МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Могилев 2022

УДК 512.64
ББК 22.143
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» ноября 2021 г., протокол № 3

Составитель Т. Ю. Орлова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по изучению темы «Определители и матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений», достаточное количество примеров с подробными решениями, примеры для самостоятельного решения.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор Т. А. Рыжикова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Матрицы и операции над ними 4
2 Определители 11
3 Обратная матрица. Ранг матрицы 18
4 Системы линейных алгебраических уравнений. Решение невырожденных систем 27
5 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса 34
Список литературы 47

1 Матрицы и операции над ними

1.1 Теоретическая часть

Матрицей размера $m \times n$ называется числовая таблица, имеющая m строк и n столбцов.

Матрицу обозначают большой буквой латинского алфавита, например, A. Чтобы подчеркнуть её размеры, их будем записывать нижними индексами, например, матрицу A размера $m \times n$ запишем так: $A_{m\times n}$. Элементы матрицы обозначаются той же буквой латинского алфавита, что и сама матрица, но только малой и снабжённой двумя нижними индексами, первый из которых обозначает номер строки, а второй – номер столбца. Так, a_{ij} обозначает элемент матрицы A, расположенный в i-й строке j-м столбце. Но запись (a_{ij}) – это сокращённая запись всей матрицы A, т. е. $A = (a_{ij})$.

В развёрнутом виде матрица записывается, согласно определению, как числовая таблица, при этом с обеих сторон она ограничивается либо круглыми скобками, либо квадратными, либо двумя вертикальными чертами, например:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}; \quad B_{l\times k} = \begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12}\ldots b_{1k} \\ b_{21}\ b_{22}\ldots b_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{l1}\ b_{l2}\ldots b_{lk} \end{pmatrix}; \quad C_{q\times p} = \begin{Vmatrix} c_{11}\ c_{12}\ldots c_{1p} \\ c_{21}\ c_{22}\ldots c_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{q1}\ c_{q2}\ldots c_{qp} \end{Vmatrix}.$$

Матрица называется *нулевой* и обозначается O, если все её элементы равны нулю.

Если $m = n$, то матрица $A_{n\times n}$ называется *квадратной* матрицей, а число n называется её *порядком*. Элементы a_{ii} квадратной матрицы образуют её главную диагональ и называются *диагональными*.

Если в квадратной матрице все недиагональные элементы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), а отличными от нуля могут быть только диагональные элементы (среди них также могут быть нули), то такая матрица называется *диагональной*.

Среди диагональных матриц выделяют матрицу E, все диагональные элементы которой равны 1, и называют эту матрицу *единичной*, т. к. во множестве матриц она играет такую же роль, как и единица во множестве действительных чисел.

Единичная матрица выглядит так:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы совпадают.

Матрицы можно складывать, умножать на число, транспонировать и перемножать.

Суммой матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *и* $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$, такая, что $\forall\, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\;\; c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Таким образом, из определения видно, что складываются только матрицы одинаковых размеров, матрица-сумма имеет те же размеры, что и матрицы-слагаемые, причём при сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

Сложение матриц обладает следующими свойствами: если A, B, C – произвольные матрицы одинаковых размеров, то:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность);

3) $\exists O \quad \forall A \qquad A+O=A$ (существование нейтрального элемента);

4) $\forall A \quad \exists(-A) \quad A+(-A)=O$ (существование противоположного элемента).

Во множестве матриц одинаковых размеров задаётся и операция вычитания как операция, обратная сложению. Поэтому вычитание матриц сводится к вычитанию их соответствующих элементов.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* α называется матрица $\alpha\cdot A_{m\times n}=B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $\forall\, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\;\; b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

Таким образом, из определения видим, что при умножении матрицы на число получаем матрицу тех же размеров, причём все элементы матрицы умножаются на то же число.

Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами: если A и B – произвольные матрицы одних и тех же размеров, α,β – произвольные числа, то:

1) $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$;

2) $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$;

3) $\left(\alpha\cdot\beta\right)A=\alpha\cdot\left(\beta A\right)=\beta\cdot\left(\alpha A\right)$;

4) $1\cdot A=A$.

Операции сложения и умножения матриц на число будем называть *линейными операциями*.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times p}=(b_{ij})$ называется матрица $A\cdot B=C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $\forall\ i=\overline{1,m};\ k=\overline{1,p}\ \ c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$.

Умножать можно матрицы *согласованные*, т. е. только в том случае, когда количество столбцов первого сомножителя равно количеству строк второго.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $\left(A_{n\times m}\cdot B_{m\times p}\right)\cdot C_{p\times s}=A_{n\times m}\cdot\left(B_{m\times p}\cdot C_{p\times s}\right)$(ассоциативность);

2) $A_{n\times m}\cdot\left(B_{m\times p}+C_{m\times p}\right)=A_{n\times m}\cdot B_{m\times p}+A_{n\times m}\cdot C_{m\times p}$;

3) $\alpha\cdot\left(A_{n\times m}\cdot B_{m\times p}\right)=\left(\alpha\cdot A_{n\times m}\right)\cdot B_{m\times p}=A_{n\times m}\cdot\left(\alpha\cdot B_{m\times p}\right)$;

4) $E_{n\times n}\cdot A_{n\times m}=A_{n\times m}\cdot E_{m\times m}=A_{n\times m}$.

Если произведения AB и BA существуют, они могут быть как одинаковыми, так и разными. Поэтому произведение матриц, вообще говоря, не коммутативно.

Если произведение матриц коммутативно, то матрицы называются *коммутирующими* или *перестановочными*.

Матрица $A^T_{n\times m}=(a'_{ji})$ называется *транспонированной* к матрице $A_{m\times n}=(a_{ij})$, если $\forall\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\ \ a'_{ji}=a_{ij}$.

Таким образом, из определения мы видим, что при транспонировании матрицы строки становятся столбцами и наоборот.

Операция транспонирования матрицы обладает следующими свойствами:

1) $(A^T)^T=A$;

2) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

3) $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$;

4) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Матрица называется *симметричной*, если $A=A^T$.

1.2 Примеры решения задач

1.2.1 Найти матрицу $2A-3B$, если $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&4&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

Решение

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1&2\cdot2&2\cdot3\\2\cdot(-3)&2\cdot4&2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\-6&8&0\end{pmatrix};$$

$$-3B=-3\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-3)\cdot 0&(-3)\cdot 1&(-3)\cdot(-1)\\(-3)\cdot 2&(-3)\cdot(-2)&(-3)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-6&6&-3\end{pmatrix};$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2&4&6\\-6&8&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-3&3\\-6&6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0&4-3&6+3\\-6-6&8+6&0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&9\\-12&14&-3\end{pmatrix}.$$

1.2.2 Выяснить, какие матрицы можно перемножить. Найти их произведения.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}2&3&6\\6&7&9\\1&-2&6\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\5&-2\end{pmatrix}.$$

Решение

Определим размеры матриц $A_{2\times2}, B_{2\times3}, C_{3\times3}, D_{3\times2}$. Существуют произведения *AB*; *DA*; *BC*; *BD*; *DB*; *CD*. Как видно, если произведение *AB* определено, то это вовсе не означает, что и произведение *BA* определено тоже. В данном случае определены оба произведения только для одной пары: *BD* и *DB*. Их и вычислим:

$$BD=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot5&1\cdot2+(-1)\cdot3+2\cdot(-2)\\0\cdot1+2\cdot(-1)+(-3)\cdot5&0\cdot2+2\cdot3+(-3)\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&-5\\-17&12\end{pmatrix};$$

$$DB=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0&1\cdot(-1)+2\cdot2&1\cdot2+2\cdot(-3)\\-1\cdot1+3\cdot0&-1\cdot(-1)+3\cdot2&-1\cdot2+3\cdot(-3)\\5\cdot1+(-2)\cdot0&5\cdot(-1)+(-2)\cdot2&5\cdot2+(-2)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&-4\\-1&7&-11\\5&-9&16\end{pmatrix}.$$

Как видим, произведения *BD* и *DB* не только не совпадают, но даже имеют разные размеры.

1.2.3 Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$.

Решение

$$A_{2\times3}\Rightarrow A^T_{3\times2}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}.$$

1.3 Примеры для самостоятельной работы

Выполнить действия над матрицами.

1.3.1 $3 \cdot A + 2 \cdot B,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

1.3.2 $A \cdot B,\ B \cdot A,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$

1.3.3 $A \cdot A^T,\ A^T \cdot A,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$

1.3.4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

1.3.5 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3.$

1.3.6 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$

1.3.7 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n,\ a \in \mathbb{R}.$

1.3.8 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n.$

1.3.9 Найти $f(A)$, если $f(x) = 3x^2 - 4,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

1.3.10 Найти все матрицы, перестановочные с $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

1.3.11 Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.3.12 Решить уравнение $3X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.4 Домашнее задание

1.4.1 Выяснить, какие из матриц A, B, C, D можно сложить, а какие перемножить. Выполнить эти действия.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -5 & -1\\ 5 & 10 & -1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}5 & 8 & 7\\ 4 & 10 & 23\end{pmatrix}.$$

1.4.2 Найти матрицу $(2A-B)\cdot C^T$, если

$$A=\begin{pmatrix}0 & 7 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 8\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -5 & 6\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix}.$$

1.4.3 Найти матрицу $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n, \lambda\in\mathbb{R}$.

1.4.4 Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Ответы к заданиям

1.3.1 $\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ -6 & 7 & -8\end{pmatrix}$.

1.3.2 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6 & 9\\ -4 & 6\end{pmatrix}$.

1.3.3 $\begin{pmatrix}15 & 4\\ 4 & 43\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}17 & -2 & 21 & -1\\ -2 & 5 & -3 & 7\\ 21 & -3 & 26 & -2\\ -1 & 7 & -2 & 10\end{pmatrix}$.

1.3.4 $\begin{pmatrix}5\\ 15\\ 25\\ 35\end{pmatrix}$.

1.3.5 $\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$.

1.3.6 $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}.$

1.3.7 $\begin{pmatrix} 1 & an \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.3.8 $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$

1.3.9 $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}.$

1.3.10 $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R}.$

1.3.11 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2+bc=1$.

1.3.12 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

1.4.1 $A+D=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 \\ 5 & 12 & 20 \end{pmatrix}$, $BC=\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} 16 & 5 & -5 \\ 3 & 15 & -15 \end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix} -3 \\ -10 \end{pmatrix}$,

$DC=\begin{pmatrix} 16 \\ 65 \end{pmatrix}$, $DB=\begin{pmatrix} 71 & 55 & 15 \\ 127 & 80 & 78 \end{pmatrix}$.

1.4.2 $\begin{pmatrix} -53 & 97 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}.$

1.4.3 $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$

1.4.4 $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $d^2=-bc$.

2 Определители

2.1 Теоретическая часть

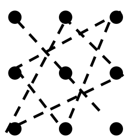
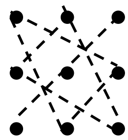
Каждой квадратной матрице $A_{n\times n}$ поставим в соответствие число, которое назовем ее *определителем* или *детерминантом*. Обозначение: $\det A$, $|A|, \Delta$. В развернутом виде определитель n-го порядка записывается в виде таблицы, ограниченной с обеих сторон вертикальными чертами:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычисляем определитель по правилам:

1) если $n=1$, то $\det[a_{11}] = a_{11}$ (определитель матрицы, состоящей из одного элемента, равен этому элементу);

2) если $n=2$, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

3) если $n=3$, то $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$  $-$  $=$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33};$$

4) для $n>3$ определитель вычисляется разложением по элементам строки (столбца).

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}$ – разложение по i-й строке,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$ – разложение по j-му столбцу.

Свойства определителя.

1 При транспонировании матрицы ее определитель не меняется, т. е. $\det A^T = \det A$.

2 При перестановке в определителе двух строк (столбцов) местами определитель лишь поменяет знак.

3 Если определитель содержит две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю.

4 Если в определителе все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на число, то определитель умножится на это число (общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя).

5 Если определитель содержит строку или столбец, целиком состоящий из нулей, то он равен нулю.

6 Если определитель содержит две пропорциональные строки (столбца), то он равен нулю.

7 Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в этой строке записано первое слагаемое, во втором – второе, а все остальные строки (столбцы) этих двух определителей совпадают с соответствующими строками (столбцами) исходного определителя.

8 *Основное свойство определителя.* Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить другую его строку (столбец), умноженную на число, то определитель при этом не изменится.

9 Определитель произведения матриц равен произведению их определителей, т. е. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

10 Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой его строки (столбца) равна нулю.

2.2 Примеры решения задач

Вычислить определители.

2.2.1 $\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 5\cdot 11 = 6 - 55 = -49.$

2.2.2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 33 & 6 \\ 5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 33 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 11 & 1 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 6\cdot(2\cdot 11\cdot(-4) +$

$+1\cdot 1\cdot 5 + 1\cdot(-2)\cdot 2 - 2\cdot 11\cdot 5 - 1\cdot 1\cdot(-4) - 1\cdot(-2)\cdot 2) = 6\cdot(-189) = -1134$.

2.2.3 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} IV\cdot(-2)+I \\ IV\cdot(-1)+I \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -11 & 8 \\ 0 & -7 & -12 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ = [понижаем порядок определителя, разлагая его по первому столбцу] =

$$=1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -7 & -11 & 8 \\ -7 & -12 & 9 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} I\cdot(-1)+II = -\begin{vmatrix} -7 & -11 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & -11 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$II+III$$

= [разлагаем по второй строке] $=-(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 21+6=27$.

Цель преобразований состоит в том, чтобы получить в какой-либо строке (или столбце) все нули, за исключением, разве что, одного элемента.

2.3 Примеры для самостоятельной работы

Найти определители второго порядка.

2.3.1 $\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2.3.2 $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & b-a \end{vmatrix}$.

2.3.3 Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Найти определители третьего порядка.

2.3.4 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

2.3.5 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

2.3.6 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$.

2.3.7 $\begin{vmatrix} 201 & 202 & 201 \\ 200 & 201 & 201 \\ 200 & 200 & 200 \end{vmatrix}.$

2.3.8 $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}.$

2.3.9 $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}.$

Решить уравнения.

2.3.10 $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2.3.11 $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$

Вычислить определители высших порядков.

2.3.12 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

2.3.13 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

2.3.14 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 & -8 \end{vmatrix}.$

2.3.15 $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2.3.16 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

2.3.17 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.3.18 $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

2.3.19 $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$.

2.3.20 $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2.3.21 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

2.3.22 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2.3.23 $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

2.3.24 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

2.4 Домашнее задание

Найти определители.

2.4.1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$.

2.4.2 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & 9 & -18 \\ 7 & 15 & -15 \end{vmatrix}$.

2.4.3 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

2.4.4 $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$.

2.4.5 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

2.4.6 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 12 & 1 \\ 8 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

2.4.7 $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Ответы к заданиям

2.3.1 18.
2.3.2 $-2a^2-2b^2$.
2.3.3 $\{-1;-4\}$.
2.3.4 0.
2.3.5 0.
2.3.6 144.
2.3.7 200.
2.3.8 0.
2.3.9 0.
2.3.10 $\{-4\pm\sqrt{22}\}$.
2.3.11 $\mathbb{R}$.
2.3.12 1.
2.3.13 0.
2.3.14 2.
2.3.15 2.
2.3.16 40.
2.3.17 $2a-b-c-d$.
2.3.18 $9\sqrt{10}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.
2.3.19 $(b-c-d)(b+c+d)(b+c-d)(b-c+d)$.
2.3.20 $(cd-be)^2$.
2.3.21 394.
2.3.22 665.
2.3.23 α^n.
2.3.24 $n!$.

2.4.1 -22.
2.4.2 135.

2.4.3 48.
2.4.4 amn.
2.4.5 -24.
2.4.6 299.
2.4.7 $\alpha^n+\beta^n$.

3 Обратная матрица. Ранг матрицы

3.1 Теоретическая часть

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае квадратная матрица называется *вырожденной*.

Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Свойства обратных матриц.

1 Если матрица A имеет обратную, то A^{-1} тоже имеет обратную, причем $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

2 Если A имеет обратную, и $\alpha \neq 0$, то αA также имеет обратную, причем $\left(\alpha A\right)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot A^{-1}.$

3 Если A имеет обратную, то A^T также имеет обратную, причем $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4 Если матрицы A и B одного порядка имеют обратные, то имеет обратную и их произведение, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Теорема (существования и единственности). Для любой невырожденной квадратной матрицы A существует единственная ей обратная

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A, $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} M_{ij}$.

Пусть A – некоторая матрица, необязательно квадратная. Выделим в ней k строк и k столбцов. Элементы, расположенные на пересечениях выделенных строк и столбцов, образуют определитель k-го порядка, который называется *минором* k-го порядка матрицы A и обозначается M_k.

Рангом $\operatorname{rang} A = r(A)$ матрицы A называется наивысший порядок минора, отличного от нуля. Ранг нулевой матрицы по определению равен нулю.

Элементарными преобразованиями матрицы являются перестановка строк и столбцов; умножение строк и столбцов на число, отличное от 0; прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число.

Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Свойства ранга матрицы.

1 Ранг матрицы не превосходит ни количества ее строк, ни количества столбцов.

2 При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

3 Если $\operatorname{rang} A = 0$, то A – нулевая матрица.

4 Если у матрицы вычеркнуть столбец или строку, целиком состоящую из нулей, то ее ранг при этом не изменится.

5 Если у матрицы вычеркнуть один из двух пропорциональных столбцов (строк), то ее ранг при этом не изменится.

Для нахождения ранга матрицы используют два метода: метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований.

Нахождение обратной матрицы методом Гаусса

Чтобы найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$, составим матрицу $\left(\begin{array}{c|c} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} & 1\ 0 \ldots 0 \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} & 0\ 1 \ldots 0 \\ \ldots\ \ldots \ldots \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} & 0\ 0 \ldots 1 \end{array}\right)$. С помощью элементарных преобразований над строками преобразуем последнюю матрицу так, чтобы слева была единичная матрица, тогда справа будет обратная матрица, т. е. $(A|E) \sim (E|A^{-1})$.

3.2 Примеры решения задач

3.2.1 Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы и методом элементарных преобразований: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 - 2 = 3 \neq 0$$, матрица невырожденная.

1 Метод присоединенной матрицы.
Найдем алгебраические дополнения данной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 0) = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 0) = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Метод Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ I\cdot(-3)+II \\ I+III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II\cdot(-1)\sim \\ II+III \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} III\cdot\frac{2}{3}+I \\ III\cdot 2+II \sim \\ III\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+6-2 & 0-2+2 & -2+0+2 \\ -3+9-6 & 0-3+6 & -6+0+6 \\ 2-3+1 & 0+1-1 & 4+0-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

3.2.2 Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Выбираем любой ненулевой элемент матрицы: $a_{11} = 2 = M_1 \neq 0$. Окаймляем его, получаем минор второго порядка:

$$M_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0;$$

$$M_3^1=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=0;\ M_3^2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=0;\ M_3^3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0;$$

$$M_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -5 & 0 & -7\\ 0 & 5 & 0 & 7\\ 0 & -1 & -1 & 5\\ 1 & 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=0\Rightarrow r(A)=3.$$

3.2.3 Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1 & 5\\ -2 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение

Проведем элементарные преобразования над строками матрицы так, чтобы получить как можно больше нулевых строк. Поменяем первую и вторую строки местами:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 5\\ -2 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ I\cdot 2+II\\ I+III\\ I\cdot(-2)+IV\end{array}\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 0 & 7\\ 0 & 5 & 0 & 7\\ 0 & -6 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ II+IV\\ II\cdot(-1)+III\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ II\cdot(-6)+IV\end{array}\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 5 & -32\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=3.$$

3.3 Примеры для самостоятельной работы

Найти матрицы, обратные данным.

3.3.1 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$

3.3.2 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

3.3.3 $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3.3.4 $D=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

3.3.5 $P=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & -3 & 2\\ 1 & -4 & 3\end{pmatrix}$.

3.3.6 $S=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

3.3.7 Вычислить значение выражения.

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-8\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}+16\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-2}.$$

Решить матричные уравнения.

3.3.8 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$.

3.3.9 $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$.

3.3.10 $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$.

Найти матрицы, обратные к данным.

3.3.11 $$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

3.3.12 $$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Найти ранг матриц.

3.3.13 $$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}.$$

3.3.14 $$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 10 & 3\\ 2 & 0 & 4 & -1\\ 16 & 4 & 52 & 9\\ 8 & -1 & 6 & -7\end{pmatrix}.$$

3.3.15 $$C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 6\\ 7 & 1 & -3 & 10\\ 17 & 1 & -7 & 22\\ 3 & 4 & -2 & 10\end{pmatrix}.$$

3.3.16 $$D=\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}.$$

3.3.17 $$F=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

3.3.18 Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ при различных значениях λ.

3.4 Домашнее задание

Найти матрицы, обратные данным.

3.4.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4.2 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4.3 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матриц.

3.4.4 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 4 & 12 \\ 6 & 3 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4.5 $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4.6 Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$ при различных значениях λ.

Ответы к заданиям

3.3.1 $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

3.3.2 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

3.3.3 $C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$

3.3.4 $D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$

3.3.5 $P^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1 & -14 & 11\\ 2 & -2 & -2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}.$

3.3.6 $S^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$

3.3.7 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

3.3.8 $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$

3.3.9 $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}.$

3.3.10 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$

3.3.11 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$

3.3.12 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

3.3.13 $r = 2$.
3.3.14 $r = 3$.
3.3.15 $r = 2$.
3.3.16 $r = 3$.
3.3.17 $r = 5$.
3.3.18 $r = 3,$ если $\lambda \neq 0;$ $r = 2,$ если $\lambda = 0$.

3.4.1 $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4.2 $B^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4.3 $C^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4.4 $r = 3$.
3.4.5 $r = 4$.
3.4.6 $r = 3,$ если $\lambda \in \mathbb{R}$.

4 Системы линейных алгебраических уравнений. Решение невырожденных систем

4.1 Теоретическая часть

Система m уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы;

b_i – свободные члены;

x_j – неизвестные системы, $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

Такую систему удобно записывать в матричной форме

$$A\cdot X=B,$$

где A – матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей системы*, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$;

B – столбец свободных членов b_i, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$;

X – столбец неизвестных x_j, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Расширенной матрицей системы называется матрица коэффициентов системы, дополненная столбцом свободных членов:

$$A|B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений называется n значений неизвестных $x_1=c_1,\ x_2=c_2,\ \dots,\ x_n=c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и, если система совместна, найти ее решение.

Система называется *однородной*, если все ее свободные члены равны 0. Однородная система всегда совместна, т. к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ – решение системы. Это решение называют нулевым или тривиальным.

Решение невырожденных систем

Пусть дана система n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определителем системы. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется невырожденной.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{4.1}$$

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом решения системы.*

Если $\Delta \neq 0$, решение системы уравнений можно найти по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_i $(i = \overline{1,n})$ – определитель, полученный из определителя основной матрицы системы путем замены i-го столбца столбцом свободных членов.

4.2 Примеры решения задач

4.2.1 Решить по формулам Крамера систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2. \end{cases}$

Решение

Вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 3 + 4 - 2 - 12 - 9 = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 72 + 12 + 8 - 4 - 48 - 36 = 4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 16 - 4 - 8 - 36 = 6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 4 - 8 - 12 - 2 = -2.$$

По формулам Крамера имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ответ: $(2;3;-1)$.

4.2.2 Решить матричным способом систему $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

Решение

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 3 - 12 + 8 - 45 + 2 = -30\,.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, которую найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{31} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

Следовательно, $A^{-1} = -\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}$.

По формуле $X = A^{-1} \cdot B$ получаем

$$X = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -14 - 16 \\ 196 - 256 \\ -266 + 176 \end{pmatrix} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ -60 \\ -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.
Ответ: $(1;2;3)$.

4.3 Примеры для самостоятельной работы

Решить по формулам Крамера системы.

4.3.1 $\begin{cases} 4x + 3y = -5, \\ 5x - 2y = -12. \end{cases}$

4.3.2 $\begin{cases} 3x-8y=4, \\ 2x+5y=13. \end{cases}$

4.3.3 $\begin{cases} 3x+2y-4z=8, \\ 2x+4y-5z=11, \\ 4x-3y+2z=1. \end{cases}$

4.3.4 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7, \\ x_1+4x_2+2x_3=-1, \\ x_1-4x_2 \qquad =-5. \end{cases}$

4.3.5 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=9, \\ 7x_1+8x_2 \qquad =-6. \end{cases}$

4.3.6 $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \qquad +8x_4=0, \\ \qquad x_2-x_3+3x_4=0, \\ \qquad\qquad x_3+x_4=1, \\ x_1 \qquad\qquad +x_4=-24. \end{cases}$

4.3.7 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2 \qquad -3x_4=1, \\ 3x_1 \qquad -x_3+x_4=-2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-3. \end{cases}$

Решить матричным способом системы.

4.3.8 $\begin{cases} 3x-8y=4, \\ 2x+5y=13. \end{cases}$

4.3.9 $\begin{cases} 3x-4y=-3, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

4.3.10 $\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-6y+3z=-1, \\ x-y+z=1. \end{cases}$

4.3.11 $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$

4.3.12 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y+2z=-5, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$

4.3.13 $\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ 5x + y + 3z = 14, \\ 2x + y + 2z = 5. \end{cases}$

4.4 Домашнее задание

Решить системы уравнений по формулам Крамера и матричным способом.

4.4.1 $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 5x + 3y = 5. \end{cases}$

4.4.2 $\begin{cases} -x + 2y = -4, \\ 3x - 4y = 6. \end{cases}$

4.4.3 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 10, \\ 3x + y - z = 4. \end{cases}$

4.4.4 $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$

4.4.5 $\begin{cases} x + 5y + z = -2, \\ 2x - 4y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 3. \end{cases}$

Ответы к заданиям

4.3.1 $(-2;1)$.
4.3.2 (4; 1).
4.3.3 (2; 3; 1).
4.3.4 $(-1;1;-2)$.
4.3.5 $(-2;1;2)$.
4.3.6 $(-9;46;1;-15)$.
4.3.7 $(0;2;1;-1)$.
4.3.8 (4; 1).
4.3.9 $(13/11;18/11)$.
4.3.10 $(2;0;-1)$.
4.3.11 (1; 2; 3).
4.3.12 $(1;2;-2)$.
4.3.13 $(2;-5;3)$.
4.4.1 $(7;-10)$.

4.4.2 $(-2;-3)$.
4.4.3 (1; 4; 3).
4.4.4 (1; 1; 1).
4.4.5 $(1;-1;2)$.

5 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

5.1 Теоретическая часть

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основная матрица системы,

$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ – расширенная матрица системы.

Теорема Кронекера – Капелли

Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы A был равен рангу расширенной матрицы системы $A|B$. Причем если $r(A) = r(A|B) = n$, где $n-$ число неизвестных, то система имеет единственное решение, а если $r(A) = r(A|B) = r < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Решение системы уравнений методом Гаусса

Прямой ход метода Гаусса.

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований над строками сведем ее к треугольной или трапециевидной форме:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_{nn} \end{array}\right); \qquad (5.1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a'_{rr} & a'_{rr+1} & & a'_{rn} & b'_r \end{array}\right). \qquad (5.2)$$

Обратный ход метода Гаусса.

В случае (1) $r(A) = r(A|B) = n$, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система имеет единственное решение. Перейдем от полученной матрицы к системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_2 = b'_2, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим x_n, подставляем его значение в предыдущее уравнение и находим x_{n-1} и т. д.

В случае (5.2) $r(A) = r(A|B) = r < n$, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система имеет бесконечное множество решений. Базисный минор матрицы (5.2) $M_r = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1r} \\ 0\ a'_{22} \ldots a'_{2r} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ 0\ \ 0\ \ 0\ a'_{rr} \end{vmatrix}$. Значит, неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – базисные, а все остальные – свободные.

Преобразованная система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,r}x_r + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2\,r}x_r + a'_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + a'_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{r\,n}x_n = b'_r. \end{cases}$$

Переносим слагаемые со свободными неизвестными в правую часть и с помощью обратного хода метода Гаусса выражаем базисные неизвестные через свободные.

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Жордана – Гаусса

По методу Гаусса основную матрицу системы приводят к ступенчатому виду, т. е. к виду, когда ниже элементов главной диагонали находятся нули. В отличие от метода Гаусса, по методу Жордана – Гаусса, выполняя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, приводят ее к виду, когда на главной диагонали стоят единицы, а выше и ниже главной диагонали – нули.

Системы линейных однородных уравнений.

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна$\left(r\left(A\right) = r\left(A|B\right)\right)$, она имеет нулевое (тривиальное) решение.

Для того чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был меньше числа неизвестных, т. е. $r\left(A\right) < n$.

Для того чтобы система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее основной матрицы Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

5.2 Примеры решения задач

5.2.1 Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

Решение

Найдем ранг основной и расширенной матрицы системы методом элементарных преобразований:

$$
\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ I-II\cdot 2 \\ I-III\cdot 2 \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ II+III \end{array}\sim
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right).
$$

$r\left(A\right)=2,\ r\left(A|B\right)=3,$ следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система не имеет решений.

Ответ: система не совместна.

5.2.2 Исследовать систему на совместность и решить методом Гаусса.

$$
\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=-3, \\ x_1+3x_2-5x_3=0, \\ -x_1+4x_2+x_3=3. \end{cases}
$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к треугольному (5.1) или трапециевидному (5.2) виду:

$$
\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ I-II \\ I+III \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ III:2 \end{array}\sim
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ II+III\cdot 5 \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ III:\left(-3\right) \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).
$$

$r\left(A\right)=3,\ r\left(A|B\right)=3,\ n=3$, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система имеет единственное решение.

По последней матрице составляем систему:

$$
\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=-3, \\ \quad -5x_2+2x_3=-3, \\ \qquad\qquad x_3=1. \end{cases}
$$

$$x_3 = 1;$$
$$-5x_2 + 2\cdot 1 = -3;$$
$$x_2 = 1;$$
$$x_1 - 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = -3;$$
$$x_1 = 2.$$

Ответ: $(2;1;1)$.

5.2.3 Исследовать систему на совместность и решить методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 16. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к треугольному (5.1) или трапециевидному (5.2) виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 & -12 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I\cdot 3 - II \\ I\cdot 4 - III \\ III - IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -2 & 1 & 7 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II + III\cdot 2 \\ II + IV \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r(A) = 3$, $r(A|B) = 3$, $n = 4$, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система имеет бесконечное множество решений.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ – базисный минор.}$$

x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные, x_4 – свободная.

По последней матрице запишем систему.

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 = 5, \\ & -2x_2 & +x_3 & +7x_4 = -14, \\ & & -x_3 & +5x_4 = -50. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = c, \\ x_1 \ -x_2 \ +2x_3 = 5 + c, \\ \quad -2x_2 \ +x_3 = -14 - 7c, \\ \qquad -x_3 = -50 - 5c. \end{cases}$$

$$x_3 = 50 + 5c,$$

$$-2x_2 + 50 + 5c = -14 - 7c,$$
$$x_2 = 32 + 6c,$$

$$x_1 - 32 - 6c + 100 + 10c = 5 + c,$$
$$x_1 = -63 - 3c.$$

Ответ: $\left(-63 - 3c;\ 32 + 6c;\ 50 + 5c;\ c,\right),\ c \in \mathbb{R}.$

5.2.4 Решить систему уравнений методом Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к треугольному (5.1) или трапециевидному (5.2) виду:

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I \cdot 3 - II \cdot 2 \\ I - III \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & -13 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \cdot 11 - II \\ \\ II + III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 0 & -20 & 2 \\ 0 & -11 & -13 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} I : 2 \\ \\ III : (-8) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & -11 & -13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I + III \cdot 10 \\ II + III \cdot 13 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I : 11 \\ II : (-11) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Ответ: $(1;-1;1)$.

5.2.5 Решить систему уравнений методом Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к треугольному (5.1) или трапециевидному (5.2) виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I - II\cdot 2 \\ I\cdot 3 - III\cdot 2 \\ I\cdot 7 - IV\cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 39 & -15 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV:3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} I + II \\ \\ II - III \\ II - IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 16 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I:2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(A|B) = 2$, $n = 4$. По теореме Кронекера – Капелли система имеет бесконечное множество решений.

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 -$ базисный минор, следовательно, $x_1, x_2 -$ базисные неизвестные, $x_3, x_4 -$ свободные. По последней матрице составим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 - 5x_4 = -1, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3; \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_1 = -1 - 8c_1 + 5c_2, \\ x_2 = -3 - 13c_1 + 5c_2. \end{cases}$

Ответ: $\left(-1 - 8c_1 + 5c_2; -3 - 13c_1 + 5c_2; c_1; c_2\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

5.2.6 Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 4x + \quad 5z = 0, \\ -x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

Решение

Найдем определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 10 - 10 + 24 = 48.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное тривиальное решение $x = y = z = 0$.

Ответ: $(0;0;0)$.

5.2.7 Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x - 5y + 4z = 0, \\ x + 17y + 4z = 0. \end{cases}$$

Решение

Выполняя элементарные преобразования строк, вычислим ранг основной матрицы системы:

$$\left(A|B\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ I \cdot 2 - II \\ I \cdot 3 - III \\ I - IV \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II \cdot 2 - III \\ II \cdot 2 + IV \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A)=2,\ n=3,\ r(A)<n,$ следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

$M_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=7\neq 0-$ базисный минор, $x,y-$ базисные неизвестные, $z-$ свободная.

По последней матрице запишем систему $\begin{cases}x+3y+2z=0,\\ 7y+z=0,\end{cases}$ откуда

$$\begin{cases}z=c,\\ y=-\dfrac{1}{7}c,\\ x=-3\cdot\left(-\dfrac{1}{7}c\right)-2c;\end{cases}\qquad \begin{cases}z=c,\\ y=-\dfrac{1}{7}c,\\ x=-\dfrac{11}{7}c.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{11}{7}c;-\dfrac{1}{7}c;c\right),\ c\in\mathbb{R}.$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

Исследуйте на совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решите их методом Гаусса.

5.3.1 $\begin{cases}x+5y-z=3,\\ 2x+4y-3z=2,\\ 3x-y-3z=-7.\end{cases}$

5.3.2 $\begin{cases}x+2y-4z=1,\\ 2x+y-5z=-1,\\ x-y-z=-2.\end{cases}$

5.3.3 $\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3-x_4=1,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=2,\\ 2x_1-3x_2+2x_3-11x_4=-4.\end{cases}$

5.3.4 $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2,\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5,\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3.\end{cases}$

5.3.5 $\begin{cases}4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3,\\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2,\\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1.\end{cases}$

5.3.6 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

5.3.7 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

5.3.8 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = -1. \end{cases}$

5.3.9 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

5.3.10 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1, \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

Исследовать совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ.

5.3.11 $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

5.3.12 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

5.3.13 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$

Решить системы линейных однородных уравнений.

5.3.14 $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ \quad 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.3.15 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.3.16 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 4x + 5y + 6z = 0, \\ 7x + 8y + 9z = 0. \end{cases}$

5.3.17 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

5.3.18 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

5.3.19 $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

5.4 Домашнее задание

Исследуйте на совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решите их методом Гаусса.

5.4.1 $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

5.4.2 $\begin{cases} 3x + y + z = 8, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$

5.4.3 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

5.4.4 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 3. \end{cases}$

5.4.5 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$

5.4.6 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

5.4.7 Исследовать совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ.

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

Решить системы линейных однородных уравнений.

5.4.8 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.4.9 $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$

5.4.10 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x - 3y - z = 0, \\ 3x - 5y + 2z = 0. \end{cases}$

5.4.11 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Ответы к заданиям

5.3.1 $(-4;1;-2)$.

5.3.2 $(2c-1;c+1;c), c \in \mathbb{R}$.

5.3.3 $\left(c;\frac{2}{3}c;\frac{5}{14};\frac{3}{7}\right), c\in\mathbb{R}$.

5.3.4 Система не совместна.

5.3.5 $\left(2+2c;\frac{4}{5}-\frac{1}{5}c;\frac{11}{5}+\frac{16}{5}c;c\right),\ c\in\mathbb{R}$.

5.3.6 $\left(-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2;\frac{10}{11}-\frac{5}{11}c_1+\frac{1}{11}c_2;c_1;c_2\right),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5.3.7 $(-1;3;-2;2)$.

5.3.8 $\left(-\frac{2}{5}c_1+\frac{4}{5}c_2;1-\frac{2}{5}c_1-\frac{11}{5}c_2;c_1;c_2\right),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5.3.9 $\left(\frac{1+c_3}{3};\frac{1+3c_1+3c_2-5c_3}{3};c_1;c_2;c_3\right),\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

5.3.10 $(-8;\ 3+c;\ 6+2c;\ c),\ c\in\mathbb{R}$.

5.3.11 Если $\lambda\neq 0$, то система не совместна; если $\lambda=0$, то $\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}c_1-\frac{13}{2}c_2;\ -\frac{7}{2}-\frac{7}{2}c_1-\frac{19}{2}c_2;\ c_1;\ c_2\right),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5.3.12 Если $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, то $\left(\frac{1}{\lambda+3};\frac{1}{\lambda+3};\frac{1}{\lambda+3};\frac{1}{\lambda+3}\right)$; если $\lambda=-3$, то система не совместна; если $\lambda=1$, то $(1-c_1-c_2-c_3;\ c_1;\ c_2;\ c_3),\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

5.3.13 Если $\lambda=8$, то $(c_1;\ 4+2c_1-2c_2;\ 3-2c_2;\ c_2), c_1,c_2\in\mathbb{R}$; если $\lambda\neq 8$, то $(0;\ 4-2c;\ 3-2c;\ c), c\in\mathbb{R}$.

5.3.14 (0; 0; 0).

5.3.15 $(c;c;c),\ c\in\mathbb{R}$.

5.3.16 $(c;-2c;c),\ c\in\mathbb{R}$.

5.3.17 $\left(\frac{3}{2}c_1;c_2;c_1;c_2\right),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5.3.18 $(8c_1-7c_2;-6c_1+5c_2;c_1;c_2),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5.3.19 $\left(c_1;c_2;-\frac{5}{2}c_1+5c_2;\frac{7}{2}c_1-7c_2\right)c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5.4.1 $\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}c;-\frac{7}{5};c\right),\ c\in\mathbb{R}$.

5.4.2 (1; 2; 3).

5.4.3 $(-2;0;1;-1)$.

5.4.4 Система не совместна.

5.4.5 $(-c;0;c;1),\ c\in\mathbb{R}$.

5.4.6 $(c_1;1+2c_1-c_2;9-4c_2;-3;c_2),\ c_{1,}c_2\in\mathbb{R}$.

5.4.7 Если $\lambda(\lambda+3)\neq 0,$ то $\left(\frac{1}{\lambda+3};\frac{1}{\lambda+3};\frac{1}{\lambda+3}\right)$; если $\lambda=-3,$ то система не совместна; если $\lambda=0,$ то $(1-c_1-c_2;c_1;c_2), c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

5.4.8 $(c;3c;5c), c\in\mathbb{R}$.

5.4.9 (0; 0; 0).

5.4.10 $(11c;7c;c),\ c\in\mathbb{R}$.

5.4.11 $\left(\frac{3c_1-13c_2}{17};\frac{19c_1-20c_2}{17};c_1;c_2\right), c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Список литературы

1 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

2 **Гусак, А. А.** Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – Т. 1.

3 Руководство к решению задач по высшей математике: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1.

4 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – Ч. 1.

5 Сборник задач по курсу высшей математики: учебное пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1973.