ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе №2 для студентов заочной формы обучения экономических специальностей

Могилев 2009

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28 » января 2009 г., протокол № 5

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. Л. А. Данилович;
канд. физ.-мат. наук, доц. В. И. Despite Мармазеев;
ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. экон. наук, доц. Н. А. Сергейчик

Методические указания содержат рекомендации, контрольные задания и образцы решения задач по разделам: «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Линейное программирование».

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнев

Технический редактор А.Т. Червинская

Компьютерная вёрстка Н.П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 315 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

Правила выполнения и оформления контрольной работы

При оформлении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1 Контрольную работу выполняют в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать номер контрольной работы, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы и номер зачетной книжки.

2 Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. При этом условие каждой задачи полностью переписывают перед ее решением. В тетради обязательно оставляют поля.

3 Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы. В конце контрольной работы необходимо указать использованную при выполнении контрольной работы литературу.

4 После получения прорецензированной работы, как зачтенной, так и незачтенной, следует исправить отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Незачтенные задания необходимо выполнить заново.

5 На повторную проверку обязательно предоставляется и ранее прорецензированная работа. Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается.

Номера вариантов задач для контрольной работы следует выбирать по схеме:

— номер варианта соответствует **числу из двух последних цифр**, если это число не более 30;

— если это число больше 30, номер варианта следует брать равным результату вычитания из этого числа 30 до получения числа, не большего 30;

— если две последние цифры 00 , номер варианта равен 10.

Например:

а) номер зачетки заканчивается цифрами 03. Вариант задания равен 3;

б) номер зачетки заканчивается цифрами 66. Вычитаем 66—30 = 36 > 30. Вычитаем еще раз 36—30 = 6. Вариант задания равен 6.

Задание 1

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1 $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$;

2 $y' + y = x + 1$;

3 $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$;

4 $xy' - y = x^2 \cos x$;

5 $y' - \frac{y}{x} = x$;

6 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} + x^2$;

7 $(x^2+1)y' + 4xy = 3$;

8 $y'\cos x + y = 1 - \sin x$;

9 $x(x-1)y' + y = x^2 + 2x - 1$;

10 $y' + \frac{y}{x} = x^2$;

11 $y' - y = 2e^x$;

12 $y' - y\,ctgx = \sin x$;

13 $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$;

14 $y' = x + \frac{3y}{x}$;

15 $y' = \frac{3x^2 + y}{2x}$;

16 $y' + \frac{y}{x} = \sin x$;

17 $y' + \frac{2y}{x} = e^x$;

18 $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$;

19 $y'\cos x + y\sin x = 1$;

20 $dy = (x^2 + 2x - 2y)dx$;

21 $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$;

22 $y' - y\,tgx = \frac{1}{\cos x}$;

23 $y'\cos^2 y + y = tgx$;

24 $xy' - y = x^2\cos x$;

25 $(1+x^2)y' + y = arctg\,x$;

26 $y' + y\cos x = \sin x\cos x$;

27 $y'\sin x - y\cos x = 1$;

28 $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$;

29 $y' + \frac{3}{x}y = \frac{4}{x^3}$;

30 $y' + xy = xe^{\frac{x^2}{2}}$.

Задание 2

Исследовать сходимость знакочередующегося ряда. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$;

2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)^n}$;

3 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^n$;

4 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+2}{n(n+2)}$;

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n\sqrt{n}}$;

6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{8^n}$;

7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+4}$;

11 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$;

12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}}$;

13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$;

14 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^n$;

15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$;

16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$;

17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+5}{3n^4-2n+1}$;

22 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$;

23 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(\ln n)^2}$;

24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+3)^2}$;

25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n-4)(6n-5)}$;

27 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^3}$;

8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n}$;

9 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$;

10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(5n+3)^n}$;

18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$;

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}$;

20 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$;

28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n^3+1}{4n^3-2}\right)^n$;

29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{2n^2+1}$;

30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

Задание 3

1–6 Четверо рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, высшего качества равна p_1, вторым – p_2, третьим – p_3 и четвертым – p_4. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) k подшипников; б) не более l подшипников; в) хотя бы s подшипников.

7–12 Стрелок произвел четыре выстрела по движущейся мишени, причем вероятность попадания в цель при первом выстреле равна p_1, при втором – p_2, при третьем – p_3 и при четвертом – p_4. Вычислить вероятность того, что цель поражена: а) k раз; б) более l раз; в) менее s раз.

13–18 Инженер выполняет расчет, пользуясь четырьмя справочниками. Вероятность того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем и четвертом справочнике, соответственно равна: p_1, p_2, p_3 и p_4. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся: а) только в k справочниках; б) хотя бы в l – справочниках; в) менее чем в s справочниках.

19–24 Четыре станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя равна p_1, второй – p_2, третий – p_3 и четвертый – p_4. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) не менее k станков; б) l станков; в) более s станков.

25–30 Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна p_1, второй – p_2, третий – p_3 и четвертый – p_4. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) k экзаменов; б) не менее l экзаменов; в) не более s экзаменов.

Таблица 1 – Данные для решения задания 3

Номер варианта	p_1	p_2	p_3	p_4	k	l	s
1	0,9	0,85	0,7	0,8	1	3	2
2	0,9	0,75	0,7	0,9	2	1	3
3	0,6	0,8	0,75	0,7	3	1	2
4	0,9	0,85	0,7	0,8	4	3	2
5	0,85	0,8	0,6	0,7	1	2	3
6	0,55	0,4	0,6	0,7	4	1	3
7	0,6	0,7	0,5	0,45	1	3	1
8	0,7	0,8	0,45	0,6	2	2	1
9	0,85	0,7	0,6	0,8	3	1	3
10	0,9	0,45	0,6	0,8	4	3	2
11	0,4	0,3	0,6	0,55	1	2	4

Окончание таблицы 1

Номер варианта	p_1	p_2	p_3	p_4	k	l	s
12	0,45	0,6	0,8	0,6	2	3	3
13	0,3	0,55	0,7	0,4	1	3	2
14	0,7	0,4	0,8	0,9	2	1	3
15	0,4	0,45	0,8	0,9	3	2	4
16	0,9	0,8	0,7	0,7	4	2	3
17	0,6	0,7	0,8	0,9	1	3	2
18	0,75	0,85	0,4	0,65	2	1	2
19	0,1	0,2	0,15	0,25	1	2	3
20	0,15	0,25	0,1	0,2	2	3	1
21	0,1	0,2	0,3	0,15	3	2	4
22	0,1	0,15	0,25	0,2	4	3	2
23	0,2	0,15	0,25	0,3	1	4	3
24	0,3	0,2	0,15	0,25	2	4	1
25	0,9	0,85	0,7	0,8	1	2	3
26	0,9	0,75	0,7	0,9	2	3	1
27	0,6	0,8	0,75	0,7	3	4	2
28	0,9	0,85	0,7	0,8	4	1	2
29	0,85	0,8	0,6	0,7	1	2	3
30	0,55	0,4	0,6	0,7	2	3	1

Задание 4

Построить ряд и функцию распределения дискретной случайной величины ***X*** (***СВ X***). Найти её математическое ожидание ***M(X),*** дисперсию ***D(X)*** и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

1–6 Всхожесть семян данного растения определяется вероятностью ***p***. ***СВ X*** – число появившихся растений из ***n***.

Таблица 2 – Данные для решения задания 1–6

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
p	0,6	0,7	0,9	0,8	0,4	0,5
n	5	4	3	3	4	5

7-10 В экзаменационном билете 3 задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна p_1, второй – p_2, третьей – p_3. **СВ *X*** – число правильно решенных задач.

Таблица 3 – Данные для решения задания 7–10

Номер варианта	7	8	9	10
p_1	0,7	0,8	0,9	0,8
p_2	0,7	0,9	0,8	0,9
p_3	0,6	0,7	0,9	0,6

11-20 В магазин в течение времени Т поступило ***n*** телевизоров, из которых ***k*** дефектных. **СВ *X*** – число исправных телевизоров среди ***l*** отобранных.

Таблица 4 – Данные для решения задания 11–20

Номер варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N	10	8	1000	100	9	7	120	2000	1500	10
K	4	2	2	5	3	2	10	6	5	1
L	3	4	3	4	5	5	3	4	3	4

20–30 Для рекламы фирма вкладывает в каждую ***n***-ую единицу продукции приз в ***k*** рублей. ***СВ X*** – размер выигрыша при ***l*** сделанных покупках.

Таблица 5 – Данные для решения задания 20–30

Номер варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	10	12	20	15	14	13	10	11	17	18
k	1000	500	600	1500	1200	1400	800	1300	900	750
l	4	3	5	5	4	3	3	4	4	5

Задание 5

Банк имеет 2000 вкладчиков. Проведено выборочное обследование 100 вкладов (в тысячах рублей):

75	70	70	80	75	75	60	70	160	80	100	110	75	10	100
100	105	85	160	95	90	90	95	100	105	85	10	65	50	45
75	70	70	10	75	75	60	70	75	80	110	120	80	55	160
15	10	20	30	15	35	40	45	55	35	160	130	75	20	30
115	125	120	130	160	115	125	10	125	120	105	125	80	60	45
10	70	80	75	75	160	70	75	80	40	140	150	65	160	80
100	105	85	100	95	90	90	95	100	10	35	115	160	90	95
75	70	10	80	75	75	60	70	75	80	160	145	125	85	70
115	125	120	10	135	145	135	145	160	150	100	105	130	95	60
90	90	95	100	105	100	105	85	100	95	145	130	90	80	115

Требуется по выборке из 100 вкладов (***отсчет данных производится построчно с компоненты, соответствующей номеру варианта***):

1) определить размах варьирования;

2) составить интервальный статистический ряд частот, разбив размах варьирования на «***k=6***» интервалов;

3) построить полигон и гистограмму;

4) найти числовые характеристики выборки: выборочную среднюю $\overline{x}$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднеквадратическое отклонение $\sigma_в$, исправленную выборочную дисперсию s^2, исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение s.

Задание 6

Предприятие может выпускать продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. При этом используется два вида ресурсов: P_1 и P_2. По технологическим нормам на производство единицы продукции $П_1$ требуется a_{11} единиц ресурса P_1 и a_{21} единиц ресурса P_2. На производство единицы продукции $П_2$ требуется по a_{12} и a_{22} единиц тех же ресурсов. Объем ресурсов P_1 и P_2 составляет соответственно b_1 и b_2 единиц. Прибыль от реализации единиц продукции $П_1$ и $П_2$ составляет соответственно по c_1 и c_2 тыс. ден. единиц. Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль);

3) определить оптимальный план выпуска количества единиц продукции $П_1$ и $П_2$, обеспечивающий максимальную прибыль. Найти величину полученной прибыли.

Таблица 6 – Данные для решения задания 6

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	c_1	c_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	2	1	2	16	10	2	2
2	10	5	2	5	60	20	2	3
3	3	7	9	7	42	84	3	3
4	2	5	7	5	30	55	3	4
5	4	6	11	6	48	90	4	4
6	3	4	9	4	28	52	3	2
7	6	7	12	7	63	105	5	3
8	2	3	6	3	18	30	2	2
9	3	7	10	7	35	84	4	3
10	3	5	6	5	25	40	2	2
11	6	4	2	4	40	24	3	2
12	3	3	9	3	24	42	2	1
13	6	4	2	4	44	28	4	4
14	1	3	7	3	21	39	3	2
15	3	5	9	5	25	55	2	2
16	7	4	3	4	48	32	3	3
17	4	6	8	6	72	96	5	5
18	7	5	3	5	70	50	4	4
19	9	6	4	6	90	60	4	3
20	2	4	7	4	32	52	3	2
21	5	8	11	8	72	120	5	5

Окончание таблицы 6

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	c_1	c_2
22	4	6	10	6	42	78	4	3
23	4	4	8	4	40	56	3	2
24	4	6	11	6	36	78	4	3
25	2	4	8	4	32	56	3	3
26	3	6	10	6	54	96	5	4
27	6	7	9	7	77	112	5	5
28	3	3	11	3	15	39	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
29	4	7	9	7	56	91	4	3
30	4	5	11	5	35	70	2	2

Решение типового варианта

Задание 1

Найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$.

Решение.

Имеем линейное уравнение первого порядка. Решим данное уравнение методом подстановки (методом Бернулли).

Метод подстановки заключается в том, что с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$, *где* u, v *– неизвестные функции, линейное уравнение вида* $y' + P(x)y = Q(x)$ *(или* $A(x)y' + B(x)y = C(x)$*) приводят к следующему виду:*

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \;\Rightarrow u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Так как одну из функций $u = u(x)$, $v = v(x)$ *можно взять произвольной, то в качестве* $v(x)$ *берут любое частное решение уравнения* $v' + P(x)v = 0$, *например* $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$. *Тогда функция* $u(x)$ *определяется из уравнения*

$$u'(x)v(x) = Q(x), \qquad u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Таким образом, решение линейного уравнения сводится к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Применяя подстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ для данного уравнения, получим:

$$u'v + uv' + 2xuv = 2x^2e^{\;x^2};$$

$$(u'v + 2xuv) + uv' = 2x^2e^{-x^2};$$

$$v(u' + 2xu) + uv' = 2x^2e^{-x^2}. \qquad (1)$$

Полагая $u' + 2xu = 0$, найдем $u = u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + 2xu = 0 \;\Rightarrow \frac{du}{u} = -2xdx \;\Rightarrow \int\frac{du}{u} = -2\int xdx \Rightarrow \;\ln u = -x^2,\;\; (C=0) \;\Rightarrow u = e^{-x^2}.$$

При $u = e^{-x^2}$ равенство (1) обратится в уравнение:

$$e^{-x^2}v' == 2x^2e^{-x^2} \;\Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x^2 \;\Rightarrow dv = 2x^2dx.$$

Откуда: $v = \frac{2}{3}x^3 + C$.

Тогда $y = uv = e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)$ – общее решение данного уравнения.

Задание 2

Исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 4^n}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Решение

Данный ряд является знакочередующимся. Проверим условия теоремы Лейбница. Имеем:

$$u_n = \frac{1}{n\cdot 4^n},\;\; u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}.$$

Так как $n\cdot 4^n < (n+1)\cdot 4^{n+1}$, то $\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}} < \frac{1}{n\cdot 4^n}$, т. е. $u_n > u_{n+1}$.

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n} = 0.$$

Таким образом, условия теоремы Лейбница выполняются, следовательно, исходный ряд сходится. Установим, как он сходится: абсолютно или условно. Для этого исследуем ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}$. Применив признак Д'Аламбера, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 4^n}{1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}$ сходится. Тогда исходный ряд сходится абсолютно.

Задание 3

Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна p_1= 0,8, второй – p_2= 0,7 и третий – p_3=0,6 . Найти вероятность того, что студент сдаст: а) 2 экзамена (событие ***A***); б) не менее 2-х экзаменов (событие ***B***); в) не более 2-х экзаменов (событие ***C***).

Решение

Пусть A_i – событие «студент сдаст i-ый $(i=1,2,3)$ экзамен», $p_i = p(A_i)$. Тогда $\overline{A_i}$ – событие «студент не сдаст i-ый $(i=1,2,3)$ экзамен», $q_i = p(\overline{A_i}) = 1 - p(A_i)$.

а) $A = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3$.

$P(A) = P(\overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3)$.

Для несовместных событий A и B имеет место формула $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Так как события $\overline{A}_1 A_2 A_3$, $A_1 \overline{A}_2 A_3$, $A_1 A_2 \overline{A}_3$ являются несовместными, то $P(A) = P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \overline{A}_3)$.

Для независимых событий A и B имеет место формула $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. А так как события, стоящие в скобках, являются независимыми, то получаем

$$P(A) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) =$$
$$= q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 + p_1 p_2 q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}452;$$

б) $B = A + A_1 A_2 A_3$.

$$P(B) = P(A + A_1 A_2 A_3) = P(A) + P(A_1 A_2 A_3) =$$
$$P(A) + p_1 p_2 p_3 = 0{,}452 + + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336;$$

в) $D = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + A$.

$$P(D) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + A) =$$
$$= q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 q_3 + P(A) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}452 - 0{,}672.$$

Ответ: а) 0,452; б) 0,336; в) 0,672.

Задание 4

В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить ряд распределения, функцию распределения (аналитически и графически) дискретной случайной величины ***X*** (***СВ X***) – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение.

Составим ряд распределения ***СВ X***. По условию задачи ***СВ X*** может принимать значения: 1, 2 и 3. Найдем вероятности p_i $(i = 1,2,3)$, с которыми ***СВ X*** принимает эти значения:

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{\frac{6!}{3!(6-3)!}} = \frac{4}{20} = 0,2;$$

$$p_2 = P(X = 2) = \frac{C_4^2}{C_6^3} = \frac{\frac{4!}{2!(4-2)!}}{20} = \frac{12}{20} = 0,6;$$

$$p_3 = P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{\frac{4!}{3!(3-2)!}}{20} = \frac{4}{20} = 0,2\,.$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,2 + 0,4 + 0,2 = 1.$

Ряд распределения дискретной ***СВ X*** имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

Составим функцию распределения $F(x) = P(X < x)$ ***СВ X***:

если $x \le 1$, то $F(x)) = 0$, так как в этом случае событие «$X < x$» является невозможным; если $1 < x \le 2$, то $F(x) - P(X=1)=0,2$; если $2 < x \le 3$, то $F(x) - P(X=1) + P(X=2) = 0,8$; если $x>3$, то $F(x) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$.

Следовательно:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ 0,2, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ 0,8, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$ (рисунок 1):

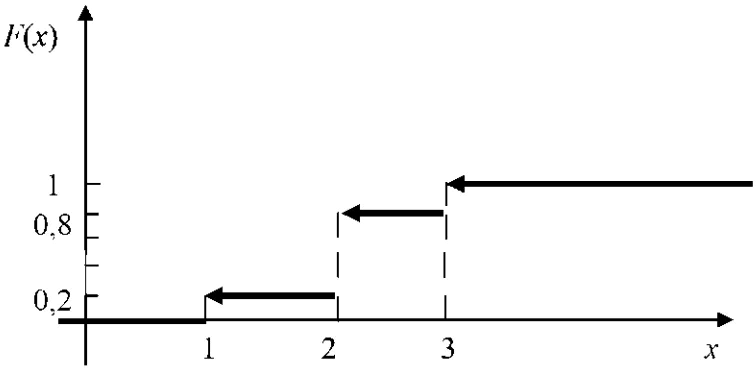

Рисунок 1.

Математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ ***СВ X*** найдем соответственно по формулам:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,, \quad D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X)\,, \quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

$$M(X)=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}6+3\cdot 0{,}2=2.$$

$$D(X)=12\cdot 0{,}2+22\cdot 0{,}6+32\cdot 0{,}2-4=0{,}4\,.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0.4}=0{,}62.$$

Задание 5

Банк имеет 2000 вкладчиков. Проведено выборочное обследование 100 вкладов, результаты которого следующие (в тысячах рублей):

15	10	20	30	15	35	40	45	55	35
45	50	50	55	50	60	65	70	75	65
75	70	70	80	75	75	60	70	75	80
100	105	85	100	95	90	90	95	100	105
75	70	70	80	75	75	60	70	75	80
115	125	120	130	135	145	135	145	160	150
90	90	95	100	105	100	105	85	100	95
115	125	120	130	130	115	125	110	125	120
75	70	70	65	75	75	60	70	75	80
100	105	85	100	95	90	90	95	100	105

По полученным данным необходимо:

1) определить размах варьирования;

2) составить интервальный статистический ряд частот, разбив размах варьирования на «$k=6$» интервалов;

3) построить полигон и гистограмму;

4) найти числовые характеристики выборки: выборочную среднюю $\bar{x}$, выборочную дисперсию D_B, выборочное среднеквадратическое отклонение σ_B, исправленную выборочную дисперсию s^2, исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение s.

Решение

1) Определим размах варьирования по формуле $R=x_{\max}-x_{\min}$.

$x_{min}=10$, $x_{max}=160$, $R=160-10=150$.

2) Составим интервальный статистический ряд (данные столбцов 1–3 таблицы 7), разбив размах варьирования на $\boldsymbol{k}=6$ интервалов. Длину частичного интервала определим по формуле $h=R/k$, тогда h=150/6=25;

Таблица 7

Номер столбца	1	2	3	4	5	6	7
Номер интервала	$[x_i;x_{i-1})$	n_i	$\omega_i=\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{nh}$	n_x	$\frac{n_x}{n}$	$y_i=\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$
1	$[10,35)$	5	0,05	0,002	5	0,05	22,5
2	$[35,60)$	10	0,10	0,004	15	0,15	47,5
3	$[60,85)$	35	0,35	0,014	50	0,50	72,5
4	$[85,110)$	30	0,30	0,012	80	0,80	97,5
5	$[110,135)$	15	0,15	0,006	95	0,93	122,5
6	$[135,160]$	5	0,05	0,002	100	1	147,5

Примечание: n_i – частота в интервале $[x_i;x_{i+1})$; ω_i – относительная частота; n_x – накопленная частота; n_x/n – относительная накопленная частота; y_i – середина i-ого интервала.

3) Гистограмме соответствуют прямоугольники с основаниями, равными h, и высотой $\frac{n_i}{nh}$ (рисунок 2). Если соединить середины верхних оснований построенных прямоугольников отрезками прямых линий, то получим полигон (см. рисунок 2).

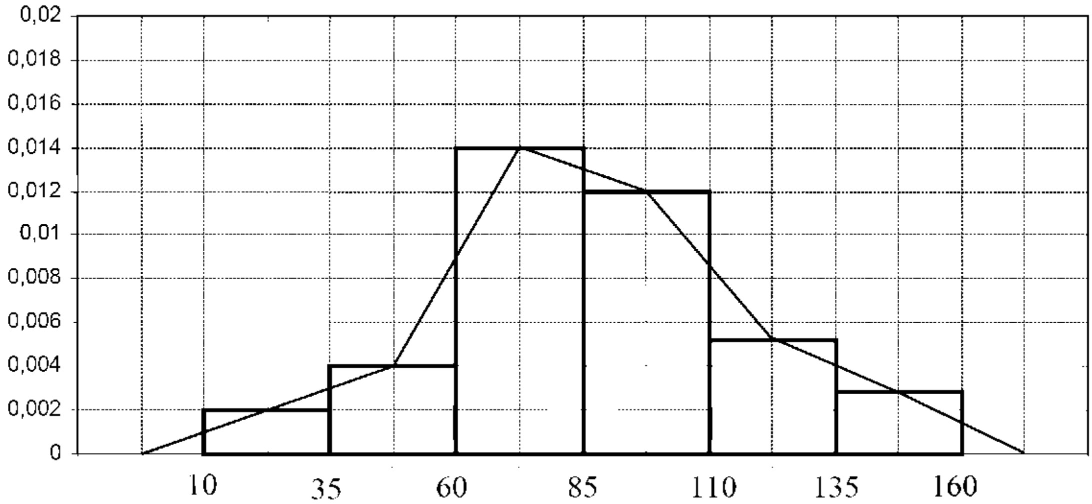

Рисунок 2 — Полигон и гистограмма

4) Находим выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочную исправленную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение соответственно по формулам:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}y_i\,n_i\,;\quad D_{\hat{a}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}y_i^2n_i-\left(\bar{x}\right)^2\,;\quad \sigma_B=\sqrt{D_B}\,;\quad s^2=\frac{n}{n-1}D_B\,;\quad s=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_B}\,,$$

где n – объем выборки;

k – количество интервалов.

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(22{,}5 \cdot 5 + 47{,}5 \cdot 10 + 72{,}5 \cdot 35 + 97{,}5 \cdot 30 + 122{,}5 \cdot 15 + 147{,}5 \cdot 5 =$$

$$= \frac{1}{100}(112{,}5 + 475 + 2537{,}5 + 2925 + 1837{,}5 + 737{,}5) = 86{,}25;$$

$$D_B = \frac{1}{100}\left(22{,}5^2 \cdot 5 + 47{,}5^2 \cdot 10 + 72{,}5^2 \cdot 35 + 97{,}5^2 \cdot 30 + 122{,}5^2 \cdot 15 + 147{,}5^2 \cdot 5\right) - 86{,}25^2 =$$

$$= 8281{,}25 - 7439{,}0625 = 842{,}1875;$$

$$\sigma_B = \sqrt{842{,}1875} \approx 29{,}02;$$

$$s^2 = \frac{100}{99} \cdot 842{,}1875 = 850{,}70;$$

$$s = \sqrt{850{,}70} \approx 29{,}17.$$

Задание 6.

Предприятие может выпускать продукцию двух видов: *П1* и *П2* . При этом используется два вида ресурсов: P_1 и P_2. По технологическим нормам на производство единицы продукции *П1* требуется a_{11} единиц ресурса P_1 и a_{21} единиц ресурса P_2, а на производство единицы продукции *П2* требуется по a_{12} и a_{22} единиц тех же ресурсов (где $a_{11} = 6$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 3$). Объем ресурсов P_1 и P_2 составляет соответственно $b_1 = 45$ и $b_2 = 30$ единиц. Прибыль от реализации единиц продукции *П1* и *П2* составляет соответственно $c_1 = 3$ и $c_2 = 3$ тысяч денежных единиц. Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль);

3) определить оптимальный план выпуска количества единиц продукции *П1* и *П2*, обеспечивающий максимальную прибыль. Найти величину полученной прибыли.

Решение

1 Обозначим через x_1 число единиц продукции *П1*, через x_2 – продукции *П2* , через Z – суммарную прибыль от реализации произведенных изделий. Тогда $X = (x_1; x_2)$ – допустимый план задачи, $Z = Z(X)$ – целевая функция, максимум которой требуется найти.

Исходные данные представим в виде таблицы (таблица 8).

Таблица 8

Ресурсы	Затраты на единицу продукции		Объем ресурса	Вид ограничения
	$П_1$	$П_2$		
P_1	6	5	45	$\le$
P_2	3	5	30	$\le$
Прибыль, ден. ед.	3	3		
План выпуска, шт.	x_1	x_2		

2 Так как каждое изделие продукции *$П_1$* дает прибыль *3* ден. ед., а таких изделий изготавливается x_1 единиц, то выпуск изделий *$П_1$* даст прибыль $3x_1$, аналогично изделия продукции *$П_2$* обеспечат прибыль $3x_2$. Суммарную прибыль можно записать в виде:

$$Z = 3x_1 + 3x_2. \tag{1}$$

Ресурса P_1 на изготовление одного изделия продукции *$П_1$* требуется *6* единиц, на изготовление одного изделия продукции *$П_2$ – 5* единиц. Ресурса P_2 на изготовление одного изделия продукции *$П_1$* требуется *3* единицы, на изготовление одного изделия продукции *$П_2$ – 5* единиц.

Тогда для изготовления x_1 изделий *$П_1$* и x_2 изделий *$П_2$* потребуется первого ресурса $6x_1 + 5x_2$ (единиц). Так как объем ресурса P_1 не может превышать *45* единиц, то должно выполняться неравенство

$$6x_1 + x_2 \le 45.$$

Аналогично можно записать условия, налагаемые на объем второго ресурса P_2 $(3x_1 + 5x_2 \le 30)$.

Таким образом, искомый план задачи $X = (x_1; x_2)$ должен удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 5x_2 \le \ 30. \end{cases} \tag{3}$$

По смыслу задачи, переменные x_1 и x_2 не могут быть выражены отрицательными числами, поэтому

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{4}$$

*План $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений (3) и условию неотрицательности (4), называется **допустимым**. Допустимый план, для которого целевая функция (1) принимает максимальное значение, называется **оптимальным** и обозначим $X^* = (x_1^*, x_2^*)$.*

*Линейная функция (2), максимум которой надо определить, вместе с системой ограничений (3) и условием неотрицательности (4) образуют **математическую модель задачи.** Так как функция (2) линейная, а система (3) содержит только линейные ограничения, то задача (2) (4) является **задачей линейного программирования (ЗЛП).***

Таким образом, задача линейного программирования (ЗЛП) может быть сформулирована следующим образом: найти оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, обеспечивающий максимум целевой функции (1), при заданной системе ограничений (3). Математическая модель ЗЛП имеет вид:

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 30. \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

3 Определим план выпуска количества единиц продукции *П1* и *П2*, обеспечивающий максимальную прибыль, решив ЗЛП (5) графическим способом.

Для построения области допустимых решений строим в системе x_1Ox_2 соответствующие данным ограничениям-неравенствам граничные прямые:

$$6x_1 + 5x_2 = 45, \qquad 3x_1 + 5x_2 = 30.$$

Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого вследствие выпуклости любой полуплоскости достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству (если прямая не проходит через начало координат, то в качестве пробной точки удобно взять точку $(0;0)$). Если неравенство выполняется для пробной точки, то оно выполняется для любой точки, принадлежащей той же полуплоскости, что и пробная точка. Если неравенство не выполняется для пробной точки, то выбирается полуплоскость, не содержащая пробной точки. С учетом условий неотрицательности $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, получаем область допустимых решений – четырехугольник $OABC$, который является выпуклым множеством (выпуклым многоугольником) (рисунок 3).

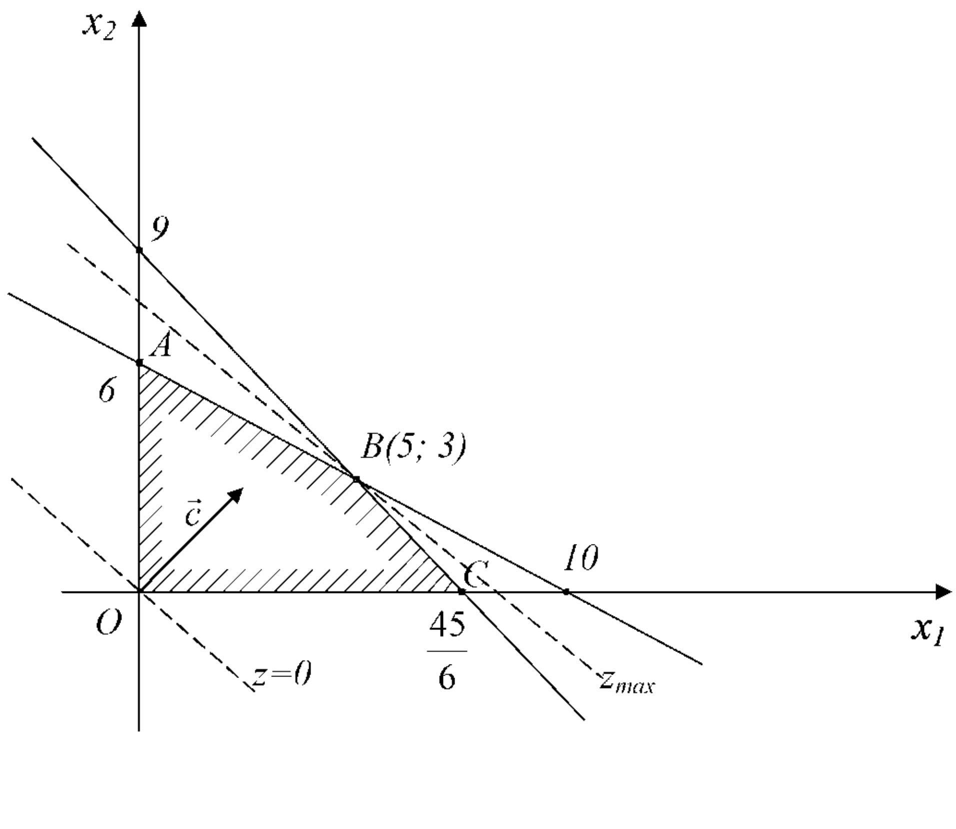

Рисунок 3.

Далее строим вектор, в направлении которого целевая функция Z возрастает быстрее всего. Этот вектор называется вектором-градиентом, который вычисляется по формуле

$$grad\ Z(M_0) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} \right);$$
$$grad\ Z = (c_1; c_2).$$

Обозначим этот вектор $\vec{c} = (c_1; c_2)$. Для нашей задачи $\vec{c} = (3; 3)$. Перпендикулярно вектору $\vec{c}$ проводим для удобства через начало координат линию уровня $Z = 0$. Параллельным перемещением прямой $Z = 0$ в направлении вектора $\vec{c}$ находим крайнюю точку B, в которой целевая функция достигает максимума. Координаты точки B определяются системой $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 45, \\ 3x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases}$ откуда $B(5;3)$.

Таким образом, имеем оптимальный план $X^* = (5; 3)$, $Z_{\max} = Z(X^*) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 24$.

Следовательно, максимальную прибыль в 24 денежные единицы предприятию обеспечит выпуск изделий в количестве *5* единиц продукции *П1* и *3* единиц продукции *П2*.

Вопросы к экзамену

1 Дифференциальные уравнения первого порядка. Общие понятия. Задача Коши для ДУ первого порядка.

2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

4 Дифференциальные уравнения высших порядков. Общие понятия. Решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

5 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

6 Числовой ряд: определение, основные понятия, сходимость и расходимость.

7 Свойства сходящихся числовых рядов.

8 Необходимое условие сходимости ряда.

9 Достаточные признаки сходимости ряда (признаки сравнения, Д'Аламбера, Коши, интегральный признак).

10 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды, признак Лейбница, абсолютная и условная сходимость.

11 Степенные ряды: определение, основные понятия, радиус и интервал сходимости.

12 Перестановки, размещения, сочетания. Основные правила комбинаторики.

13 Пространство элементарных событий. Классификация событий. Операции над событиями.

14 Аксиомы теории вероятностей. Классическая формула вероятности. Геометрическая вероятность, статистическая вероятность.

15 Теорема сложения вероятностей. Противоположные события.

16 Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей.

17 Формула полной вероятности. Формула Байеса.

18 Схема повторных независимых опытов. Формулы Бернулли и Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

19 Случайные величины, их классификация. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Дискретные СВ, ряд распределения, функция распределения, числовые характеристики.

20 Непрерывные СВ, функция распределения, плотность распределения вероятности, числовые характеристики: математическое ожидание, его свойства; дисперсия, ее свойства, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты.

21 Биномиальное распределение, ряд распределения, числовые характеристики.

22 Распределение Пуассона, ряд распределения, числовые характеристики.

23 Равномерное распределение, числовые характеристики.

24 Показательное распределение, числовые характеристики.

25 Нормальное распределение.

26 Генеральная совокупность и выборка. Вариационные ряды. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

27 Состоятельные, несмещенные, эффективные оценки неизвестных параметров распределения. Выборочная средняя, выборочная дисперсия и их свойства. Исправленная выборочная дисперсия. Выборочные начальные и центральные моменты.

28 Точечные оценки неизвестных параметров распределения. Метод моментов.

29 Интервальные оценки параметров распределения. Доверительная вероятность, доверительный интервал.

30 Доверительный интервал для оценки математического ожидания СВ, имеющей нормальное распределение при известном σ. Доверительный интервал для оценки математического ожидания СВ, имеющей нормальное распределение при неизвестном σ.

31 Понятие о статистической проверке статистических гипотез. Типы гипотез. Критерий значимости проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия. Ошибки, допускаемые при проверке статистических

гипотез. Уровень значимости статистического критерия. Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки. Отыскание критических областей.

32 Проверка гипотезы о математическом ожидании СВ, имеющей нормальное распределение при известном σ. Проверка гипотезы о математическом ожидании СВ, имеющей нормальное распределение при неизвестном σ.

33 Проверка гипотезы о модели закона распределения. Критерий согласия Пирсона.

34 Предмет линейного программирования. Понятие задачи линейного программирования.

35 Формы записи ЗЛП, их эквивалентность. Преобразование ЗЛП к канонической форме.

36 Геометрическая интерпретация и графическое решение ЗЛП.

Список литературы

1 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика /А. И. Герасимович — Минск : Выш. шк.,1983. – 280 с.

2 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика /В. Е. Гмурман – М : Высш. шк., 1991. – 479 с.

3 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике /В. Е. Гмурман – М. : Высш. шк., 1991. – 479 с.

4 **Кузнецов, А. В.** Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие /А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л.С. Костевич. – 2-е изд., перераб и доп. – Минск : Выш. шк., 2001. – 448 с.

5 Руководство к решению задач по высшей математике /Под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 2. — 400 с.

6 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Минск : Выш. шк., 1973. – 575 с.

7 **Сухая, Т.А.** Задачи по высшей математике / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск: Выш. шк., 1993. – Ч. 2. — 301 с.

8 **Унсович, А. Н.** Краткий курс высшей математики для экономистов / А. Н. Унсович – Барановичи : БНИП, 2000. – 531 с.