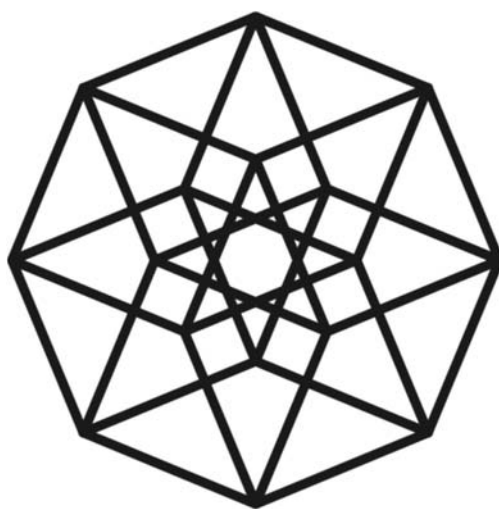


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения*



Могилев 2021

УДК 514.123
ББК 22.151
А64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» апреля 2021 г.,
протокол № 8

Составители: канд. пед. наук, доц. Е. Л. Старовойтова;
ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент канд. физ.-мат. наук И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые для проведения
практических занятий вопросы и задачи.

Учебно-методическое издание

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная вёрстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2021

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Декартова прямоугольная система координат. Полярная система координат. Метод координат на плоскости. Основные приложения метода координат на плоскости. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.....	5
2 Практическое занятие № 2. Прямая линия как линия первого порядка. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой.....	7
3 Практическое занятие № 3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых..	8
4 Практическое занятие № 4. Общее уравнение плоскости. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.....	10
5 Практическое занятие № 5. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Взаимное расположение трех плоскостей. Пучок плоскостей.....	12
6 Практическое занятие № 6. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Задание прямой двумя общими уравнениями. Углы между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.....	13
7 Практическое занятие № 7. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми.....	15
8 Практическое занятие № 8. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.....	17
9 Практическое занятие № 9. Определение канонического уравнения второй степени. Классификация линий второго порядка. Общее уравнение линий второго порядка.....	19
10 Практическое занятие № 10. Определения эллипса, гиперболы, параболы, их канонические уравнения и свойства. Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.....	21

11 Практическое занятие № 11. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.....	23
12 Практическое занятие № 12. Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Исследование формы поверхности методом параллельных сечений.....	25
13 Практическое занятие № 13. Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Приведение уравнения поверхности к каноническому виду методом собственных векторов.....	26
14 Практическое занятие № 14. Прямолинейные образующие. Приведение к каноническому виду уравнений второй степени, не содержащих произведений переменных.....	28
15 Практическое занятие № 15. Сфера и ее простейшее уравнение. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Эллипсоид вращения. Эллипсоид и его простейшее уравнение.....	29
16 Практическое занятие № 16. Гиперболоиды вращения. Однополостный гиперболоид и его простейшее уравнение. Двуполостный гиперболоид и его простейшее уравнение.....	31
17 Практическое занятие № 17. Параболоид вращения. Эллиптический параболоид и его простейшее уравнение. Гиперболический параболоид и его простейшее уравнение.....	33
Список литературы.....	34

1 Практическое занятие № 1. Декартова прямоугольная система координат. Полярная система координат. Метод координат на плоскости. Основные приложения метода координат на плоскости. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

Вопросы к практическому занятию

- 1 Декартова система координат, единичные векторы, координатная плоскость.
- 2 Декартовы координаты точки.
- 3 Полярная система координат.
- 4 Полярные координаты точки.
- 5 Связь между декартовыми и полярными координатами точки.
- 6 Сущность метода координат на плоскости.
- 7 Уравнение линии на плоскости.
- 8 Формула для нахождения расстояния между двумя точками в декартовой системе координат.
- 9 Формула для нахождения расстояния между двумя точками в полярной системе координат.
- 10 Формулы деления отрезка в данном отношении.
- 11 Формулы для нахождения середины отрезка.
- 12 Формулы для нахождения направляющих косинусов.
- 13 Формула для нахождения площади треугольника с вершинами в заданных точках.
- 14 Условие расположения трех точек на одной прямой.
- 15 Формулы для нахождения координат центра тяжести масс треугольника.

Задачи к практическому занятию

- 1 Даны точки $A(6; -3)$ и $B(9; -7)$. Вычислить расстояние между точками A и B и расстояние от точки B до начала координат.
- 2 Даны точки $A(-1; -3)$ и $B(4; 2)$. Найти направление отрезка AB .
- 3 Найти координаты точки M , делящей отрезок между точками $M_1(-1; 8)$ и $M_2(3; 3)$ в отношении $\lambda = \frac{3}{2}$.
- 4 В точках $A(2; 1)$, $B(-1; 3)$ и $C(-2; 5)$ помещены соответственно массы 50, 20 и 30 г. Определить координаты центра масс этой системы.
- 5 Даны точки $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$ и $C(1; -4)$. Найти площадь треугольника ABC и координаты центра тяжести этого треугольника, полагая его однородным.

6 Дана точка $M(-1; -\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки M .

7 Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $(2; \frac{-2\pi}{3})$.

8 Вычислить длины сторон треугольника, вершины которого находятся в точках $A(1;2)$, $B(-3;4)$, $C(2;-1)$.

9 На оси Ox найти точки B и C , расстояние от которых до точки $A(3;-5)$ равно $5\sqrt{2}$.

10 На оси Oy найти точки B и C , расстояние от которых до точки $P(-2;7)$ равно $\sqrt{68}$.

11 На биссектрисе координатного угла, расположенной в первой и третьей четвертях, найти точки B и C , находящиеся от точки $K(5;-4)$ на расстоянии $\sqrt{101}$.

12 Даны вершины треугольника $A(7;9)$, $B(2;-3)$, $C(3;6)$. Найти точку M пересечения медиан, точку E пересечения биссектрисы AE со стороной BC .

Домашнее задание

1 Даны точки $P(2;-4)$ и $S(3;-9)$. Вычислить расстояние между точками P и S и расстояние от точки P до начала координат.

2 Даны точки $P(1;2)$ и $Q(4;-1)$. Найти направление отрезка PQ .

3 Найти координаты точки M , делящей отрезок между точками $M_1(5;-8)$ и $M_2(-4;9)$ в отношении $\lambda = 1$.

4 В точках $A(-2;1)$, $B(3;7)$ и $C(0;-3)$ помещены соответственно массы 170, 20 и 30 г. Определить координаты центра масс этой системы.

5 Даны точки $A(-2;2)$, $B(-3;5)$ и $C(-8;-2)$. Найти площадь $\triangle ABC$ и координаты центра тяжести этого треугольника, полагая его однородным.

6 Вычислить площадь квадрата, две смежные вершины которого расположены в точках $A(11;-2)$, $B(-1;4)$.

7 Вычислить площадь квадрата, если две противоположные его вершины находятся в точках $A(4;-2)$, $C(-1;3)$.

8 Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2;3)$, $B(3;-4)$, $C(5;1)$.

9 Найти координаты центра тяжести M треугольника, вершины которого находятся в точках $A(13;5)$, $B(4;-3)$, $C(-2;4)$.

2 Практическое занятие № 2. Прямая линия как линия первого порядка. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой

Вопросы к практическому занятию

- 1 Прямая линия как линия первого порядка.
- 2 Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
- 3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
- 4 Уравнение прямой, проходящей через две точки.
- 5 Уравнение прямой в отрезках.
- 6 Нормальное уравнение прямой.

Задачи к практическому занятию

- 1 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 4)$ и составляющей с осью Ox угол $\varphi = 45^\circ$.
- 2 Записать уравнение прямой $y = 2x - 3$ в отрезках и построить ее.
- 3 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; 4)$ и $B(5; 8)$.
- 4 Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой, заданной уравнением $7x - 3y - 21 = 0$.
- 5 Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{2} + \frac{y}{-12} = 1$. Записать общее

уравнение этой прямой.

- 6 Составить уравнение прямой по заданной точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\vec{p}(2; 1)$.
- 7 Составить нормальное уравнение прямой, нормальный вектор которой составляет угол $\varphi = 60^\circ$ с осью Ox , а расстояние от начала координат до прямой составляет 4.
- 8 Описать уравнением множество точек плоскости, равноудаленных от начала координат и от точки $A(-2; 4)$.
- 9 Уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в виде:
 - а) уравнения прямой с угловым коэффициентом;
 - б) уравнения в отрезках;
 - в) нормального уравнения.

10 Определить, при каком значении α прямая $(\alpha^2 - \alpha)x + (2 + \alpha)y - 3\alpha + 1 = 0$:

а) параллельна оси Ox ; б) проходит через начало координат.

11 Найти значение k из условия, что прямая $y = kx + 2$ удалена от начала координат на расстояние $\sqrt{3}$.

Домашнее задание

1 Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{\frac{-1}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$. Записать общее

уравнение этой прямой.

2 Составить нормальное уравнение прямой, нормальный вектор которой составляет угол $\varphi = 135^\circ$ с осью Ox , а расстояние от начала координат до прямой составляет 7.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; 4)$ и $B(3; 8)$.

4 Составить уравнение прямой по точке $M(0; -3)$ и направляющему вектору $\vec{p}(-7; 5)$.

5 Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках и нормальное уравнение для заданных кривых и определить, на каком расстоянии от начала координат они находятся:

а) $3x - 3y + 6 = 0$; б) $x + 2,5 = 0$; в) $y = x - 1$; г) $x + 5y = 0$.

3 Практическое занятие № 3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых

Вопросы к практическому занятию

1 Угол между двумя прямыми.

2 Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

3 Взаимное расположение двух прямых.

4 Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых.

Задачи к практическому занятию

1 Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y = \frac{-5}{3}x - 3$

и $y = \frac{-x}{4} + \frac{7}{4}$.

2 Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x + 3y + 15 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; -5)$ и параллельной прямой $3x + 4y + 12 = 0$.

4 Найти расстояние от точки $M_0(-7; 4)$ до прямой, заданной уравнением $4x - 3y - 15 = 0$.

5 Найти точку пересечения прямых $2x - y - 3 = 0$ и $-3x - y + 2 = 0$.

6 Определить угловой коэффициент прямых:

а) $9x + 3y - 1 = 0$; б) $x - 2y + 5 = 0$; в) $7x - 5y + 1 = 0$.

7 Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox угол:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{4}$;

8 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 4)$ параллельно прямой $y = 5x + 3$.

9 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ перпендикулярно к прямой $y = -3x - 1$.

10 Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $B(1; -6)$ и $C(-5; 4)$.

11 Составить уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k = -2$ и проходящей через точку $P(4; 3)$.

12 Составить уравнение прямой, составляющей с положительным направлением оси Ox угол 30° и проходящей через точку $N(-6; 7)$.

13 При каких значениях α следующие пары прямых параллельны:

а) $2x - 3y + 4 = 0$ и $\alpha x - 6y + 7 = 0$;

б) $\alpha x - 4y + 1 = 0$ и $-2x - 4y + 1 = 0$.

14 Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 20 = 0$ и $6x + 8y + 5 = 0$.

Домашнее задание

1 Вычислить угол, образованный прямыми:

а) $y = 2x - 5$ и $y = -\frac{1}{2}x + 1$; в) $y = 5x + 3$ и $y = \frac{3}{4}x + 7$;

б) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$; г) $y = \frac{3}{4}x - 2$ и $8x + 6y + 5 = 0$.

2 Найти расстояние от точки $C(3; 3)$ до прямой, заданной уравнением $4x + 3y - 9 = 0$.

3 Найти координаты точки пересечения прямых $y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{2}$ и $y = 3x - 6$.

4 Найти длину высоты треугольника с вершинами в точках

$A\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $B\left(1; \frac{5}{3}\right)$, $C(3; 3)$, опущенной из вершины A .

5 Вершины треугольника находятся в точках $A(5; 6)$, $B(-1; 12)$, $C(1; 0)$.

Составить уравнение высоты этого треугольника, опущенной из вершины B .

6 При каких значениях α следующие пары прямых перпендикулярны:

а) $4x + y - 6 = 0$ и $3x - \alpha y - 2 = 0$;

б) $x - \alpha y + 5 = 0$ и $2x + 3y + 3 = 0$.

7 Найти расстояние между прямыми $2x - 3y + 8 = 0$ и $4x - 6y = 10$.

4 Практическое занятие № 4. Общее уравнение плоскости. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Вопросы к практическому занятию

1 Уравнение поверхности.

2 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

3 Нормальный вектор плоскости.

4 Общее уравнение плоскости.

5 Частные случаи общего уравнения плоскости.

6 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

7 Уравнение плоскости в отрезках на осях.

8 Нормальное уравнение плоскости.

9 Расстояние от точки до плоскости.

10 Проекция точки на плоскость.

Задачи к практическому занятию

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4; 5; -6)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (-1; -2; 3)$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1; 4; -9)$, $M_2(2; 5; -7)$, $M_3(-3; 6; -8)$.

3 Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $2x - 9y + 3z - 54 = 0$ на координатных осях.

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -2; 3)$ и $M_2(0; 2; 5)$ параллельной оси Oy .

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и проходящей через ось Oz .

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 2; 3)$ параллельно двум данным векторам $\vec{a} = (6; -8; 10)$ и $\vec{b} = (4; -3; 5)$.

7 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (3; -4; 5)$.

8 Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$.

9 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 5; 4)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -6$, а на оси аппликат отрезок $c = 3$.

10 Найти проекцию B точки $A(5; 2; -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

11 Найти расстояние от точки $M_0(7; -8; 3)$ до плоскости $x + 2y - z - 12 = 0$.

12 Найти расстояние между плоскостью $2x + 3y + 8z + 6 = 0$ и точкой $M(1; 8; 5)$.

Домашнее задание

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3; -2; 1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (1; -3; -7)$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и проходящей через ось Oz .

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-3; 5; -8)$, $M_2(5; -7; 1)$, $M_3(-5; 4; -1)$.

4 Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $2x - 4y + 3z - 12 = 0$ на координатных осях.

5 Найти проекцию B точки $A(5; 2; -1)$ на прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+11}{4} = \frac{z-2}{5}$.

6 Найти расстояние от точки $M_1(6; 4; -1)$ до плоскости $2x - y - 2z + 15 = 0$.

7 Найти расстояние между плоскостью $x - 4y + 4z - 8 = 0$ и точкой $M(0; -3; 2)$.

5 Практическое занятие № 5. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Взаимное расположение трех плоскостей. Пучок плоскостей

Вопросы к практическому занятию

- 1 Угол между плоскостями.
- 2 Условие перпендикулярности двух плоскостей.
- 3 Условие параллельности двух плоскостей.
- 4 Взаимное расположение трех плоскостей.
- 5 Пучок плоскостей.

Задачи к практическому занятию

- 1 Найти величину острого угла между плоскостями $2x + 6y - 7z - 3 = 0$ и $x + 3y - z + 2 = 0$.
- 2 Определить, являются ли плоскости $2x + 3y - 4z + 4 = 0$ и $5x - 2y + z - 3 = 0$ перпендикулярными.
- 3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ параллельно плоскости $3x - 4y + 5z + 6 = 0$.
- 4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; -3; 2)$ параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(0; -2; -1)$, $M_2(1; -3; 4)$, $M_3(1; 1; -1)$.
- 5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -4; -3)$ перпендикулярно к плоскостям $2x + y - 3z + 5 = 0$ и $x + 4y + 6z - 1 = 0$.
- 6 Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x - 2y + 2z + 5 = 0$ и удаленной от точки $M(3; 4; -2)$ на расстояние $d = 5$.
- 7 Найти расстояние между параллельными плоскостями $x + y - z - 2 = 0$ и $2x + 2y - 2z + 5 = 0$.
- 8 Найти расстояние от точки $M_0(5; 4; -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0; 4; 0)$, $M_2(0; 4; -3)$, $M_3(3; 0; 3)$.
- 9 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; 3; 0)$ и $M_2(2; 4; -1)$, перпендикулярно плоскости $x - 2y + 3z - 10 = 0$.

Домашнее задание

1 Найти величину острого угла между плоскостями $x - y - \sqrt{2}z - 7 = 0$ и $x + y + \sqrt{2}z + 5 = 0$.

2 Определить, являются ли плоскости $5x - 3y - 4z + 3 = 0$ и $-7x - y + 5z - 3 = 0$ перпендикулярными.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; -1; 2)$ и параллельной плоскости $2x - 3y + 7z - 11 = 0$.

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 4)$ перпендикулярно к плоскостям $2x + 3y - 5z + 6 = 0$ и $3x + 4y - 3z - 5 = 0$.

5 Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $2x - 3y + 6z + 42 = 0$.

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку $M(2; 1; -1)$ перпендикулярно плоскости $2x - z = 0$.

6 Практическое занятие № 6. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Задание прямой двумя общими уравнениями. Углы между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Вопросы к практическому занятию

- 1 Канонические уравнения прямой.
- 2 Параметрические уравнения прямой.
- 3 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
- 4 Общее уравнение прямой в пространстве.
- 5 Направляющий вектор прямой.
- 6 Угол между прямыми.
- 7 Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Задачи к практическому занятию

1 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1; 0; 5)$ и образующей с осями координат углы $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

2 Составить канонические и параметрические уравнения прямой,

проходящей через точку $M_0(2; -3; 5)$ и образующей с осями координат углы $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1; 0; 5)$ и параллельной прямой $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{-2}$.

4 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(-1; 0; 5)$ и $M_1(2; -3; 4)$.

5 Найти направляющие косинусы прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2,5}{0} = \frac{z-1}{-4}$.

6 Составить канонические уравнения прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$$

7 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; 2; -5)$ и перпендикулярной к плоскости $4x - y + 3z - 10 = 0$.

8 Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 5 = 0, \\ x + 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x - y + 2z - 3 = 0$.

9 Найти расстояние от точки $M_1(8; 5; 4)$ до прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$.

10 Общее уравнение прямой $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить величины углов, образованных этой прямой с координатными осями.

ническому виду и определить величины углов, образованных этой прямой с координатными осями.

Домашнее задание

1 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(7; 1; 6)$ и $M_2(2; -3; 4)$.

2 Составить канонические уравнения прямой, заданной уравнениями:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + y - z + 5 = 0, \\ 2x + y + 2z + 3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + y - z + 5 = 0, \\ 2x + y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

3 Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(5; 1; -4)$ и $B(6; 1; -3)$, и плоскостью $2x - 2y + z - 3 = 0$.

4 Найти расстояние от точки $M_1(9;6;5)$ до прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{1}$.

5 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;-7)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (4;-6;5)$.

6 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1;-1;2)$ и пересекающей ось Oz под прямым углом.

7 Найти точки пересечения прямой $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{5}$ с координатными плоскостями.

7 Практическое занятие № 7. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Вопросы к практическому занятию

- 1 Условие параллельности двух прямых в пространстве.
- 2 Условие перпендикулярности двух прямых в пространстве.
- 3 Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
- 4 Кратчайшее расстояние между двумя прямыми.

Задачи к практическому занятию

1 Найти величину острого угла между прямыми $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}$

$$\text{и } \begin{cases} x - y + 2z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

2 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;0;5)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

3 Исследовать взаимное расположение двух прямых, заданных уравнениями $\begin{cases} x = 1 - 9t, \\ y = 2 + 8t, \\ z = 3 - 7t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 6 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \\ z = 4 + t. \end{cases}$

4 Установить взаимное расположение прямых $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$

$$\text{и } \begin{cases} x = 5 - 8t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$$

5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; -1; 5)$ и перпендикулярной к прямым $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{4}$.

6 Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости xOy и проходящей через точку $M_0(2; 3; 0)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{-1}$.

7 Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x-1}{5} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{4}$ и $\frac{x-9}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}$.

8 Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$ и выяснить, являются ли они пересекающимися или скрещивающимися.

9 Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ 3x - 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + 2z + 4 = 0. \end{cases}$

10 Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$ и $\frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

Домашнее задание

1 Найти величину острого угла между прямыми $\frac{x}{11} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}$.

2 Найти величину острого угла между прямыми $\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 2x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$

3 Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{1}$.

4 При каком значении переменной a прямые $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$
и $L_2: \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ пересекаются?

5 Исследовать взаимное расположение прямых $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$
и $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+4}{1}$.

6 Найти угол между прямыми $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z-1=0, \\ 3x-y-z+3=0. \end{cases}$

7 Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x-1}{5} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{4}$
и $\frac{x-9}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}$. Найти расстояние между ними.

8 Практическое занятие № 8. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Вопросы к практическому занятию

- 1 Угол между прямой и плоскостью.
- 2 Условия параллельности прямой и плоскости.
- 3 Условия перпендикулярности прямой и плоскости.
- 4 Координаты точки пересечения прямых.
- 5 Условие, при котором прямая лежит в плоскости.

Задачи к практическому занятию

1 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; 2; -5)$ и перпендикулярной к плоскости $4x - y + 3z - 10 = 0$.

2 Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 5 = 0, \\ x + 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x - y + 2z - 3 = 0$.

3 Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости:

$$а) \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 6 - 4t \end{cases} \text{ и } x + y + z - 3 = 0.$$

б) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ и $3x + y - 4z - 15 = 0$;

в) $\begin{cases} x - y + 4z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ и $3x + y + 6z - 12 = 0$.

4 Проверить, лежит ли прямая $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ в плоскости $x - y + z - 6 = 0$.

5 Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3;4;5)$ относительно плоскости $x - 2y + z - 6 = 0$.

6 Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x - 2y - 2z - 3 = 0$.

7 Найти координаты проекции точки $M(2;2;-2)$ на плоскость $3x - y + z - 13 = 0$.

8 При каком значении m прямая $\frac{x+10}{m} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x - 3y + 4z - 1 = 0$?

9 Найти расстояние от точки $M(3;5;5)$ до прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$.

10 Найти расстояние между прямыми $\frac{x-9}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$.

Домашнее задание

1 Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ и плоскостью $2x + 3y - 6z + 2 = 0$.

2 Найти величину угла между прямой, проходящей через точки $A(5;1;-4)$ и $B(6;1;-3)$, и плоскостью $2x - 2y + z - 3 = 0$.

3 Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(2;8;0)$ относительно плоскости $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

4 Найти величину острого угла между прямой $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + 2z - 5 = 0$.

5 Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости:

$$а) \begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ и } 5x - 6y + 2z - 10 = 0;$$

$$б) \frac{x}{2} = \frac{y+13}{17} = \frac{z+7}{13} \text{ и } 5x - z = 4.$$

6 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{7}$ лежит в плоскости $2x - y + Cz + D = 0$?

9 Практическое занятие № 9. Определение канонического уравнения второй степени. Классификация линий второго порядка. Общее уравнение линий второго порядка

Вопросы к практическому занятию

- 1 Определение канонического уравнения второй степени.
- 2 Классификация линий второго порядка.
- 3 Общее уравнение линий второго порядка.

Задачи к практическому занятию

1 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями (построить их на чертеже):

- а) $x^2 - xy = 0$;
- б) $xy + y^2 = 0$;
- в) $x^2 - y^2 = 0$;
- г) $xy^2 - 8xy + 15 = 0$;
- д) $y^2 + 5y + 4 = 0$;
- е) $x^2y - 7xy + 10y = 0$;
- ж) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$;
- з) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
- и) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$;
- к) $x^2 + (y + 3)^2 = 1$;
- л) $x^2 + 2y^2 = 0$;

2 Даны линии. Определить, какие из них проходят через начало координат:

- а) $x + y = 0$;
- б) $x - y = 0$;
- в) $x^2 + y^2 - 36 = 0$;
- г) $x^2 + y^2 - 2x = 0$;
- д) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$.

3 Найти точки пересечения двух линий:

- а) $x^2 + y^2 = 8, x - y = 0$;
 б) $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 18 = 0, x + y = 0$;
 в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0, x^2 + y^2 = 25$;
 г) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 40 = 0, x^2 + y^2 = 4$.

4 Вывести уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от координатных осей.

5 Вывести уравнение геометрического места точек, находящихся на расстоянии a от оси Oy .

6 Вывести уравнение геометрического места точек, находящихся на расстоянии b от оси Ox .

7 Из точки $P(6; -8)$ проведены всевозможные лучи до пересечения с осью абсцисс. Составить уравнение геометрического места их середин.

8 Из точки $C(10; -3)$ проведены всевозможные лучи до пересечения с осью ординат. Составить уравнение геометрического места их середин.

9 Составить уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний которых до точек $A(-a; 0)$ и $B(a; 0)$ равна c .

10 Дано уравнение окружности $x^2 + y^2 = 25$. Составить уравнение геометрического места середин тех хорд этой окружности, длина которых равна 8.

Домашнее задание

1 Вывести уравнение геометрического места точек, для которых кратчайшие расстояния до двух данных окружностей $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, $(x - 3)^2 + y^2 = 81$ равны между собой.

2 Вывести уравнение геометрического места точек, для которых кратчайшие расстояния до двух данных окружностей $(x - 10)^2 + y^2 = 289$, $(x - 10)^2 + y^2 = 1$, равны между собой.

3 Вывести уравнение геометрического места точек, для которых кратчайшие расстояния до данной окружности $(x - 5)^2 + y^2 = 9$, и до данной прямой $x + 2 = 0$ равны между собой.

4 Прямая перпендикулярна полярной оси и отсекает на ней отрезок, равный 3. Составить уравнение этой прямой в полярных координатах.

5 Окружность радиусом $R = 5$ проходит через полюс, её центр лежит на полярной оси. Составить уравнение этой окружности в полярной системе координат.

10 Практическое занятие № 10. Определения эллипса, гиперболы, параболы, их канонические уравнения и свойства. Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

Вопросы к практическому занятию

- 1 Определения эллипса, гиперболы, параболы, их канонические уравнения и свойства.
- 2 Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы.
- 3 Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы.
- 4 Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.
- 5 Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.

Задачи к практическому занятию

- 1 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = +\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$;

в) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$;

б) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$;

г) $y = +\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

- 2 Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти:

а) его полуоси;

в) фокусы;

б) эксцентриситет;

г) уравнения директрис.

- 3 Вычислить площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2 + 5y^2 = 1$, две другие совпадают с концами его малой оси.

- 4 Вычислить расстояние от фокуса $F(c; 0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

до односторонней с этим фокусом директрисы.

- 5 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$;

в) $y = -3\sqrt{x^2+1}$;

б) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2+9}$;

г) $y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

- 6 Дана точка $M_1(10; -\sqrt{5})$ на гиперболе $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Составить уравнения

прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M_1 .

7 Убедившись, что точка $M_1(-5; \frac{9}{4})$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,

определить фокальные радиусы точки M_1 .

8 Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 2$, фокальный радиус её точки M , проведённый из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

9 Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 3$, расстояние от точки M гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

10 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $A(9; 6)$;

б) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1; 3)$;

в) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $C(1; 1)$;

г) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $D(4; -8)$.

11 Составить уравнение параболы, которая имеет фокус $F(0; -3)$ и проходит через начало координат, зная, что её осью служит ось Oy .

12 Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

13 Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.

Домашнее задание

1 Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

а) его полуоси;

в) фокусы;

б) эксцентриситет;

г) уравнения директрис.

2 Вычислить площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

3 Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние которых до правого фокуса равно 4,5.

4 Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

5 Через левый фокус гиперболы $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ проведён перпендикуляр к её оси, содержащей вершины. Определить расстояния от фокусов до точек пересечения этого перпендикуляра с гиперболой.

6 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = + 2\sqrt{x}$;	г) $y = + \sqrt{-x}$;	ж) $y = - 3\sqrt{-2x}$;
б) $y = -2\sqrt{x}$;	д) $x = + \sqrt{5y}$;	з) $x = - 5\sqrt{-y}$.
в) $x = -\sqrt{3y}$;	е) $x = + 4\sqrt{-y}$;	

Изобразить эти линии на чертеже.

7 Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.

8 На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

11 Практическое занятие № 11. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

Вопросы к практическому занятию

- 1 Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы.
- 2 Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.
- 3 Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.

Задачи к практическому занятию

1 Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить его полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

- а) в левом фокусе эллипса; б) в правом фокусе.

2 Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Составить полярное уравнение её правой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

- а) в правом фокусе гиперболы; б) в левом фокусе.

3 Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Составить полярное уравнение её левой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

- а) в левом фокусе гиперболы; б) в правом фокусе.

4 Дано уравнение параболы $y^2 = 6x$. Составить её полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.

5 Определить, какие линии даны следующими уравнениями в полярных координатах:

$$\text{а) } \rho = \frac{5}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta}; \quad \text{в) } \rho = \frac{6}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta}; \quad \text{д) } \rho = \frac{10}{1 - \frac{3}{2} \cos \theta};$$

$$\text{б) } \rho = \frac{12}{2 - \cos \theta}; \quad \text{г) } \rho = \frac{5}{3 - 4 \cos \theta}; \quad \text{е) } \rho = \frac{1}{3 - 3 \cos \theta}.$$

6 Установить, что уравнение $\rho = \frac{144}{13 - 5 \cos \theta}$ определяет эллипс, и найти его полуоси.

7 Установить, что уравнение $\rho = \frac{18}{4 - 5 \cos \theta}$ определяет правую ветвь гиперболы и найти ей полуоси.

8 Установить, что уравнение $\rho = \frac{21}{5 - 2 \cos \theta}$ определяет эллипс, и составить полярные уравнения его директрис.

9 Установить, что уравнение $\rho = \frac{16}{3 - 5 \cos \theta}$ определяет правую ветвь гиперболы, и составить полярные уравнения директрис и асимптот этой гиперболы.

Домашнее задание

1 На эллипсе $\rho = \frac{12}{3 - \sqrt{2} \cos \theta}$ найти точки, полярный радиус которых равен 6.

2 На гиперболе $\rho = \frac{15}{3 - 4 \cos \theta}$ найти точки, полярный радиус которых равен 3.

3 На параболе $\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$ найти точки с наименьшим полярным радиусом и с полярным радиусом, равным параметру параболы.

4 Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Составить его полярное уравнение при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре эллипса.

5 Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Составить её полярное уравнение при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре гиперболы.

12 Практическое занятие № 12. Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Исследование формы поверхности методом параллельных сечений

Вопросы к практическому занятию

1 Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению.

2 Исследование формы поверхности методом параллельных сечений.

Задачи к практическому занятию

1 Исследовать сечения эллипсоида $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ плоскостями $z = 0$, $z = \pm 1$, $x = 0$ и $y = 0$.

2 Исследовать форму и расположение относительно системы координат поверхности $4 - z = x^2 + y^2$.

3 Показать, что уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ определяет однополостный гиперболоид вращения вокруг оси Ox .

4 Какую поверхность определяет уравнение $2x^2 - y^2 + 2x^2 + 4z + 2y + 8z + 8 = 0$?

5 Найти точки пересечения эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$ с прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$.

6 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$.

7 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Домашнее задание

1 Исследовать сечения эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ плоскостями $z = 0$, $x = \pm 1$ и $y = 0$.

2 Исследовать форму и расположение относительно системы координат поверхности $9 - y = x^2 + z^2$.

3 Показать, что уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{2} = 1$ определяет однополостный гиперболоид вращения вокруг оси Oy .

4 Какую поверхность определяет уравнение $x^2 - y^2 + x^2 + 4x + 2y + 2z = 0$?

5 Найти точки пересечения эллипсоида $4x^2 + 8y^2 + 16z^2 = 16$ с прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{1}$.

6 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1$.

7 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$.

13 Практическое занятие № 13. Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Приведение уравнения поверхности к каноническому виду методом собственных векторов

Вопросы к практическому занятию

1 Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению.

2 Приведение уравнения поверхности к каноническому виду методом собственных векторов.

Задачи к практическому занятию

1 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $2x^2 - 4y^2 - z^2 - 6x + 8y + 1 = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

2 Определить тип поверхности второго порядка $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

3 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

4 Определить тип поверхности второго порядка $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ методом собственных векторов и привести к

каноническому виду.

5 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + 3y^2 - z^2 - 6y - z + 1 = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

6 Определить тип поверхности второго порядка $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 18z - 14 = 0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

7 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

8 Определить тип поверхности второго порядка $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

9 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

10 Определить тип поверхности второго порядка $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

Домашнее задание

1 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

2 Определить тип поверхности второго порядка $z^2 - 3x - 4y - 5 = 0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

3 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + y^2 + 2xy - z + 1 = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

4 Определить тип поверхности второго порядка $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2z - 1 = 0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

5 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

6 Определить тип поверхности второго порядка $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

14 Практическое занятие № 14. Прямолинейные образующие. Приведение к каноническому виду уравнений второй степени, не содержащих произведений переменных

Вопросы к практическому занятию

1 Прямолинейные образующие.

2 Приведение к каноническому виду уравнений второй степени, не содержащих произведений переменных

Задачи к практическому занятию

1 Убедившись, что точка $M(1; 3; 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $4x^2 - z = y$, составить уравнения его прямолинейных образующих, проходящих через M .

2 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, параллельных плоскости $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

3 Убедившись, что точка $A(-2; 0; 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, определить острый угол, образованный его прямолинейными образующими, проходящими через A .

4 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 0$ к каноническому виду и определить тип поверхности.

5 Определить тип поверхности второго порядка $z^2 - 3x - 4y - 5 = 0$ и привести к каноническому виду.

6 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $3x^2 + 6x - 8y + 6z - 7 = 0$ к каноническому виду и определить тип поверхности.

7 Определить тип поверхности второго порядка $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ и привести к каноническому виду.

Домашнее задание

1 Убедившись, что точка $A(1; 3; 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $4y^2 - x = z$, составить уравнения его прямолинейных образующих, проходящих через A .

2 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, параллельных плоскости $x - 2y + z - 5 = 0$.

3 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными к каноническому виду $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$ и определить тип поверхности.

4 Определить тип поверхности второго порядка $4x^2 - y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$ и привести к каноническому виду.

5 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + 3y^2 - z^2 - 6y - z + 1 = 0$ к каноническому виду и определить тип поверхности.

15 Практическое занятие № 15. Сфера и ее простейшее уравнение. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Эллипсоид вращения. Эллипсоид и его простейшее уравнение

Вопросы к практическому занятию

- 1 Сфера и ее простейшее уравнение.
- 2 Цилиндрические поверхности.
- 3 Конические поверхности.
- 4 Эллипсоид вращения.
- 5 Эллипсоид и его простейшее уравнение.

Задачи к практическому занятию

- 1 Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев:
 - а) сфера имеет центр $C(0; 0; 0)$ и радиус $r = 9$;
 - б) сфера проходит через начало координат и имеет центр $C(4; -4; -2)$;
 - в) сфера проходит через точку $A(2; -1; -3)$ и имеет центр $C(3; -2; 1)$;
 - г) точки $A(2; -3; 5)$ и $B(4; 1; -3)$ являются концами одного из диаметров сферы.
- 2 Составить уравнение сферы радиуса $r = 3$, касающейся плоскости $x + 2y + 2z + 3 = 0$ в точке $M_1(1; 1; -3)$.
- 3 Вычислить радиус R сферы, которая касается плоскостей $3x + 2y - 6z - 15 = 0$, $3x + 2y - 6z + 55 = 0$.
- 4 Составить уравнение сферы с центром $C(2; 3; -1)$, которая отсекает от прямой $\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$ хорду, имеющую длину, равную 16.
- 5 Установить, как расположена точка $A(2; -1; 3)$ относительно каждой из следующих сфер внутри, вне или на поверхности:
 - а) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$;
 - б) $(x + 14)^2 + (y - 11)^2 + (z + 12)^2 = 625$;
 - в) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 25$;
 - г) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 22 = 0$;
 - д) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z - 3 = 0$.

6 Составить уравнения линии пересечения плоскости Oxz и сферы с центром в начале координат и радиусом, равным 3.

7 Составить уравнения линии пересечения сферы, центр которой находится в начале координат и радиус равен 5, с плоскостью, параллельной плоскости Oxz и лежащей в левом полупространстве на расстоянии двух единиц от неё.

8 Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ по эллипсу, найти его полуоси и вершины.

9 Доказать, что эллипсоид $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1$ имеет одну общую точку с плоскостью $4x - 3y + 12z - 54 = 0$, и найти её координаты.

10 Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oy .

11 Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(3; -1; -2)$, а направляющая дана уравнениями $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

12 Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, образующие которого касаются сферы $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

13 Составить уравнение конуса с вершиной в точке $S(3; 0; -1)$, образующие которого касаются эллипсоида $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$.

Домашнее задание

1 Составить параметрические уравнения диаметра сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$, перпендикулярного к плоскости $5x - y + 2z - 17 = 0$.

2 Составить канонические уравнения диаметра сферы $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + z - 13 = 0$, параллельного прямой $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -3t + 5, \\ z = 4t + 7. \end{cases}$

3 Составить уравнения линии пересечения плоскости Oyz и сферы, центр которой находится в точке $C(5; -2; 1)$ и радиус равен 13.

4 Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ вокруг оси Ox .

5 Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

6 Составить уравнение конуса с вершиной в точке $(0; 0; c)$, направляющая которого дана уравнениями $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

7 Цилиндр, образующие которого перпендикулярны к плоскости $x + y - 2z - 5 = 0$, описан около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Составить уравнение этого цилиндра.

8 Ось Oz является осью круглого конуса с вершиной в начале координат, точка $M_1(3; -4; 7)$ лежит на его поверхности. Составить уравнение этого конуса.

9 Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\vec{a} = (2; -3; 4)$, а направляющая дана уравнениями $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$

10 Составить уравнение цилиндра, направляющая которого дана уравнениями $\begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

16 Практическое занятие № 16. Гиперболоиды вращения. Однополостный гиперболоид и его простейшее уравнение. Двуполостный гиперболоид и его простейшее уравнение

Вопросы к практическому занятию

- 1 Гиперболоиды вращения.
- 2 Однополостный гиперболоид и его простейшее уравнение.
- 3 Двуполостный гиперболоид и его простейшее уравнение.

Задачи к практическому занятию

1 Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гиперболе; найти её полуоси и вершины.

2 Доказать, что двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ имеет одну общую точку с плоскостью $5x + 2z + 5 = 0$, и найти её координаты.

3 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ вокруг оси } Oz.$$

4 Доказать, что двуполостный гиперboloид, определяемый уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, может быть получен в результате вращения гиперболы вокруг оси Oz и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости Oxz .

5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

6 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ вокруг оси } Oy.$$

Домашнее задание

1 Установить, что плоскость $x - 1 = 0$ пересекает однополостный гиперboloид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гиперболе; найти её полуоси и вершины.

2 Доказать, что двуполостный гиперboloид $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ имеет одну общую точку с плоскостью $2x + 5z - 3 = 0$, и найти её координаты.

3 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{14} - \frac{z^2}{6} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ вокруг оси } Oz.$$

4 Доказать, что двуполостный гиперboloид, определяемый уравнением $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{25} = -1$, может быть получен в результате вращения гиперболы вокруг оси Oz и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости Oxz .

5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{49} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ вокруг оси } Ox.$$

6 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{49} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ вокруг оси } Oy.$$

17 Практическое занятие № 17. Параболоид вращения. Эллиптический параболоид и его простейшее уравнение. Гиперболический параболоид и его простейшее уравнение

Вопросы к практическому занятию

- 1 Параболоид вращения.
- 2 Эллиптический параболоид и его простейшее уравнение.
- 3 Гиперболический параболоид и его простейшее уравнение.

Задачи к практическому занятию

1 Установить, что плоскость $y + 6 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 6z$ по параболе; найти её параметр и вершину.

2 Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = z$ плоскостью $3x - 3y + 4z + 2 = 0$, и найти её центр.

3 Доказать, что эллиптический параболоид $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 2y$ имеет одну общую точку с плоскостью $2x - 2y - z - 10 = 0$, и найти её координаты.

4 Доказать, что эллиптический параболоид, определяемый уравнением
$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$
 может быть получен в результате вращения параболы
$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Oz и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости Oxz .

5 Доказать, что уравнение $z = xy$ определяет гиперболический параболоид.

6 Показать, что плоскость $x - 1 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 2z$ по параболе; найти её параметр и вершину.

Домашнее задание

1 Установить, что плоскость $z + 2 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = z$ по параболе; найти её параметр и вершину.

2 Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 2z$ плоскостью $x - y + 3z + 1 = 0$, и найти её центр.

3 Доказать, что эллиптический параболоид $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 8y$ имеет одну общую точку с плоскостью $4x - 3y - 2z + 6 = 0$, и найти её координаты.

4 Доказать, что эллиптический параболоид, определяемый уравнением $\begin{cases} \frac{z^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ может быть получен в результате вращения параболы $\begin{cases} x^2 = z, \\ y = 0 \end{cases}$

вокруг оси Oz и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости Oxz .

5 Доказать, что уравнение $x = uz$ определяет гиперболический параболоид.

6 Показать, что плоскость $y + 8 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 2y$ по параболе; найти её параметр и вершину.

Список литературы

1 **Бортаковский, А. С.** Аналитическая геометрия в примерах и задачах: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – 2-е изд., стер. – Москва: ИНФРА-М, 2016. – 496 с.

2 **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – Москва: ИНФРА-М, 2015. – 352 с.

3 **Ефимов, Н. В.** Краткий курс аналитической геометрии: учебник / Н. В. Ефимов. – 14-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 585 с.

4 Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – 7-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

5 Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие / Под ред. Ю. М. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Логос, 2005. – 369 с.