходе через критическую точку второго рода, например x_0, меняет знак и функция в этой точке определена, то точка графика функции с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Замечание – Из изложенного очевидны правила нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба. Из условий $f''(x) = 0, = \infty, \nexists$ найти критические точки второго рода, исследовать знак второй производной в промежутках между критическими точками и на основании приведенных теорем определить выпуклость, вогнутость графика функции и наличие точек перегиба. Подробности на примерах.

Пример 25 – Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

Решение

1 $y = x^5 - x + 5$. Функция определена на всей числовой оси. Находим $y' = 5x^4 - 1$ и $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует также на всей числовой оси и при $x = 0$ равна нулю, т. е. $y''(0) = 0$, следовательно, $x = 0$ – критическая точка второго рода. Видно, что при $x < 0$, $y'' < 0$ график выпуклый, а при $x > 0$,

$y'' > 0$ график вогнутый. Вторая производная при переходе через точку $x = 0$ меняет знак. При этом $y(0) = 5$, следовательно, точка $(0;5)$ является точкой перегиба.

2 $y = \sqrt[3]{x}$. Функция определена на всей числовой оси. Находим $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ и $y'' = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Вторая производная не определена при $x = 0$, т. е. $y''(0) = \infty$, следовательно, $x = 0$ – критическая точка второго рода. При $x < 0$, $y'' > 0$ график вогнутый, а при $x > 0$, $y'' < 0$ график выпуклый. Вторая производная при переходе точки $x = 0$ меняет знак. При этом $y(0) = 0$, следовательно, $(0;0)$ – точка перегиба.

Примеры для самостоятельной работы

Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции:

1) $y = xe^x$; 3) $y = x + \operatorname{arcctg} x$; 5) $y = e^{-x^2}$; 7) $y = (1 + x^2)e^x$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 4) $y = \dfrac{e^x}{x}$; 6) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; 8) $y = \sqrt[3]{x - 1}$.

Асимптоты графика функции. Асимптотой кривой, т. е. графика функции $y = f(x)$, называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на этой кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов для этой функции при $x \to x_0 \pm 0$ равен бесконечности, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$$

(рисунок 17). Вертикальные асимптоты проходят через точки, в окрестности которых функция неограниченно возрастает, это точки разрыва второго рода, точки, в которых функция не определена (знаменатель обращается в ноль).

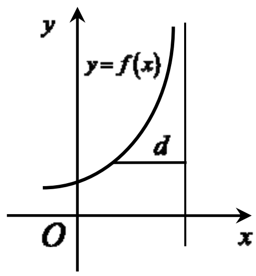


Рисунок 17

Наклонные асимптоты. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$, где параметры k и b определяются по формулам $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$ (рисунок 18). Если k или b равны бесконечности, то график не имеет наклонных асимптот.

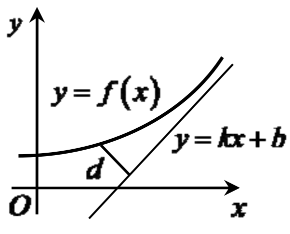


Рисунок 18

Горизонтальные асимптоты. Если $k=0$, то уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ принимает вид $y=b$ и ее называют горизонтальной асимптотой.

Замечание – Наклонные и горизонтальные асимптоты могут иметь разные уравнения при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$. Это следует учитывать при их нахождении.

Пример 26 – Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Решение

Найдем вертикальные асимптоты. Функция не определена в точке $x=1$, и, как видно, она является точкой разрыва второго рода, поскольку $\lim\limits_{x\to1\pm0}\dfrac{x^2+x}{x-1}=\pm\infty$. Следовательно, $x=1$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Запишем уравнение асимптоты $y=kx+b$ и найдем неизвестные параметры k и b.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2-x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=2.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=x+2$. Поскольку $k\neq0$, то горизонтальных асимптот нет.

Примеры для самостоятельной работы

Найти асимптоты графика функций:

1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; 3) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; 5) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 7) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$;

2) $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$; 4) $y=\dfrac{2x^2-9}{x+2}$; 6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 8) $y=xe^x$.

Примечание – Были детально (поэтапно) рассмотрены вопросы, связанные с применением производных к исследованию функций. Теперь подведём итог и запишем общую схему исследования функций и построения их графиков, в которой укажем, в какой последовательности целесообразно проводить исследования.

Практические занятия № 16 и 17. Общая схема исследования функций и построение графиков

1 Найти область определения функции $D(f): x\in\ldots$.

2 Исследовать функцию на четность (нечетность)

$\left(f(-x)=\begin{cases} f(x) & -\text{четная} \\ -f(x) & -\text{нечетная} \end{cases} \right)$ и периодичность $\left(f(x)=f(x+T)\right)$. *График четной функции симметричен относительно оси* Oy, *нечетной – относительно начала координат. Если функция обладает свойством четности* (*нечетности*), *то достаточно исследовать ее на полуоси и график отобразить соответственно зеркально. Если функция периодическая, то исследования провести в пределах одного периода и распространить на всю числовую ось*.

3 Найти точки пересечения графика функции с осями координат и нанести их на координатную сетку. *Из условий* $\{x=0,\ y=f(0)=\ldots\ \}$ *и* $\{y=0,$ *решая уравнение* $f(x)=0$, *найти значения* $x=\ldots\}$.

4 Исследовать функцию на непрерывность. *Все элементарные функции непрерывны в своих естественных областях определения. В точках, где функция не определена, установить характер разрыва. Для этого найти пределы слева и справа в точках разрыва*. На координатной сетке отметить поведение графика функции в окрестности точек разрыва.

5 Найти уравнения вертикальных, наклонных и горизонтальных асимптот и построить их. *Уравнение вертикальной* $x=x_0$, *где* x_0 – *точка, в которой функция не определена и* $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty$. *Уравнение наклонной* $y=kx+b$, *где* $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$, *при* $k=0$ *имеем* $y=b$ – *горизонтальную асимптоту. Если* $k=\infty$ *или* $b=\infty$, *то график не имеет указанных асимптот.* На координатной сетке отметить поведение графика функции в окрестности найденных асимптот.

6 Найти промежутки возрастания, убывания и точки экстремумов функции. *Для этого найти критические точки первого рода из условия* $f'(x)=0,=\infty,\nexists$, *отметить их на числовой оси и определить знак первой производной в найденных промежутках. Если в промежутке* $f'(x)>0$, *то* $f(x)$ *возрастает, а если* $f'(x)<0$, *то* $f(x)$ *убывает. Если в критической точке* $f(x)$ *определена и при переходе через неё слева направо* $f'(x)$ *меняет знак с «+» на «–», то в критической точке* – max, *если с «–» на «+», то* – min. Вычислить значения функции в критических точках и нанести их на координатную сетку.

7 Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции. *Для этого найти критические точки второго рода из условия* $f''(x)=0,=\infty,\nexists$, *отметить их на числовой оси и установить знак второй производной в отмеченных промежутках. Если в промежутке* $f''(x)<0$, *то график* $f(x)$ *выпуклый, а если* $f''(x)>0$, *то вогнутый. Если при переходе через критическую точку* $f''(x)$ *меняет знак и в этой точке функция определена, то график имеет точку перегиба*. Вычислить значения функции в точках перегиба и нанести их на координатную сетку.

8 По полученным данным, плавно соединяя отмеченные точки, учитывая рост (спад), выпуклость (вогнутость) и асимптоты, схематически построить график.

Пример 27 – Применяя вышеприведенную схему, провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение

1 Найдем область определения функции $D(y)$: $x \in R,\ x \neq 1$.

2 Установим четность, нечетность, периодичность. Проверяем условие

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x) + 1}{(-x) - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{-x - 1} \neq \begin{cases} y(x), \\ -y(x). \end{cases}$$

Функция не имеет свойства чётности, нечётности, т. е. является функцией общего вида. График не имеет осей и точек симметрии. Функция не периодическая.

3 Находим точки пересечения с осями координат.

С осью Oy: $x = 0,\ y = \dfrac{0^2 - 0 + 1}{0 - 1} = -1$. Точка $(0;-1)$ – точка пересечения с осью Oy. Отмечаем ее на координатной сетке (рисунок 19).

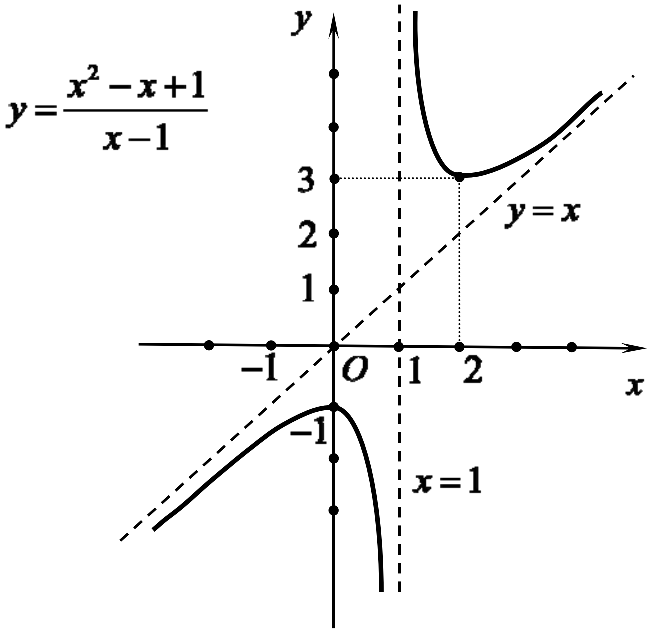


Рисунок 19

С осью Ox: $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Однако, как видно, дискриминант квадратного уравнения отрицательный, т. е. действительных корней нет, а следовательно, нет точек пересечения с осью Ox.

4 Исследуем функцию на непрерывность. Функция определена на всей числовой оси, за исключением точки $x = 1$, следовательно, непрерывна везде, за исключением точки $x = 1$. Установим характер разрыва в точке $x = 1$, для этого найдем пределы

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\infty;\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty.$$

Оба предела равны $\pm\infty$, следовательно, в точке $x=1$ разрыв второго рода.

5 Найдем уравнения асимптот.

Вертикальные. В точке $x=1$ функция не определена и испытывает разрыв второго рода. Следовательно, $x=1$ – уравнение вертикальной асимптоты. Строим ее на координатной сетке (штриховая вертикальная линия) и отмечаем поведение графика функции при $x\to 1\pm 0$ на основании предыдущего пункта (см. рисунок 19).

Наклонные асимптоты ищем в виде $y=kx+b$. Находим k и b.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.$$

Получили уравнение наклонной асимптоты $y=x$. Это биссектриса первой и третьей координатных четвертей (штриховая наклонная линия) (см. рисунок 19).

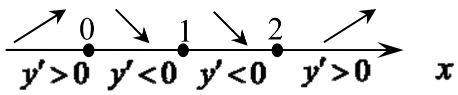
6 Исследуем функцию на экстремумы, промежутки возрастания и убывания функции. Для этого найдем критические точки первого рода. Находим первую производную:

$$y'=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Условие $y'=0$ дает $x^2-2x=0$, из которого получаем две критические точки: $x_1=0\in D(y)$ и $x_3=2\in D(y)$.

Условие $y'=\infty$ дает $x-1=0$, из которого следует $x_2=1\notin D(y)$.

В результате получили три критические точки, которые разбивают область определения на четыре интервала $(-\infty,0),(0,1),(1,2),(2,\infty)$. Критические точки изобразим на числовой оси и исследуем знак первой производной слева и справа от каждой них. Для этого возьмём по одному значению x из каждого интервала, подставим в выражение для первой производной и определим ее знак.



Для интервала $(-\infty,0)$. Пусть $x=-1$, тогда $y'(-1)>0$. Функция в этом интервале возрастает.

Для интервала $(0,1)$. Пусть $x=0{,}5$, тогда $y'(0{,}5)<0$. Функция в этом интервале убывает.

Производная при переходе точки $x_1=0$ слева направо меняет знак с «+» на «–». Следовательно, в точке $x_1=0$ функция имеет максимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\max}=f(0)=-1$. Отмечаем точку $(0;-1)$ на координатной сетке (см. рисунок 19).

Для интервала $(1,2)$. Пусть $x=1{,}5$, тогда $y'(1{,}5)<0$. Функция в этом интервале убывает.

Производная при переходе точки $x_2=1$ слева направо не меняет знак. Следовательно, в точке $x_2=1$ экстремума нет.

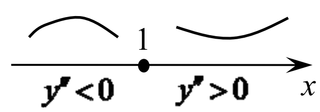
Для интервала $(2,\infty)$. Пусть $x=3$, тогда $y'(3)>0$. Функция в этом интервале возрастает.

Производная при переходе точки $x_3=2$ слева направо меняет знак с «–» на «+». Следовательно, в точке $x_3=2$ функция имеет минимум. Вычислим значение функции в ней: $f_{\min}=f(2)=3$. Отмечаем точку $(2;3)$ на координатной сетке (см. рисунок 19).

7 Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Для этого находим критические точки второго рода. Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная $y''=\infty$ при $x=1\notin D(y)$. Следовательно, имеем одну критическую точку второго рода. Отметим ее на числовой оси и исследуем знак второй производной слева и справа от нее.



Для интервала $(-\infty,1)$. Пусть $x=0$, тогда $y''(0)<0$. График функции в интервале $(-\infty,1)$ выпуклый.

Для интервала $(1,\infty)$. Пусть $x=2$, тогда $y''(2)>0$. График функции в интервале $(1,\infty)$ вогнутый.

Вторая производная при переходе через критическую точку второго рода меняет знак, а поскольку в этой точке функция не определена, т. е. $y(1\mp 0)=\mp\infty$, то расположение точки перегиба не определено.

8 По полученным данным, соединяя отмеченные точки и учитывая рост (спад), выпуклость (вогнутость) и асимптоты, схематически строим график (см. рисунок 19).

Примеры для самостоятельной работы

Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$; 3) $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$; 5) $y=xe^{-x^2}$; 7) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$;

2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 4) $y=e^{-x^2}$; 6) $y=x^2e^{-x}$; 8) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

Список литературы

1 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа. Т. 1. / Л. Д. Кудрявцев. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.

2 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчислений: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – Т. 3. – 728 с.