МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

РЯД ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Могилев 2020

УДК 517.5
ББК 22.161.5
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» сентября 2020 г., протокол № 1

Составители: Т. Ю. Орлова;
А. А. Романенко

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по темам «Ряд Фурье», «Интеграл Фурье». «Операционное исчисление», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор Т. А. Рыжикова

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Периодические функции и периодические колебания

Периодические процессы (колебания) – это процессы, которые повторяются через определённые промежутки времени (периоды), встречаются в радиотехнике, электронике, связи и т. п. Такие процессы описываются периодическими функциями того же периода.

Если для функции $f(t)$ выполняется равенство $f(t)=f(t\pm T)=$ $=f(t\pm 2T)=\ldots=f(t\pm nT)$ для любых t $(n\in N)$, то она называется периодической периода T. В качестве примера, на рисунке 1 изображён график периодической функции периода $T=2$.

Приведем необходимые в дальнейшем некоторые свойства периодических функций.

1 Если $f(t)$ интегрируемая и имеет период T, то

$$\int_a^{a+T} f(t)dt=\int_b^{b+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt,$$

где a и b – любые числа.

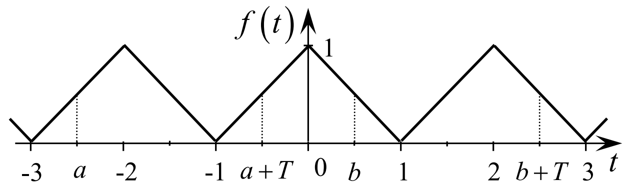

Рисунок 1

Данное свойство легко доказывается исходя из геометрического смысла определенного интеграла, равенства соответствующих площадей (рисунок 1).

2 Если $f(t)=f(t\pm nT)$, т. е. функция $f(t)$ – периодическая периода T, то функция $f(\alpha t+\beta)$ имеет период T', который связан с периодом T функции $f(t)$ соотношением $T'=\dfrac{T}{\alpha}$, где $\alpha\neq 0$, $\alpha\in R$. Так, например, функция $y=\sin t$ имеет период $T=2\pi$, а функции $y=\sin 2t$ и $y=\sin 0{,}5t$ имеют периоды $T'=\pi$ и $T'=4\pi$ соответственно (рисунок 2).

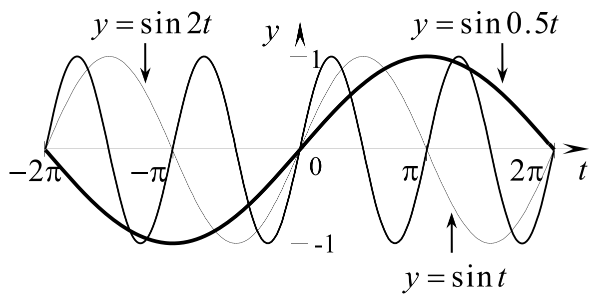

Рисунок 2

3 Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих период T, есть периодическая функция периода T.

Простейшие периодические функции есть тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$, а колебания, которые они описывают, называют гармоническими или гармоническим процессом. Этот процесс описывается функциями более общего вида:

$$y=A\cos(\omega t+\varphi_0); \tag{1}$$

$$y=A\sin(\omega t+\varphi_0). \tag{2}$$

При этом A называют амплитудой колебаний, $(\omega t+\varphi_0)$ – фазой колебаний, φ_0 – начальной фазой, ω – циклической частотой колебаний, которая связана с частотой колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ соотношением $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Период функций (1), (2) есть $T = \frac{2\pi}{\omega}$, поскольку $\sin t$ и $\cos t$ имеют период $T = 2\pi$.

Функции вида (1) и (2) называют простыми гармониками. Используя формулы тригонометрии

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

формулы (1) и (2) можно записать иначе, а именно:

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos\omega t\cos\varphi_0 - A\sin\omega t\sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \qquad (3)$$

где $a = A\cos\varphi_0$, $b = -A\sin\varphi_0$ – числа, при этом $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{b}{a}$;

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0 = c\sin\omega t + d\cos\omega t, \qquad (4)$$

где $c = A\cos\varphi_0$, $d = A\sin\varphi_0$ – числа, при этом $A = \sqrt{c^2 + d^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{d}{c}$.

Таким образом, простое гармоническое колебание описывается функциями вида (1), (3) или (2), (4).

Теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что сложное гармоническое колебание представляет собой результат наложения конечного или бесконечного числа простых гармоник вида (1), (3) или (2), (4) разных периодов (частот) и амплитуд.

2 Ортогональные системы функций

Скалярным произведением двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется число, равное значению интеграла и обозначаемое $(\varphi(x),\psi(x))$:

$$(\varphi(x),\psi(x)) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a,b]$, если их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$(\varphi(x),\psi(x)) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Так, например, функции $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x^2$ ортогональны на $[-1;1]$. Действительно $(\varphi(x),\psi(x)) = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(1^4 - (-1)^4\right) = \frac{1}{4}(1-1) = 0$.

Система функций $\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$ (конечная или бесконечная) называется ортогональной на отрезке $[a,b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на $[a,b]$, т. е.

$$\left(\varphi_n(x),\varphi_m(x)\right)=\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0 \qquad \text{для любых } n\neq m \quad (n,m\in N).$$

Примеры ортогональных систем функций. Система функций вида

$$\left\{1,\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{3\pi x}{l},\cos\frac{3\pi x}{l},\ldots,\sin\frac{n\pi x}{l},\cos\frac{n\pi x}{l},\ldots\right\}=$$

$$=\left\{1,\sin\frac{n\pi x}{l},\cos\frac{n\pi x}{l}\right\}\ \left(n=\overline{1,\infty}\right) \tag{5}$$

называется основной тригонометрической системой функций ортогональных на промежутке $[-l,l]$, где l – любое число, $n=1,2,\ldots$ Докажем их попарную ортогональность.

Для $\left(1,\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\int_{-l}^{l}1\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0$ для любых $(\forall)$ $n=0,1,2,\ldots$ в силу нечетности подынтегральной функции и симметрии пределов интегрирования.

Для $\left(1,\cos\frac{n\pi x}{l}\right)$ при $n=0$, $\cos\frac{0\pi x}{l}=\cos 0=1$ имеем

$$(1,1)=\int_{-l}^{l}(1\cdot 1)dx=\int_{-l}^{l}dx=x\big|_{-l}^{l}=\left(l-(-l)\right)=2l.$$

При $n\neq 0$, $(n=1,2,3,\ldots)$ скалярное произведение

$$\left(1,\cos\frac{n\pi x}{l}\right)=\int_{-l}^{l}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l}=\frac{l}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi l}{l}-\sin\frac{n\pi(-l)}{l}\right)=\frac{2l}{n\pi}\sin n\pi=0.$$

Таким образом, получили $\int_{-l}^{l}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & \text{для } \forall n\neq 0,\\ 2l, & \text{для } n=0.\end{cases}$

Аналогично $\left(\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0$ для $\forall n=0,1,2,\ldots.$

Далее

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos(n+m)\frac{\pi x}{l}+\cos(n-m)\frac{\pi x}{l}\right)dx=\ldots=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ l, & n=m.\end{cases}$$

$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\ldots=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ l, & n=m.\end{cases}$ (получить самостоятельно).

Системы функций вида

$$\left\{1,\cos\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\cos\frac{3\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\ldots\right\}=\left\{\cos\frac{n\pi x}{l}\right\} \quad n=0,1,2,\ldots \tag{6}$$

и вида

$$\left\{\sin\frac{\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{3\pi x}{l},\ldots,\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right\}=\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}\quad n=1,2,\ldots \tag{7}$$

ортогональны на промежутке $[0,l]$, где l – любое число (убедиться самостоятельно).

3 Обобщенные ряды Фурье по ортогональным системам функций

Пусть система функций $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots\}=\{\varphi_n(x)\}$ ортогональная на $[a,b]$ $\left(n\in N,\ n=\overline{0,\infty}\right)$ и на $[a,b]$ задана некоторая функция $f(x)$.

Выражение

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x) \tag{8}$$

называется обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ $\left(n\in N,\ n=\overline{0,\infty}\right)$ на $[a,b]$, где c_n – действительные числа называемые коэффициентами ряда. Тогда возникает вопрос: как найти коэффициенты ряда (8), т. е. c_n? Ответ. Умножая поочередно левую и правую части (8) на $\varphi_n(x)$ $\left(n=\overline{0,\infty}\right)$ и интегрируя от a до b с учетом, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональна на $[a,b]$, получаем значение c_n $\left(n=\overline{0,\infty}\right)$. Действительно,

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=c_0\int_a^b\varphi_0(x)\varphi_n(x)dx+c_1\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_n(x)dx+$$

$$+c_2\int_a^b\varphi_2(x)\varphi_n(x)dx+\ldots+c_n\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_n(x)dx+\ldots$$

С учетом того, что $\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0\ \ (n\neq m)$, получаем

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=c_0 0+c_1 0+c_2 0+\ldots+c_n\int_a^b\varphi_n^2(x)dx+\ldots+0+\ldots$$

$$c_n=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b\varphi_n^2(x)dx}. \tag{9}$$

Таким образом, получили формулу для вычисления коэффициентов ряда (8).

4 Тригонометрический ряд Фурье для функции периода *T*=2*l*

Изучение периодических процессов и их преобразований устройствами, проводят, раскладывая функции, которые их описывают, в тригонометрический ряд Фурье, представляющий собой бесконечную сумму синусов и косинусов (простых гармоник) разных периодов (частот) и амплитуд.

Если в качестве ортогональной системы функций использовать основную тригонометрическую систему функций (5), то ряд (8) принимает следующий вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+\ldots+ \\ +\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{10}$$

а коэффициенты этого ряда, согласно (9), находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx; \tag{11}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=1,2,\ldots; \tag{12}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=1,2,\ldots. \tag{13}$$

Ряд (10), коэффициенты которого определяются по формулам (11) – (13), называется **тригонометрическим рядом Фурье** для функции $f(x)$.

Из (10) видно, что основная гармоника ряда (10) $(n=1)$

$$a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}=a_1\cos\omega_1 x+b_1\sin\omega_1 x$$

имеет циклическую частоту $\omega_1=\frac{\pi}{l}$, которая связана с периодом T_1 выражением $\omega_1=\frac{\pi}{l}=\frac{2\pi}{2l}=\frac{2\pi}{T_1}$, где $T_1=2l$, и его называют основным периодом, а $\frac{1}{T_1}=\nu_1$ – основной частотой колебаний. Остальные гармоники, соответственно, имеют периоды, кратные основному периоду: $T_n'=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2\pi}{\frac{n\pi}{l}}=\frac{2l}{n}=\frac{T_1}{n}$.

Первое слагаемое ряда $\frac{a_0}{2}$ является константой, а постоянной функции можно приписать любой период или сказать, что она не имеет периода. Эту константу называют нулевой гармоникой. Очевидно, что сумма ряда (10) будет периодической функцией периода $T=T_1=2l$. А поскольку сумма ряда должна быть равна $f(x)$, то можно заключить, что в тригонометрический ряд Фурье раскладываются периодические функции. Тем не менее остаётся вопрос: для каких функций $f(x)$ ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$, т. е. для каких функций сумма ряда $S(x)$ будет равна $f(x)$? Ответ даёт теорема [1].

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ и ее производная на промежутке $[-l,l]$ являются непрерывными или имеют конечное число точек разрыва первого рода, то в точках непрерывности сумма ряда $S(x)$ равна $f(x)$, а в точках разрыва первого рода сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ слева и справа, т. е. $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, где $f(x-0)=\lim\limits_{x\to x-0} f(x)$, а $f(x+0)=\lim\limits_{x\to x+0} f(x)$.

5 Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Отметим некоторые необходимые свойства четных и нечетных функций и интегралов от них в симметричных пределах.

1 Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией.

2 Произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция.

3 $$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx=\begin{cases} 0, & \text{если } f(x)-\text{нечетная,} \\ 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx, & \text{если } f(x)-\text{четная.}\end{cases}$$

То есть интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, а от четной – удвоенному значению интеграла по полупромежутку.

Напомним, что график четной функции симметричен относительно оси Oy, нечетной – относительно начала координат. График функции, не обладающей свойством четности-нечетности, не имеет осевой и центральной симметрий.

Если $f(x)$ – **четная** $2l$ периодическая функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то ряд Фурье для неё имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{14}$$

где $a_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$ $(n=0,1,2,...)$, а $b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx=0$ в силу симметрии пределов интегрирования и нечетности подынтегральной функции.

Если $f(x)$ – **нечетная** $2l$ периодическая функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то ряд Фурье для неё имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{15}$$

где $b_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,...)$, а $a_n = \dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx = 0$ в силу симметрии пределов интегрирования и нечетности подынтегральной функции.

Из изложенного следует, что:

– четные функции раскладываются в ряд Фурье по четным функциям, т. е. по системе (6);

– нечетные – по нечетным функциям, т. е. по системе (7);

– функции, не обладающие свойством четности-нечетности раскладываются по полной тригонометрической системе (5).

Если $f(x)$ задана на интервале $(0,l)$, то для разложения в ряд Фурье ее необходимо продолжить (доопределить) на $(-l,0)$. Это можно сделать двумя способами, продолжив ее четным (рисунок 3, *а*) или нечетным (рисунок 3, *б*) образом (тонкие пунктирные линии), а затем воспользоваться формулами (14) или (15) соответственно.

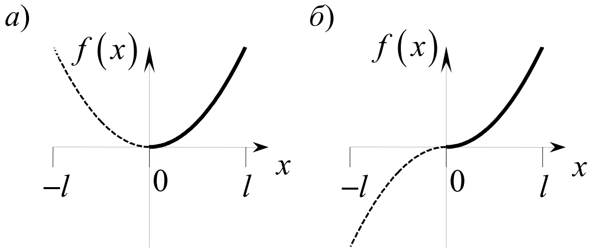

Рисунок 3

6 Ряд Фурье для непериодических функций

Если функция $f(x)$ непериодическая и задана на (a,b) (рисунок 4), то она также может быть представлена рядом Фурье на (a,b), где $b-a=2l$, $l=\dfrac{(b-a)}{2}$. При этом сумма этого ряда $S(x)$ будет совпадать с $f(x)$ на (a,b), т. е. $S(x)=f(x)$, вне (a,b) сумма ряда $S(x)$ и исходная функция $f(x)$ – совершенно разные функции, т. е. $S(x)\neq f(x)$, поскольку $S(x)$ есть периодическая функция.

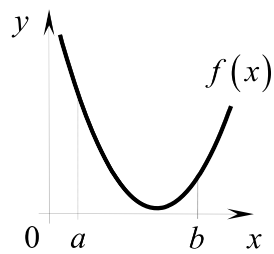

Рисунок 4

7 Амплитудно-частотный спектр периодического сигнала

Совокупность величин $\left\{\omega_n = \dfrac{n\pi}{l},\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right\}$ $(n = 0,1,2,...)$ называют **амплитудно-частотным спектром периодического сигнала**. Соответствие $\omega_n \to A_n$ принято изображать графически (рисунок 5). При этом квадрат амплитуды A_n характеризует энергию, переносимую гармоникой с частотой ω_n. Следовательно, амплитудно-частотный спектр содержит информацию об энергии периодического сигнала и показывает, как она распределена по частотам. Спектр периодической функции линейчатый, а частоты равноотстоящие $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{\pi}{l}$.

Разложение периодических функций в ряды Фурье, т. е. нахождение коэффициентов ряда и, соответственно, амплитудно-частотного спектра периодического сигнала называют **гармоническим анализом**. Сложение отдельных гармоник и получение результирующего колебания называют **гармоническим синтезом**. Большинство функций, которые встречаются в математике, удовлетворяют условиям теоремы Дирихле, раскладываются в ряд Фурье.

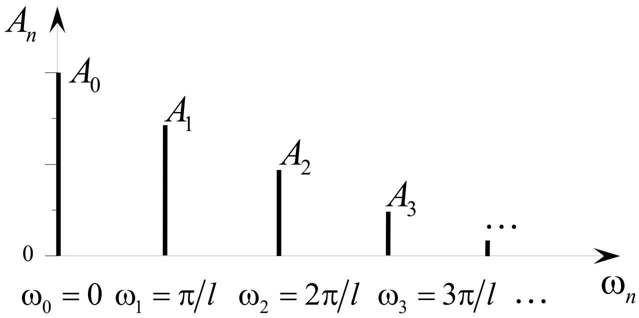

Рисунок 5

Пример 1 **–** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ на промежутке $-1<x\le 1$ и построить амплитудно-частотный спектр периодического сигнала.

Решение

Поскольку $l=1$, то период $T=2l=2$.

Ее график $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x\in(-l,0]=(-1,0],\\ x, & x\in(0,l]=(0,1]\end{cases}$ изображен на рисунке 6.

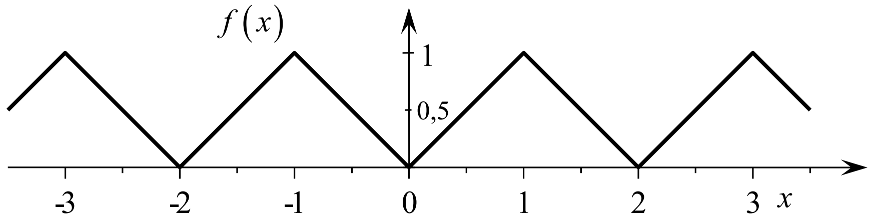

Рисунок 6

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Кроме того она является четной, следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулой (14), т. е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где $a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,...),\ \ b_n=0$.

Найдем коэффициенты ряда. Для $n=0$ имеем

$$a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{1}\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{2}{1}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=1.$$

Для нахождения a_n $(n=1,2,...)$ используем формулу интегрирования по частям $\int\limits_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$:

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{1}\int\limits_0^1 x\cos n\pi x\,dx =$$

$$=\begin{bmatrix} u = x, & du = dx; \\ dv = \cos n\pi x\,dx, & v = \int\cos n\pi x\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{bmatrix} =$$

$$=2\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\,dx\right) = 2\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{при четном } n = 2k,\ k = 1,2,3,\ldots, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & \text{при нечетном } n = 2k+1,\ k = 0,1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Видно, что амплитуды четных гармоник равны нулю.

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x) = |x|$ принимает вид:

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} =$$

$$=\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{4}{3^2\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{4}{5^2\pi^2}\cos 5\pi x - ... - \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos(2k+1)\pi x - \ldots \quad (16)$$

На рисунке 7 представлены графики нескольких гармоник: $y_0 = 0{,}5$ – нулевая гармоника, $y_1 = \frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$ – первая гармоника, $y_3 = \frac{4}{3^2\pi^2}\cos 3\pi x$ – третья гармоника, $y_5 = \frac{4}{5^2\pi^2}\cos 5\pi x$ – пятая гармоника.

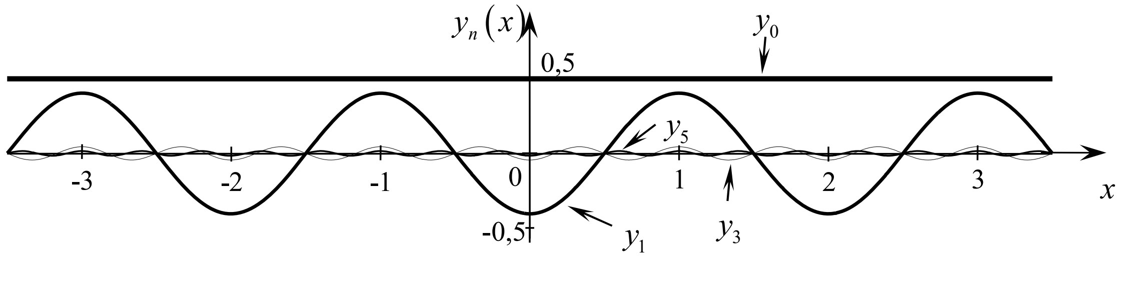

Рисунок 7

Убедимся в сходимости ряда к функции на частных значениях аргумента x. Видно, что при $x = \frac{1}{2}$ из представления (*) имеем $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - 0$, поскольку

$\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}=0$ при любом k. Для других значений x требуются компьютер. Для наглядной демонстрации сходимости построим графики исходной функции и нескольких частичных сумм ряда. На рисунке 8 изображены графики исходной функции $f(x)=|x|$ и частичной суммы ряда $S_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$, состоящей из первых двух гармоник, а на рисунке 9 – графики $f(x)=|x|$ и частичной суммы первых четырех гармоник ряда $S_4(x)==\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{4}{3^2\pi^2}\cos 3\pi x-\frac{4}{5^2\pi^2}\cos 5\pi x$.

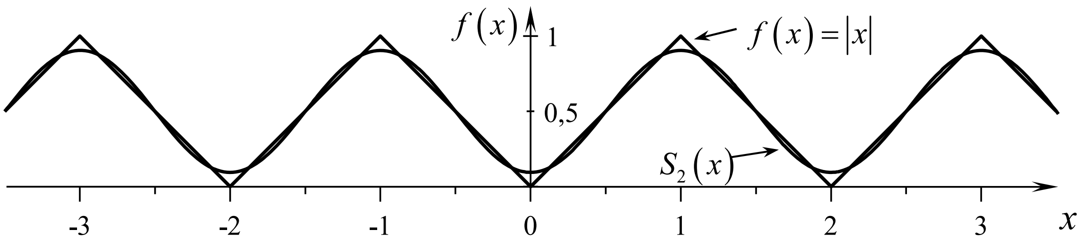

Рисунок 8

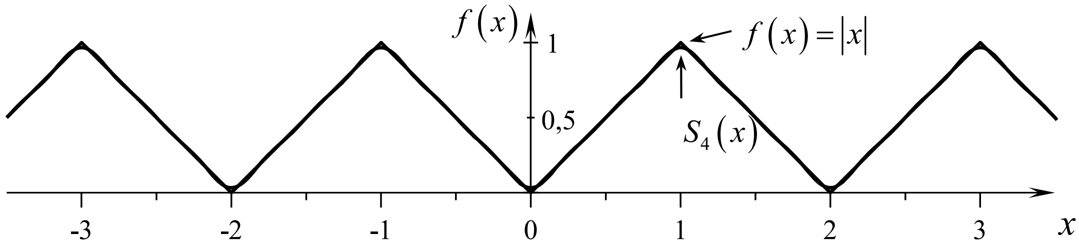

Рисунок 9

Из графиков видно, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n\to\infty$.

Построим теперь амплитудно-частотный спектр

$$\left\{\omega_n=\frac{n\pi}{l}=n\pi, A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{a_n^2+0}=|a_n|\right\}\quad (n=0,1,3,5,...).$$

В данном случае $l=1,\ b_n=0$.

Для $n=0,\ \omega_0=0\ \ A_0=|a_0|=1$ – нулевая гармоника.

В общем случае для нечетных $n=2k+1\ \ (k=0,1,2,\ldots)$ имеем

$$\omega_n=(2k+1)\pi,\ A_n=|a_n|=\left|-\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\right|=\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Последовательно придавая значения $k=0,1,2,3,\ldots$, получаем:

– для $k=0\ n=1,\ \omega_1=\pi\ \ A_1=|a_1|=\frac{4}{\pi^2}\approx 0{,}4$ – первая гармоника;

– для $k=1\ n=3,\ \omega_3=3\pi\ \ A_3=|a_3|=\left|-\frac{4}{9\pi^2}\right|=\frac{4}{9\pi^2}\approx 0{,}04$ – третья гармоника;

– для $k=2$ $n=5$, $\omega_5=5\pi$ $A_5=|a_5|=\left|-\dfrac{4}{25\pi^2}\right|=\dfrac{4}{25\pi^2}\approx 0{,}016$ – пятая гармоника, и т. д. для более высоких порядков гармоник.

Изобразим спектр наглядно, графически (рисунок 10). Как указывалось ранее, амплитуды четных гармоник равны нулю.

Из графиков частичных сумм и амплитудно-частотного спектра (амплитуды гармоник резко убывают) видно, что тригонометрический ряд сходится к функции очень быстро.

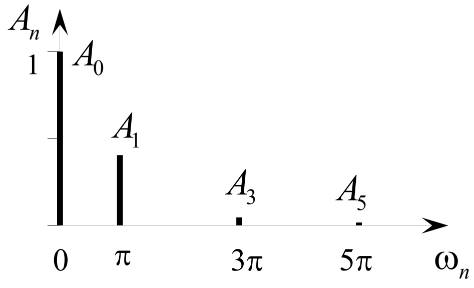

Рисунок 10

Замечание 1 – Ряды Фурье позволяют находить суммы числовых рядов. Так, например, при $x=1$ из представления (16) имеем равенство

$$1=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{(2k+1)^2}+\ldots\right),$$

а в скобках имеем ряд типа Дирихле $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$. Очевидно, что сумма ряда равна $S=\dfrac{\pi^2}{8}$.

Пример 2 **–** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ \;\;1, & 0<x\le\pi\end{cases}$ с периодом $T=2\pi$ $(l=\pi)$.

Решение

Изобразим график исходной функции (рисунок 11). Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Кроме того, она является нечетной функцией (график симметричен относительно начала координат), следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулой (15), т. е.

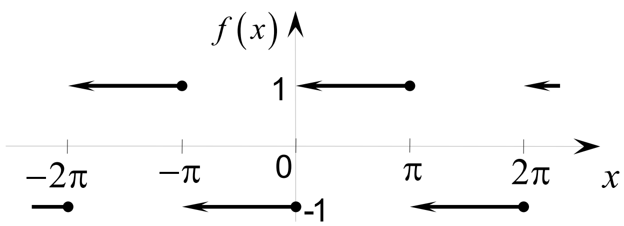

Рисунок 11

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$ $(n=1,2,...)$, $\quad a_n=0$ $(n=0,1,2,...)$.

Вычислим коэффициенты ряда b_n:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n}, & \text{если } n=2k+1, \quad k=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

Амплитуды четных гармоник равны нулю. В результате получаем ряд

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+\ldots\right)=$$

$$=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+\ldots=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Убедимся в сходимости ряда к функции. В частности, проверим положение теоремы Дирихле $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ для точек разрыва $x=\pm k\pi$ $(k=0,1,2,...)$. В этих точках все синусы обращаются в ноль, т. е. $S(\pm k\pi)=0$, а $\dfrac{f(\pm k\pi-0)+f(\pm k\pi+0)}{2}=\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0$. Для других точек наложим графики частичных сумм ряда на график исходной функции в пределах одного периода.

На рисунке 12 изображены график исходной функции $f(x)$ и графики частичной суммы ряда: частичная сумма $S_5(x)$, состоящая из первых трех нечетных гармоник (*а*), частичная сумма $S_{21}(x)$, состоящая из первых 10 нечетных гармоник ряда (*б*).

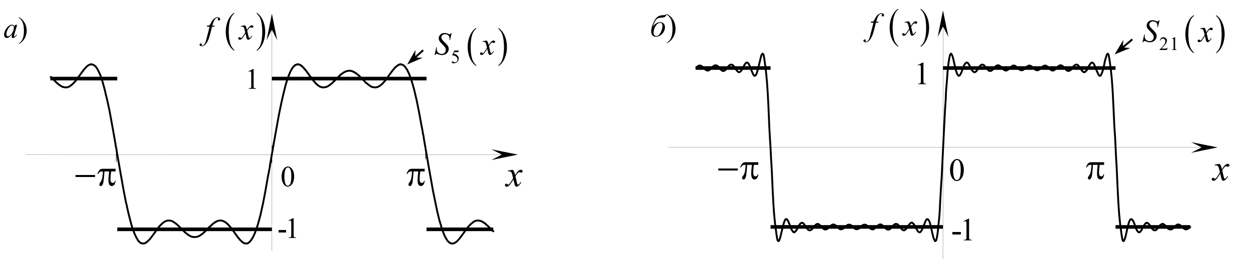

Рисунок 12

Из рисунка 12 видно, что с увеличением n частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье все точнее представляют функцию $f(x)$.

Замечание 2 – Если функция $f(x)$ имеет точку разрыва 1-го рода, например, в x_0, то частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье в окрестности этой точки (слева и справа) имеют выбросы, которые стремятся к вертикальной прямой $x=x_0$. Такое поведение частичных сумм называется **явлением Гиббса**. Скачок превышает на 18 % значение функции в этой точке, и ряд в окрестности этой точки не сходится к функции (см. рисунок 12, *б*).

Построим амплитудно-частотный спектр. В данном случае $l=\pi$, $a_n=0$ и для $n=2k+1$ имеем

$$\left\{\omega_n=\frac{n\pi}{l}=n=2k+1,\ A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{0+b_n^2}=|b_n|=\left|\frac{4}{\pi n}\right|=\frac{4}{\pi(2k+1)}\right\}\quad (k=0,1,2,...).$$

Последовательно придавая значения $k=0,1,2,\ldots$, получаем:

– для $k=0$ $n=1$, $\omega_1=1$ $A_1=|b_1|=\dfrac{4}{\pi}\approx 1,28$ – первая гармоника;

– для $k=1$ $n=3$, $\omega_3=3$ $A_3=|b_3|=\left|\dfrac{4}{3\pi}\right|=\dfrac{4}{3\pi}\approx 0,42$ – третья гармоника;

– для $k=2$ $n=5$, $\omega_5=5$ $A_5=|b_5|=\left|\dfrac{4}{5\pi}\right|=\dfrac{4}{5\pi}\approx 0,26$ – пятая гармоника,

и т. д. для более высоких порядков гармоник.

Изобразим спектр наглядно, графически (рисунок 13). Как указывалось ранее, амплитуды четных гармоник равны нулю. Из графиков частичных сумм и амплитудно-частотного спектра (амплитуды гармоник плавно убывают) видно, что тригонометрический ряд сходится к функции очень медленно.

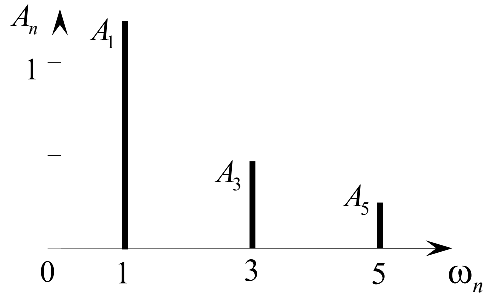

Рисунок 13

Пример 3 – Разложить периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} -\pi\le x<0,\\ x, & \text{при } 0\le x\le\pi\end{cases}$ в ряд Фурье $T=2\pi$ $(l=\pi)$ (рисунок 14).

Решение

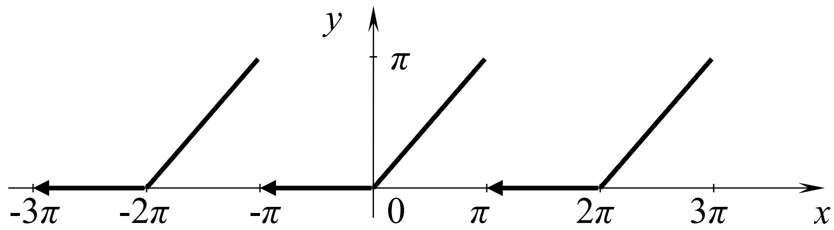

Рисунок 14

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Она не обладает свойством четности-нечетности, т. е. является функцией общего вида, следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулами (10) – (13).

Найдём коэффициенты ряда. Учитывая, что $f(x)=0$ для $x\in(-\pi,0)$, получаем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\left[\begin{array}{ll}u=x, & du=dx;\\ dv=\cos nx\,dx, & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\left[\begin{array}{ll}u=x, & du=dx;\\ dv=\sin nx\,dx, & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции принимает вид:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right)\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Ряд сходится к заданной функции при всех $x\neq(2n-1)\pi$. В точках разрыва $x=(2n-1)\pi$ сумма ряда равна $\frac{\pi}{2}$ и равна среднеарифметическому значений пределов функции слева и справа в этих точках. Например, для $x=\pi$ имеем

$$f(\pi)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos n\pi+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n\pi\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\ldots\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi}{2}.$$

Сумма ряда в скобках получена в *замечании 1*. Графики частичных сумм и амплитудно-частотный спектр следует построить самостоятельно.

Замечание 3 – Тригонометрические ряды Фурье имеют ряд приложений, в частности, в акустике. Известно, что высота ноты определяется частотой основной гармоники. Однако одна и та же нота, взятая на разных музыкальных инструментах, имеет разный тембр, т. е. «окраску». Это связано с тем, что высшие гармоники на разных инструментах имеют разные амплитуды. Это и придает при сложении гармоник характерные окраски звучания одних и тех же нот на разных инструментах.

Примеры для самостоятельной работы

Разложить в ряд Фурье с $T=2l$ периодическую функцию $f(x)$ и построить амплитудно-частотный спектр периодического сигнала.

1) $f(x)=\begin{cases}-1, & -l<x<0,\\ 2, & 0\le x\le l, \quad l=2;\end{cases}$

2) $f(x)=x$, $-l<\tilde{o}\le l$, $\quad l=1$;

3) $f(x)=\begin{cases}1, & -l\le \tilde{o}<0,\\ x, & 0\le \tilde{o}<l, \quad l=1;\end{cases}$

4) $f(x)=|x|-0{,}5$, $-l<\tilde{o}<l$, $l=1$;

5) $f(x)=\begin{cases}0, & -l\le \tilde{o}<0,\\ 2, & 0\le \tilde{o}<l, \quad l=2;\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}-1, & -l<\tilde{o}<0,\\ 0, & 0\le \tilde{o}\le l, \quad l=\pi;\end{cases}$

7) $f(x)=-|x|$, $-l<\tilde{o}<l$, $\quad l=1$;

8) $f(x)=\begin{cases}2x, & -l\le \tilde{o}<0,\\ -x, & 0\le \tilde{o}<l, \quad l=\pi;\end{cases}$

9) $f(x)=-|x|+0{,}5$, $-l<\tilde{o}<l$, $l=1$;

10) $f(x)=\begin{cases}-2, & l\le \tilde{o}<0,\\ 1, & 0\le \tilde{o}<l, \quad l=\pi.\end{cases}$

8 Комплексная форма ряда Фурье

Ряд Фурье на промежутке $(-l,l]$ периода $T=2l$ в действительной форме имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{17}$$

а коэффициенты ряда находят по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;\quad n=1,2,... \tag{18}$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi;\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi,$$

можем записать

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi});\quad \sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}). \tag{19}$$

Подставляя (19) в (17) после тождественных преобразований, получаем

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}+c_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right), \tag{20}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n);\quad c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n). \tag{21}$$

Найдём теперь явные выражения для c_n и c_{-n} на основании (18) с использованием формул (19). После соответствующих подстановок и тождественных преобразований получаем

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\quad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx;\quad c_{-n}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx \qquad n=1,2,\ldots \tag{22}$$

В результате ряд (20) можем записать в компактной форме:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}+c_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \qquad (23)$$

где

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (24)$$

Правую часть равенства (23) называют комплексной формой ряда Фурье, слагаемые ряда $c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ – комплексными гармониками, c_n – комплексными коэффициентами ряда Фурье, т. е. комплексными амплитудами гармоник, а соответствие $\left\{\omega_n=\frac{n\pi}{l},\ |c_n|\right\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ – амплитудно-частотным спектром. В физике частоты $\omega_n=\frac{n\pi}{l}$ часто называют также волновыми числами. График амплитудно-частотного спектра схематически представлен на рисунке 15.

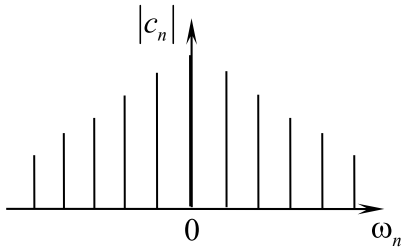

Рисунок 15

Замечание 4 – Отрицательные частоты $\omega_{-n}=-\frac{n\pi}{l}$ $(n=1,2,3,...)$ не имеют физического смысла. Их появление в комплексной форме ряда Фурье обеспечивает компактную форму записи ряда и существенно уменьшает объем вычислительной работы. При необходимости можно вернуться к действительной форме, при этом $a_n=2\mathrm{Re}C_n$, $b_n=-2\mathrm{Im}C_n$, $a_0=2C_0$, а спектральный состав функции $f(x)$ оказывается в диапазоне $\omega\in[0,\infty)$.

Пример – Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-1,0],\\ 1, & x\in(0,1],\end{cases}$ где $l=1,\ \ T=2l=2$ (рисунок 16).

Решение

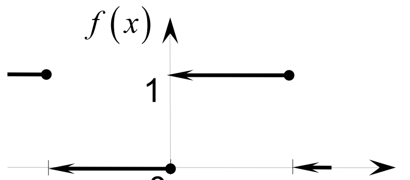

Рисунок 16

Найдём комплексные коэффициенты ряда.
Для $n=0$ имеем

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}1dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Для $n\neq0$ имеем

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)e^{-in\pi x}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}e^{-in\pi x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-in\pi}e^{-in\pi x}\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2in\pi}\left(e^{-in\pi}-e^{-in\pi 0}\right)=-\frac{1}{2in\pi}\left(\cos(n\pi)-i\sin(n\pi)-1\right)=\frac{i}{2n\pi}\left((-1)^n-1\right),\ n\neq0.$$

В результате ряд Фурье принимает вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}e^{in\pi x}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\pi}\left(\underset{n=-1}{\frac{-2}{-1}}e^{-i\pi x}+\underset{n=1}{\frac{-2}{1}}e^{i\pi x}\right)+\frac{i}{2\pi}\left(\underset{n=-2}{0}+\underset{n=2}{0}\right)+\frac{i}{2\pi}\left(\underset{n=-3}{\frac{-2}{-3}}e^{-i3\pi x}+\underset{n=3}{\frac{-2}{3}}e^{i3\pi x}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2i}{2\pi}\left(\left(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}\right)+\frac{1}{3}\left(e^{i3\pi x}-e^{-i3\pi x}\right)+\ldots\right)=\frac{1}{2}-\frac{i}{\pi}\left(\left(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}\right)+\frac{1}{3}\left(e^{i3\pi x}-e^{-i3\pi x}\right)+\ldots\right).$$

Вернемся к действительной форме ряда Фурье. На основании приведенных выше формул или, что равносильно использованию формул Эйлера, после тождественных преобразований получаем действительную форму ряда Фурье

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\ldots\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin(2k+1)\pi x \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Получить самостоятельно.

Примеры для самостоятельной работы

Записать ряд Фурье в комплексной форме для $T=2l$ периодической функции $f(x)$ и построить амплитудно-частотный спектр.

1) $f(x)=x,\quad x\in[-l,l),\ l=\pi$;
2) $f(x)=-x,\quad x\in[-l,l),\ l=\pi$;
3) $f(x)=2x,\quad x\in[-l,l),\ l=\pi$;
4) $f(x)=x+1,\ x\in[-l,l),\ l=\pi$;
5) $f(x)=x-1,\ x\in[-l,l),\ l=\pi$;
6) $f(x)=-x+1,\ x\in[-l,l),\ l=\pi$;
7) $f(x)=-x-1,\ x\in[-l,l),\ l=\pi$;
8) $f(x)=-2x,\quad x\in[-l,l),\ l=\pi$;
9) $f(x)=-|x|,\quad x\in[-l,l),\ l=\pi$;
10) $f(x)=0.5x,\quad x\in[-l,l),\ l=\pi$.

9 Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

В разделах 1 – 8 рассмотрена задача представления рядом Фурье $2l$ периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке конечной длины $[-l,l]$. В научно-технической деятельности часто возникает необходимость подобных представлений непериодических функций, заданных на всей числовой оси $(-\infty,\infty)$. Подобные представления также возможны. Непериодическую функцию $f(x)$ можно рассмотреть как периодическую с периодом $T=2l\to\infty$, т. е. в формулах ряда Фурье необходимо выполнить предельный переход при $l\to\infty$. Сделаем это. При этом воспользуемся компактной комплексной формой ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывная на всей числовой оси и абсолютно интегрируемая, т. е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = M < \infty .$$

На любом отрезке $(-l,l]$ функция $f(x)$ представима рядом Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}, \tag{25}$$

где $c_n = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\frac{n\pi}{l}t}dt$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$). При этом формально изменим переменную интегрирования в c_n с x на t. Подставим c_n в (25) и преобразуем:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l}\left(\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\frac{n\pi}{l}t}dt\right)e^{i\frac{n\pi}{l}x} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\frac{n\pi}{l}(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\omega_n(x-t)}dt,$$

где $\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}$, $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \dfrac{\pi}{l} = \Delta\omega$. При $l \to \infty$, $\Delta\omega = \dfrac{\pi}{l} \to 0$, а сумма в правой части полученной формулы для $f(x)$ является интегральной для функции $\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\omega_n(x-t)}dt$ по переменной ω. Следовательно, можем записать

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{l\to\infty \\ \Delta\omega\to 0}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega_n\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\omega_n(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt. \tag{26}$$

Правую часть формулы (26) называют двойным **интегралом Фурье** в комплексной форме функции $f(x)$. Преобразовав правую часть (26) к виду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega,$$

можем записать соотношения

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt; \tag{27}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{28}$$

которые называют преобразованиями Фурье. При этом формулу (27), т. е. функцию $F(\omega)$ называют прямым преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формулу (28) – обратным преобразованием Фурье для функции $f(x)$.

Функцию $F(\omega)$ также называют Фурье-образом функции $f(x)$ или частотным спектром функции $f(x)$, который является непрерывным.

Функции $e^{i\omega x}$ в (28) являются комплексными гармониками функции $f(x)$, а значения $F(\omega)$ – комплексными амплитудами этих гармоник. Функцию $|F(\omega)|$ называют амплитудно-частотным спектром для $f(x)$, а $\varphi(\omega) = -\arg F(\omega)$ – фазово-частотным спектром функции $f(x)$.

Формулы (27), (28) представляют собой разложение непериодических функций $f(x)$ в непрерывную сумму гармонических составляющих $e^{i\omega x}$ с частотами ω, непрерывно изменяющими от $-\infty$ до ∞ и комплексными амплитудами $F(\omega)$.

Замечание 5 – В точках x_i разрыва первого рода значение выражения (28)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{f(x_i-0)+f(x_i+0)}{2},$$

где $f(x_i \mp 0)$ предельные значения $f(x)$ слева и справа в точках разрыва x_i.

Пример 1 – Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ e^{-\alpha x}, & x\ge 0,\end{cases}$ где $\alpha \in R, \alpha > 0$, и построить график спектральной характеристики функции.

Решение

На рисунке 17 представлен график исходной функции $f(x)$ для двух значений параметра α. Проверим условие представимости функции интегралом Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} < \infty .$$

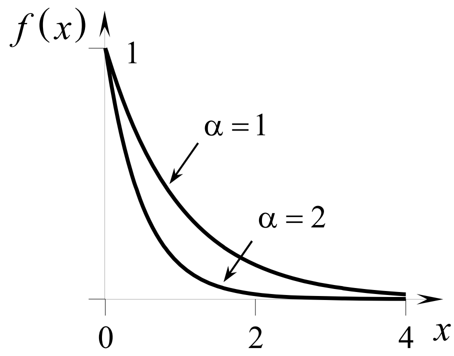

Рисунок 17

Интеграл сходится, Фурье-представление имеет место. Найдём его

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left.\frac{e^{-(\alpha+i\omega)x}}{-(\alpha+i\omega)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\alpha+i\omega}.$$

Следовательно, искомое представление имеет вид:

$$e^{-\alpha x}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{\alpha+i\omega}d\omega ,$$

а амплитудно-частотный спектр, т. е. спектральная характеристика функции или Фурье-образ имеет вид:

$$\left|F(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left|\frac{1}{\alpha+i\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}.$$

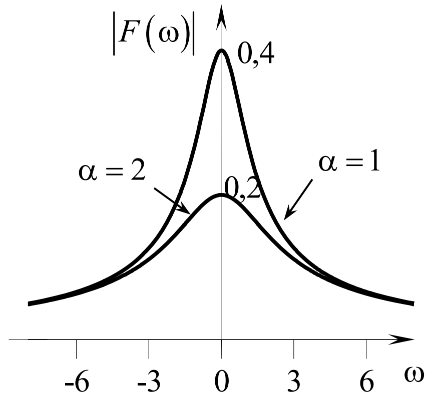

Рисунок 18

На рисунке 18 представлен график этой функции для двух значений параметра α .

Пример 2 – Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию $f(x)=e^{-\alpha x^2}$, где $\alpha>0, \alpha\in R$, и построить график спектральной характеристики функции.

Решение

На рисунке 19 представлен график исходной функции $f(x)$ для двух значений параметра α. Проверим условие представимости функции интегралом Фурье:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}<\infty \ \ (\alpha>0,\ \alpha\in R).$$

Это справочный интеграл [1]. Интеграл сходится, Фурье-представление имеет место. Найдём его:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2-i\omega x}dx=\otimes$$

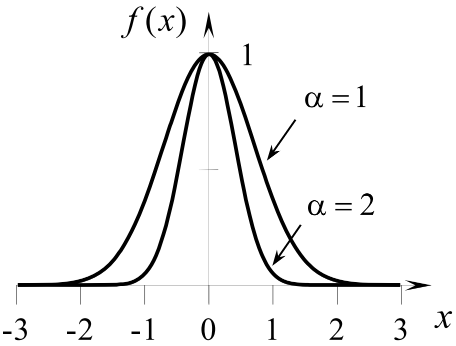

Рисунок 19

Для вычисления интеграла выделим в показателе экспоненты полный квадрат $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$, сделаем замену переменной и воспользуемся справочным интегралом, приведенным выше.

$$-\alpha x^2-i\omega x=-\alpha\left(x^2+2\frac{i\omega}{2\alpha}x\right)=-\alpha\left(x^2+2\frac{i\omega}{2\alpha}x+\left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2\right)=$$

$$=-\alpha\left(x^2+2\frac{i\omega}{2\alpha}x+\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)=-\alpha\left(\left(x+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)=-\alpha\left(x+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2-\frac{\omega^2}{4\alpha}.$$

Продолжаем вычисление интеграла:

$$\otimes=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\left(x+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2}dx=\begin{vmatrix}x+\dfrac{i\omega}{2\alpha}=z\\ dx=dz\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

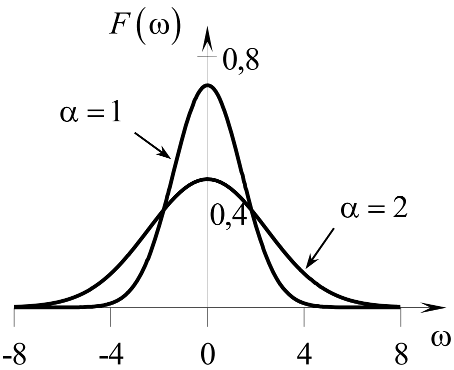

Рисунок 20

Получили $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. Фурье-образ является действительной четной функцией, её график для двух значений параметра α представлен на рисунке 20, а искомое Фурье представление для исходной функции $f(x)=e^{-\alpha x^2}$ имеет вид:

$$e^{-\alpha x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}+i\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\cos\omega x\,d\omega.$$

Из полученного выражения для $F(\omega)$ следует, что исходная функция и ее Фурье-образ описываются одним классом функций. Исходная функция является гауссовой и ее Фурье-образ – гауссова функция. В частности, при $\alpha=\frac{1}{2}$ исходная функция $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее Фурье-образ $F(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ совпадают с точностью до обозначения независимой переменной. Для гауссовой функции (колоколообразный вид) введено понятие ширины. За ширину гауссовой функции принимают промежуток значений аргумента, при котором ее высота понижается в $e\approx 2{,}72$ раз от максимальной. Так, для $f(x)=e^{-\alpha x^2}$ она равна $\Delta x=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$, а для функции $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ равна $\Delta\omega=4\sqrt{\alpha}$. Как видно из приведенных формул и рисунков 19, 20, при изменении значения α одна функция становится уже, а другая шире, при этом их ширины связаны соотношением $\Delta\omega\cdot\Delta x=8=\text{const}$, которое называют соотношением неопределенностей. Данный вывод справедлив для любых преобразуемых функций (см., например, рисунки 17, 18).

Самостоятельно рассмотреть предельные случаи $\alpha\to 0$, $\alpha\to\infty$ и сделать выводы.

10 Интеграл Фурье в действительной форме

Используя формулы Эйлера для функции $e^{i\omega(x-t)} = \cos\omega(x-t) + i\sin\omega(x-t)$, формулу (26) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos\omega(x-t) + i\sin\omega(x-t)\right) dt.$$

Если учесть, что внешний интеграл по переменной ω от нечетной части подынтегральной функции $(\sin\omega(x-t))$ в симметричных пределах равен нулю, а от четной $(\cos\omega(x-t))$ – удвоенному значению интеграла по половине этого промежутка, то последнюю формулу можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\, dt, \tag{29}$$

её называют двойным интегралом Фурье в действительной форме.

Используя формулы тригонометрии $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, формулу (29) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} \left[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right] d\omega; \tag{30}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt; \tag{31}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt. \tag{32}$$

Эти формулы также называют преобразованиями Фурье или представлением функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме. Из них видна аналогия между рядом и интегралом Фурье. В обоих случаях $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих. При этом в ряде Фурье суммирование идет по дискретным значениям n, частоты дискретные $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, а в интеграле Фурье интегрирование идет по непрерывной переменной ω, т. е. частоты непрерывно заполняют всю полуось $\omega \in [0, \infty)$.

11 Косинус- и синус-преобразования Фурье

1 Если $f(x)$ – четная, то $B(\omega)=0$, а Фурье-представление функции принимает вид:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega; \tag{33}$$

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt. \tag{34}$$

2 Если $f(x)$ – нечетная, то $A(\omega)=0$, а Фурье-представление функции принимает вид:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x\,d\omega; \tag{35}$$

$$B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{36}$$

Формулы (35), (37) называют соответственно прямыми косинус- и синус-преобразованиями Фурье функции $f(x)$, а формулы (34), (36) – обратными косинус- и синус-преобразованиями Фурье.

Замечание 6 – Косинус- и синус-преобразованиям Фурье можно подвергать и функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$, которые не обладают свойством четности и нечетности. Это будет означать, что мы мысленно продолжаем функцию на всю числовую ось четным или нечетным образом (аналогия с тригонометрическими рядами Фурье для функций, заданных на $[0,l]$). При этом Фурье-образы четных функций являются чисто действительными функциями, а нечетных – чисто мнимыми. В связи с этим следует понимать, что в формуле (37) $B(\omega)$ есть $iB(\omega)$. Отметим также, что при нахождении косинус- и синус-преобразований Фурье часто удобно использовать комплексную форму интегралов Фурье (27), (28) (проще находить интегралы), а затем вернуться к действительной. Это продемонстрировано в примере 2 (см. раздел 9).

Пример – Найти прямые и обратные косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<a,\\ 0, & x\ge a,\end{cases} \quad (a>0, a\in R).$

Решение

Функция задана на полуоси $[0\le x<\infty)$. Для разложения в ряд Фурье ее следует доопределить на всю числовую ось $(-\infty<x<\infty)$. При четном продолжении (рисунок 21, *а*) будем иметь косинус-, а при нечетном (рисунок 21, *б*) – синус-преобразование Фурье (пунктирные линии).

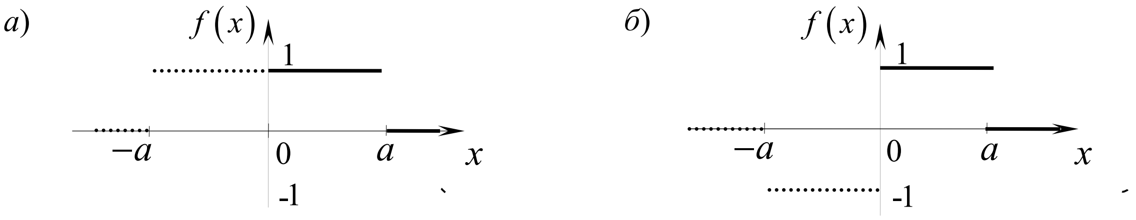

Рисунок 21

Соответствующие интегралы легко находятся в действительной форме. Прямые косинус- и синус-преобразования Фурье имеют вид:

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} 1\cdot\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin a\omega}{\omega};$$

$$B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} 1\cdot\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos a\omega}{\omega}.$$

Аналогично примерам 5 и 6 строятся графики этих спектральных функций. Обратные косинус- и синус-преобразования Фурье принимают вид:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}1, & 0\le x<a,\\ 0, & x\ge a\end{cases}.$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} A(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos a\omega}{\omega}\sin\omega x\,d\omega=\begin{cases}1, & 0\le x<a,\\ 0, & x\ge a\end{cases}.$$

Замечание 7 – Преобразования Фурье позволяют находить некоторые неберущиеся интегралы. Так, например, из предпоследней формулы при $x=0$ имеем $\int_0^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$. Преобразования Фурье применяют при решении дифференциальных и интегральных уравнений, а также при решении ряда прикладных задач, например, распознавании образов, моделировании оптических фильтров, при корректировке изображений и т. д.

Примеры для самостоятельной работы

1 Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$ и построить график спектральной характеристики функции:

а) $f(x)=e^{-\alpha|x|}$, $\alpha>0$. Ответ: $f(x)=\dfrac{2\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega$;

б) $f(x)=xe^{-x^2}$. Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \omega e^{-\frac{\omega^2}{4}}\sin\omega x\,d\omega$;

в) $f(x)=\begin{cases} e^{ix}, & |x|\le\pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\omega\pi}{1-\omega}e^{i\omega x}\,d\omega$.

2 Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)$, соответственно продолжив ее на всю числовую ось четным или нечетным образом:

а) $f(x)=e^{-\alpha x}$, $x\ge 0$ $(\alpha>0)$. Ответ: $A(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$, $B(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$;

б) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$ Ответ: $A(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{1+\cos\omega\pi}{1-\omega^2}$, $B(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\cos x, 0\le x\le \pi/2,\\ 0, \quad x>\pi/2.\end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} A(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\cos\omega\pi/2}{1-\omega^2},\\ B(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\omega(1+\sin\omega\pi/2)}{1-\omega^2}.\end{cases}$

3 Найти функцию $g(z)$, если $\int\limits_0^\infty g(z)\sin zx dz=f(x)$, где

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin x, 0\le x\le\pi,\\ 0, \quad x>\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cos x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

4 Доказать равенства:

а) $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\dfrac{a}{a^2+x^2}\cos\omega x d\omega=e^{-a|x|}$, $-\infty\le x\le\infty$;

б) $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\dfrac{\sin^2\omega}{\omega^2}\cos 2\omega x d\omega=\begin{cases}1-x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

12 Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Оригиналом называется функция $f(t)$ действительного аргумента t, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t)=0$ при $t<0$;

2) $f(t)$ кусочно-непрерывная при $t \ge 0$, т. е. на любом конечном отрезке $[a;b] \subset [0;+\infty)$ функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

3) $f(t)$ имеет ограниченный рост, т. е. возрастает не быстрее показательной функции: $\exists M > 0, s \ge 0$, что $\forall t \ge 0 \Rightarrow |f(t)| \le M \cdot e^{st}$.

Минимальное из всех чисел s, для которых справедливо неравенство $|f(t)| \le M \cdot e^{st}$, называется **показателем роста функции** $f(t)$.

Функция $f(t)$ может быть комплексной функцией действительной переменной, т. е. иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$. Она будет оригиналом, если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы, т. е. удовлетворяют условиям 1–3.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt .$$

Операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называется **преобразованием Лапласа**, а процесс нахождения оригинала по известному изображению – **операционным исчислением**.

Обозначение $F(p) = L[f(t)]$, $F(p) \risingdotseq f(t)$ или $f(t) \fallingdotseq F(p)$ читается как «$F(p)$ – изображение $f(t)$», «$f(t)$ – оригинал $F(p)$».

Смысл введения изображений заключается в том, что с их помощью можно упростить решение многих задач, в частности, свести решение ДУ к проведению алгебраических операций для нахождения изображения. Зная изображение, можно найти оригинал или по таблице, или методами, изложенными ниже.

Теорема существования изображения. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.

Необходимый признак существования изображения. Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$.

Теорема о единственности оригинала. Если две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то $\varphi(t) \equiv \psi(t)$.

Пример 1 – Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение

Это оригинал, т. к.:
1) $f(t)=1(t)$ определена $\forall t\in\mathbb{R}$;
2) $f(t)=1(t)$ непрерывна $\forall t\geq 0$;
3) $f(t)=1(t)\leq Me^{0t}=M, M\geq 1, s_0=0.$

$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{p}\lim\limits_{A\to+\infty}e^{-pA}+\frac{1}{p}e^0=\frac{1}{p}-0=\frac{1}{p}$, т. к. при $\operatorname{Re}p>0$ $\lim\limits_{A\to+\infty}e^{-pA}=0$.

Имеем

$$1(t)\risingdotseq\frac{1}{p}.$$

Замечание 8 – Очевидно, что умножение функции $\varphi(t)$ на $1(t)$ «гасит» эту функцию для $t<0$ и оставляет без изменения для $t\geq 0$, т. е.

$$f(t)=\varphi(t)\cdot 1(t)=\begin{cases}\varphi(t), t\geq 0,\\ 0, t<0.\end{cases}$$

Для простоты будем опускать множитель $1(t)$, т. е.

$$e^{\alpha t}=e^{\alpha t}\cdot 1(t)=\begin{cases}e^{\alpha t}, t\geq 0,\\ 0,\quad t<0\end{cases}\text{ и т. д.}$$

Для большинства функций изображение находится непосредственным интегрированием.

Пример 2 – Найти изображение функции $f(t)=e^{\alpha t}$.

Решение

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}e^{-(p-\alpha)t}dt=-\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^{A}=\frac{1}{p-\alpha},$$

если $\operatorname{Re}(p-\alpha)>0$, т. е.

$$e^{\alpha t}\risingdotseq\frac{1}{p-\alpha}.$$

13 Свойства преобразования Лапласа

1 **Свойство линейности.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, то $c_1 f(t) + c_2\varphi(t) \risingdotseq c_1 F(p) + c_2 \Phi(p)$.

Свойство распространяется на конечное число слагаемых, преобразование Лапласа представляет собой линейный оператор.

2 **Теорема подобия.** Если $f(t) \risingdotseq F(p), \lambda > 0$, то $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, т. е. умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

3 **Теорема смещения.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $e^{\alpha t} \cdot f(t) \risingdotseq F(p - \alpha)$, т. е. умножение оригинала на $e^{\alpha t}$ влечет за собой «смещение» переменной p изображения на α.

4 **Теорема запаздывания.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\tau > 0$, то $f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p)$, т. е. «запаздывание» оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на функцию $e^{-p\tau}$.

Пример 1 – Найти изображение функции $f(t) = \sin(t-2) \cdot 1(t-2)$.

Решение

$$\sin(t-2) \cdot 1(t-2) = \begin{bmatrix} t - 2 \ge 0 \Rightarrow t \ge 2, \\ \tau = 2 > 0 \end{bmatrix} \risingdotseq e^{-2p} \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

Пример 2 – Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \le t < 3; \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$

Решение

$$f(t) = 1(t) - 1(t-3) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-3p} = F(p).$$

5 **Дифференцирование оригинала.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \risingdotseq p \cdot F(p) - f(0);$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0);$$

$$f'''(t) \risingdotseq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0);$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, n-1}.$

Пример 3 – Найти изображение функции $f(t) = te^t$.

Решение

$$f(t) = te^t \risingdotseq F(p);$$

$$f'(t) = e^t + te^t \risingdotseq \frac{1}{p-1} + F(p) = pF(p) - f(0);$$

$$f(0) = 0e^0 = 0 \Rightarrow pF(p) - 0 = \frac{1}{p-1} + F(p) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Пример 4 – Найти изображение функции $f(t) = t\cos t$.

Решение

$$f(t) = t\cos t \risingdotseq F(p);$$

$$f'(t) = \cos t - t\sin t;$$

$$f''(t) = -\sin t - \sin t - t\cos t \risingdotseq \frac{-2}{p^2+1} - F(p) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$f(0) = 0\cos 0 = 0;\ f'(0) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$

$$p^2F(p) - 1 = \frac{-2}{p^2+1} - F(p) \Rightarrow \quad F(p) = \frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

6 **Дифференцирование изображения.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-t)^n \cdot f(t)$, т. е. дифференцирование изображения приводит к умножению оригинала на $(-t)$.

Пример 5 – Найти изображение функции $f(t) = t\cos\omega t$.

Решение

$$t\cos\omega t = -(-t)\cos\omega t \risingdotseq -\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$$

7 **Интегрирование оригинала.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$, т. е. интегрирование оригинала на отрезке $[0;t]$ приводит к делению изображения на величину p.

Пример 6 – Найти изображение функции $\int\limits_0^t e^{\tau}d\tau$.

Решение

$$\int\limits_0^t e^{\tau}d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p(p-1)}.$$

8 **Интегрирование изображения.** Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho$ сходится, то $\int\limits_p^{\infty} F(\rho)\,d\rho \fallingdotseq \dfrac{f(t)}{t}$, т. е. интегрирование изображения на $[p;\infty)$ равносильно делению оригинала на t.

Пример 7 – Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

Решение

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2+1}=\operatorname{arctg}\rho\Big|_p^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p=\operatorname{arcctg}p.$$

Пример 8 – Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{\cos t}{t}$.

Решение

$\dfrac{\cos t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty}\dfrac{\rho\,d\rho}{\rho^2+1}=\dfrac{1}{2}\ln\left(\rho^2+1\right)\Big|_p^{+\infty}=\infty$, т. к. $\dfrac{\cos t}{t}$ не является оригиналом (при $t=0$ имеем разрыв второго рода).

14 Таблица оригиналов и их изображений

Для многих функций изображения посчитаны и приведены в таблице:

1) $1(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$;

2) $e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\alpha}$;

3) $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$;

4) $c \risingdotseq \dfrac{c}{p}$;

5) $\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

6) $\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$;

7) $\mathrm{sh}\,\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$;

8) $\mathrm{ch}\,\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$;

9) $e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$;

10) $e^{\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$;

11) $e^{\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$;

12) $e^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\omega t \risingdotseq \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$;

13) $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$;

14) $t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$;

15) $t\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$;

16) $t\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$;

17) $t\cdot\mathrm{sh}\,\omega t \risingdotseq \dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$;

18) $t\cdot\mathrm{ch}\,\omega t \risingdotseq \dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$;

19) $e^{\alpha t}\cdot t\cdot\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{2\omega(p-\alpha)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^2}$;

20) $e^{\alpha t}\cdot t\cdot\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{(p-\alpha)^2-\omega^2}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^2}$.

Примеры для самостоятельной работы

1 Найти изображения следующих оригиналов (по определению):

а) $f(t)=e^{-2t}$;

б) $f(t)=t$.

2 Найти изображения следующих оригиналов, используя свойства линейности, подобия, теоремы смещения или запаздывания:

а) $f(t)=e^{-it}-3+5\cos t$. Ответ: $\dfrac{1}{p+i}-\dfrac{3}{p}+\dfrac{5p}{p^2+1}$;

б) $f(t)=\sin 2t\cdot\cos 5t$. Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{p^2+49}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{p^2+9}$;

в) $f(t)=\operatorname{ch}5t\cdot\sin 3t$. Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{(p-5)^2+9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{(p+5)^2+9}$;

г) $f(t)=\cos^4 t-\sin^4 t$. Ответ: $\frac{p}{p^2+4}$;

д) $f(t)=e^{-t}\cdot t^3$. Ответ: $\frac{3!}{(p+1)^4}$;

е) $f(t)=e^{t}\cdot\operatorname{sh}t$. Ответ: $\frac{1}{(p-1)^2-1}$;

ж) $f(t)=e^{3t}\cdot\sin^2 t$. Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$;

з) $f(t)=e^{-3t}\cdot\cos 3t\cdot\sin t$. Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{(p+3)^2+16}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p+3)^2+4}$;

и) $f(t)=(t-1)^2\cdot 1(t-1)$. Ответ: $\frac{2e^{-p}}{p^3}$;

к) $f(t)=\sin(t-b)\cdot 1(t-b)$. Ответ: $\frac{e^{-bp}}{p^2+1}$;

л) $f(t)=\cos^2(t-b)\cdot 1(t-b)$. Ответ: $\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-bp}}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-bp}\cdot p}{p^2+4}$;

м) $f(t)=e^{t-2}\cdot 1(t-1)$. Ответ: $\frac{e^{-p-1}}{p-1}$;

н) $f(t)=e^{t-2}\cdot\sin(t-2)\cdot 1(t-1)$. Ответ: $\frac{e^{-p-1}(\cos 1-p\sin 1+\sin 1)}{(p-1)^2+1}$.

3 Используя свойство дифференцирования изображения, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=t\cdot\cos\beta t$. Ответ: $\frac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$;

б) $f(t)=t^2\cdot\operatorname{sh}3t$. Ответ: $\frac{18p^2+54}{\left(p^2-9\right)^3}$;

в) $f(t)=2t-3t^4$. Ответ: $\frac{2}{p^2}-\frac{72}{p^5}$;

г) $f(t)=t^2\cdot\cos 3t$. Ответ: $\dfrac{2p^3-54p}{\left(p^2+9\right)^3}$;

д) $f(t)=(t+1)\cdot\sin 2t$. Ответ: $\dfrac{2p^2+4p+8}{\left(p^2+4\right)^2}$;

е) $f(t)=t\left(e^t+\operatorname{ch}t\right)$. Ответ: $\dfrac{2p^2+2p+2}{\left(p^2-1\right)^2}$.

4 Используя теорему о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=\sin^2 t$. Ответ: $\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$;

б) $f(t)=\sin^3 t$. Ответ: $\dfrac{6}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+1\right)}$;

в) $f(t)=\cos^4 t$. Ответ: $\dfrac{p^4+16p^2+24}{p\left(p^2+4\right)\left(p^2+16\right)}$.

5 Используя свойство интегрирования оригиналов, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\cdot d\tau$. Ответ: $\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$;

б) $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau\cdot d\tau$. Ответ: $\dfrac{p^3+p^2+p\omega-\omega^2}{p\left(p^2+\omega^2\right)^2}$;

в) $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau\cdot d\tau$. Ответ: $\dfrac{p^2+2\omega^2}{p^2\left(p^2+4\omega^2\right)}$;

г) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2\cdot e^{-\tau}\cdot d\tau$. Ответ: $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

6 Используя свойство интегрирования изображений, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$. Ответ: $\ln\left|\dfrac{p}{p-1}\right|$;

б) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$. Ответ: $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2}$;

в) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$;

г) $f(t)=\dfrac{e^t-1-t}{t}$. Ответ: $\ln\left|\dfrac{p}{p-1}\right|-\dfrac{1}{p}$;

д) $f(t)=\dfrac{2\sin^2 t}{t}\cdot e^{-3t}$. Ответ: $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+6p+13}}{p+3}$.

15 Свертка оригиналов. Изображение свертки. Восстановление оригиналов по их изображениям

Сверткой оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$ называют функцию, обозначаемую $f(t)*\varphi(t)$ и определяемую равенством

$$f(t)*\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Свертка обладает свойством $f(t)*\varphi(t)=\varphi(t)*f(t)$.

Теорема Бореля (теорема умножения изображений). Если $f(t)\risingdotseq F(p)$ и $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$, то $F(p)\cdot\Phi(p)-$ изображение свертки $f(t)*\varphi(t)$, т. е.

$$f(t)*\varphi(t)\risingdotseq F(p)\cdot\Phi(p)\fallingdotseq\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Следствие (формула Дюамеля). Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$ и $\varphi'(t)-$ оригинал, то

$$p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)\fallingdotseq f(0)\cdot\varphi(t)+\int\limits_0^t f'(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau,$$

где $f(0)=\lim\limits_{t\to+0}f(t)$.

Пример 1 – Найти свертку оригиналов $f(t)=1-2t,\quad \varphi(t)=e^{2t}$. Указать изображение полученной свертки.

Решение

$$(1-2t)*e^{2t}=\int\limits_0^t(1-2\tau)e^{2(t-\tau)}d\tau=\begin{bmatrix}u=1-2\tau, du=-2d\tau;\\ dv=e^{2(t-\tau)}d\tau, v=-\dfrac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\end{bmatrix}=$$

$$=(1-2\tau)\left(-\frac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\right)\Bigg|_0^t-\frac{1}{2}\cdot 2\int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}d\tau=(1-2t)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\Bigg|_0^t=t.$$

Найдем изображение свертки: $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$.

Изображение свертки также можно было найти по теореме Бореля:

$$f(t) = 1 - 2t \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} = \frac{p-2}{p^2}, \quad \varphi(t) = e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2} \Rightarrow$$

$$(1-2t) * e^{2t} \risingdotseq \frac{p-2}{p^2}\,\frac{1}{p-2} = \frac{1}{p^2}.$$

Пример 2 – Найти оригинал изображения $\dfrac{p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$.

Решение

Используя теорему Бореля, получим

$$\frac{p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p^2+4-4}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+1} \cdot \left(1 - \frac{4}{p^2+4}\right) =$$

$$= \frac{p}{p^2+1} - 2 \cdot \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{2}{p^2+4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{p}{p^2+1} \fallingdotseq \cos t; \\ \dfrac{2}{p^2+4} \fallingdotseq \sin 2t \end{array}\right] \fallingdotseq \cos t - 2 \cdot \cos t * \sin 2t =$$

$$= \cos t - 2\int_0^t \cos(t-\tau) \cdot \sin 2\tau d\tau = \cos t - \int_0^t \left(\sin(t+\tau) + \sin(3\tau - t)\right) d\tau =$$

$$= \cos t + \cos(t+\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{3}\cos(3\tau - t)\Big|_0^t = \cos t + \cos 2t - \cos t + \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\cos t =$$

$$= \frac{4}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\cos t.$$

Пример 3 – Найти оригинал изображения $\dfrac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение

Используя формулу Дюамеля, получим

$$\frac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=p\cdot\frac{2}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{p^2+1}\ \risingdotseq\ 2\sin t;\\ \dfrac{p}{p^2+1}\ \risingdotseq\ \cos t\end{array}\right]\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\ 2\sin 0\cdot\cos t+\int_0^t 2\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t\left(\cos t+\cos(2\tau-t)\right)d\tau=$$

$$=t\cos t+\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t=t\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin t=t\cos t+\sin t.$$

Теорема разложения. Если $F(p)-$ изображение и $p_1,p_2,...,p_n$ – её изолированные особые точки, то функция-оригинал имеет вид:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left(F(p)e^{pt}\right),$$

где сумма вычетов берется по всем изолированным особым точкам функции $F(p)$.

Следствие 1. Если $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}-$ правильная рациональная дробь и $p_1,p_2,...,p_n$ – ее простые полюсы, то функция $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{Q(p_k)}{R'(p_k)}\cdot e^{p_k t}$ является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$. ($\operatorname*{Res}\limits_{p=p_k}\dfrac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}=\dfrac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}$).

Следствие 2. Если $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}-$ правильная рациональная дробь и $p_1,p_2,...,p_n$ – ее полюсы кратности $r_1,r_2,...,r_n$, то функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left(\frac{Q(p)}{R(p)}\cdot e^{pt}\cdot(p-p_k)^{r_k}\right)^{(r_k-1)}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Пример 4 – Найти оригинал изображения $\dfrac{2p^2-3p}{p^4-1}$.

Решение

Разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2p^2-3p}{p^4-1}=\frac{2p^2-3p}{\left(p^2+1\right)\left(p-1\right)\left(p+1\right)}=\frac{3p}{2\left(p^2+1\right)}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4\left(p-1\right)}-\frac{5}{4\left(p+1\right)}\fallingdotseq$$

$$\fallingdotseq\frac{3}{2}\cos t+\sin t-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}.$$

Задачу можно решить иначе:

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{4}\frac{2p_k^2-3p_k}{4p_k^3}e^{p_kt}=\left[p_{1,2}=\pm1,p_{3,4}=\pm i\right]=\frac{2-3}{4}e^{t}+\frac{2+3}{-4}e^{-t}+\frac{-2-3i}{-4i}e^{it}+$$

$$+\frac{-2+3i}{4i}e^{-it}=-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}\left(\left(3-2i\right)\left(\cos t+i\sin t\right)+\left(3+2i\right)\left(\cos t-i\sin t\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\cos t+\sin t-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{-t}.$$

Пример 5 – Найти оригинал изображения $\dfrac{p}{p^4-1}$.

Решение

$$f\left(t\right)=\sum_{k=1}^{4}\frac{p_k}{4p_k^3}e^{p_kt}=\left[p_{1,2}=\pm1,p_{3,4}=\pm i\right]=$$

$$=\frac{1}{4}e^{t}+\frac{-1}{-4}e^{-t}+\frac{i}{-4i}e^{it}+\frac{-i}{4i}e^{-it}=\frac{e^{t}-e^{-t}}{4}-\frac{e^{it}+e^{-it}}{4}=\frac{1}{2}\operatorname{ch}t-\frac{1}{2}\cos t.$$

Пример 6 – Найти оригинал изображения $\dfrac{p^2+2}{p^4+4}$.

Решение

Найдем изолированные особые точки:

$p=\sqrt[4]{-4}\Rightarrow p_0=1+i,\ p_1=-1+i,\ p_2=-1-i,\ p_3=1-i-$ простые полюсы.

$$f\left(t\right)=\sum_{k=0}^{3}\frac{p_k^2+2}{\left(p_k^4+4\right)'}\cdot e^{p_kt}=\sum_{k=0}^{3}\frac{p_k^2+2}{4p_k^3}\cdot e^{p_kt}=\frac{\left(1+i\right)^2+2}{4\left(1+i\right)^3}\cdot e^{(1+i)t}+\frac{\left(-1+i\right)^2+2}{4\left(-1+i\right)^3}\cdot e^{(-1+i)t}+$$

$$+\frac{\left(-1-i\right)^2+2}{4\left(-1-i\right)^3}\cdot e^{(-1-i)t}+\frac{\left(1-i\right)^2+2}{4\left(1-i\right)^3}\cdot e^{(1-i)t}=\operatorname{ch}t\cdot\sin t.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Найти свертку оригиналов и указать изображение полученной свертки:

а) $\cos 2t * \sin t$. Ответ: $\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t$; $\frac{p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)}$;

б) $t * \cos t$. Ответ: $1-\cos t$; $\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}$.

2 Найти оригиналы по их изображениям:

а) $F(p)=\frac{1}{p^2-4}+\frac{3p-2}{(p-1)^2+3}$. Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t+3e^t\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^t\sin\sqrt{3}t$;

б) $F(p)=\frac{p-3}{2p^2-6p-1}$. Ответ: $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{11}}{2}t-\frac{3}{2\sqrt{11}}e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{11}}{2}t$;

в) $F(p)=\frac{2e^{-p}}{p^3}$. Ответ: $(t-1)^2\cdot 1(t-1)$;

г) $F(p)=\frac{e^{-2p}}{p-1}$. Ответ: $e^{t-2}\cdot 1(t-2)$;

д) $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-3t}\right)$;

е) $F(p)=\frac{p}{(p+1)^2}$. Ответ: $(1-t)e^{-t}$;

ж) $F(p)=\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$. Ответ: $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}e^{-2t}(3\cos t-4\sin t)$;

з) $F(p)=\frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$. Ответ: $(t-3)e^{-(t-3)}\cdot 1(t-3)$;

и) $F(p)=\frac{e^{-p}}{p(p-1)}$. Ответ: $e^{t-1}\cdot 1(t-1)-1(t-1)$;

к) $F(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$. Ответ: $\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t$;

л) $F(p)=\frac{2}{p(p-1)}$. Ответ: $2e^t-2$;

м) $F(p)=\frac{1}{(p+3)\left(p^2+4\right)}$. Ответ: $\frac{1}{13}e^{-3t}-\frac{1}{13}\cos 2t+\frac{3}{26}\sin 2t$;

н) $F(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+2\right)}$. Ответ: $\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t-\sin t$;

о) $F(p)=\frac{p}{(p-1)\left(p^2+1\right)}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sin t-\cos t+e^t\right)$.

16 Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t),$$

где $a_0, a_1, a_2 - \mathrm{const}, \quad a_0 \neq 0$;

$f(t)-$ функция-оригинал.

$x_0 = x(0),\, x_1 = x'(0) -$ начальные условия.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда, применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и используя теоремы о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, получаем

$$x(t) \risingdotseq X(p);$$
$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0;$$
$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - px_0 - x_1;$$
$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Сделав соответствующие замены в дифференциальном уравнении $a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$, получаем операторное уравнение

$$a_0\left(p^2X(p) - px_0 - x_1\right) + a_1\left(pX(p) - x_0\right) + a_2X(p) = F(p);$$
$$\left(a_0p^2 + a_1p + a_2\right)X(p) - \left(a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0\right) = F(p).$$

Выражаем $X(p) = \dfrac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2} -$ операторное решение.

Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы тем самым найдем функцию $x(t)$ – решение задачи Коши исходного уравнения при заданных начальных условиях.

Замечание 9 – Решение задачи Коши для ДУ с постоянными коэффициентами выше второго порядка получается аналогично.

Замечание 10 – Требование, чтобы начальные условия были заданы в точке $t = 0$, несущественно, т. к. можно ввести линейную замену независимой переменной t:

$$t = \tau + t_0 \Rightarrow \tau_0 = 0.$$

Замечание 11 – Решение систем ЛДУ с постоянными коэффициентами производится по той же схеме, что и решение одного ЛДУ.

Пример 1 – Решить операторным методом уравнение при заданных начальных условиях $x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1$.

Решение

$$x(t) \risingdotseq X(p);$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1;$$

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1} \Rightarrow X(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

$$\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} \risingdotseq t\sin t; \quad \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t \Rightarrow x(t) = t\sin t - \sin t.$$

Пример 2 – Решить операторным методом уравнение при заданных начальных условиях $x'' + x' = t, \quad x(1) = 1, \ x'(1) = 0$.

Решение

Пусть $t = \tau + 1 \Rightarrow \tau_0 = 0$, тогда из $x(t) = \tilde{x}(\tau), \ x'(t) = \tilde{x}'(\tau), \ x''(t) = \tilde{x}''(\tau) \Rightarrow$

$\tilde{x}'' + \tilde{x}' = \tau + 1$.

$$\tilde{x} \risingdotseq X(p), \quad \tilde{x}' \risingdotseq pX(p) - 1, \quad \tilde{x}'' \risingdotseq p^2X(p) - p.$$

$$\tau + 1 \risingdotseq \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \Rightarrow p^2X(p) - p + pX(p) - 1 = \frac{1+p}{p^2} \Rightarrow X(p) = \frac{\frac{1+p}{p^2} + p + 1}{p^2 + p} =$$

$$= \frac{p+1}{p^3(p+1)} + \frac{p+1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

$$\frac{2!}{2p^3} \risingdotseq \frac{\tau^2}{2}; \quad \frac{1}{p} \risingdotseq 1 \Rightarrow \tilde{x}(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2} \Rightarrow x(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Пример 3 – Решить операторным методом систему уравнений при заданных начальных условиях: $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases} \qquad x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 0.$

Решение

Перейдем к операторной системе:

$$x \risingdotseq X(p),\ y \risingdotseq Y(p),\ z \risingdotseq Z(p);\ x' \risingdotseq pX-1,\ y' \risingdotseq pY-1,\ z' \risingdotseq pZ \Rightarrow$$

$\begin{cases} pX-1=2X-Y+Z, \\ pY-1=X+Z, \\ pZ=-3X+Y-2Z; \end{cases}$ $\begin{cases} (p-2)X+Y-Z=1, \\ X-pY+Z=-1, \\ 3X-Y+(p+2)Z=0; \end{cases}$ – линейная система относительно X,Y,Z.

Имеем

$$\begin{cases} X=Y=\dfrac{p+2}{p(p+1)}, \\ Z=-\dfrac{2}{p(p+1)}. \end{cases}$$

$$X=Y=\frac{p+2}{p(p+1)}=\frac{2}{p}-\frac{1}{p+1} \risingdotseq 2-e^{-t}=x=y;$$

$$Z=-\frac{2}{p(p+1)}=-\frac{2}{p}+\frac{2}{p+1} \risingdotseq -2+2e^{-t}=z.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

а) $x'+x=e^{-t}$,

$x(0)=1$. Ответ: $x(t)=e^{-t}(t+1)$;

б) $x'+2x=\sin t$,

$x(0)=0$. Ответ: $x(t)=\dfrac{1}{5}\left(e^{-2t}-\cos t+2\sin t\right)$;

в) $x''+3x'=e^{t}$,

$x(0)=0,\ x'(0)=-1$. Ответ: $x(t)=\dfrac{1}{4}e^{t}+\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{3}$;

г) $x''-9x=2-t$,

$x(0)=0,\ x'(0)=1$. Ответ: $x(t)=\dfrac{7}{27}e^{3t}-\dfrac{1}{27}e^{-3t}-\dfrac{2}{9}+\dfrac{t}{9}$;

д) $x''+4x=2\cos 2t$,

$x(0)=0, x'(0)=4$. Ответ: $x(t)=\left(2+\frac{t}{2}\right)\sin 2t$;

е) $x''+x=\cos t\cdot\cos 2t$,

$x(0)=0, x'(0)=0$. Ответ: $x(t)=\frac{1}{16}(4t\sin t+\cos t-\cos 3t)$;

ж) $x'''+x'=1$,

$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$. Ответ: $x(t)=t-\sin t$;

з) $x'''+x'=t$,

$x(0)=0, x'(0)=-1, x''(0)=0$. Ответ: $x(t)=\frac{t^2}{2}-1+\cos t-\sin t$;

и) $x^{IV}+2x''+x=\cos t$,

$x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$. Ответ: $\frac{1}{8}t(\sin t-t\cos t)$.

2 Решить следующие системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

а) $\begin{cases} x'+y=0, \\ y'+x=0; \end{cases}$

$x(0)=1, y(0)=-1$. Ответ: $\begin{cases} x(t)=e^t, \\ y(t)=-e^t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x'+x=y+e^t, \\ y'+y=x+e^t; \end{cases}$

$x(0)=y(0)=1$. Ответ: $\begin{cases} x(t)=e^t, \\ y(t)=e^t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, \\ x''+2y'+x=0; \end{cases}$

$x(0)=x'(0)=y(0)=0$. Ответ: $\begin{cases} x(t)=2-2e^{-t}-2te^{-t}, \\ y(t)=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x'=-y-z, \\ y'=-x-z, \\ z'=-x-y; \end{cases}$

$x(0)=-1, y(0)=0, z(0)=1$. Ответ: $\begin{cases} x(t)=-e^t, \\ y(t)=0, \\ z(t)=e^t. \end{cases}$

Список литературы

1 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: учебник / Л. Д. Кудрявцев. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.

2 **Антипова, И. А.** Интегральные преобразования: учебное пособие / И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, А. К. Цих. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2018. – 58 с.

3 **Литвин, Д. Б.** Ряды: учебное пособие / Д. Б. Литвин. – Ставрополь: Сервисшкола, 2017. – 88 с.

4 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчислений: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Т. 3. – 728 с.

5 **Пантелеев, А. В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – Москва: Высшая школа, 2007. – 448 с.