ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе № 1 для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Могилев 2011

УДК 517
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» января 2011 г., протокол № 8

Составители: Т. Ю. Орлова;
С. Ф. Плешкунова;
канд. физ.-мат. наук Л. И. Сотская

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. МГУ им. А. А. Кулешова
Н. В. Кожуренко

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе № 1 предназначены для студентов технических специальностей заочной формы обучения.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнёв

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка И. А. Алексеюс

Подписано в печать 15.09.2011 . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л.2,09 . Уч.-изд. л.2,0 . Тираж 315 экз. Заказ № 630.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилёв, пр. Мира, 43

Содержание

1 Общие требования к оформлению контрольной работы

1.1 Выбор варианта задания

Номер варианта задания определяется по двум последним цифрам зачетки: если это число больше 30, то вариант определяют вычитанием числа 30, если больше 60 – то вычитанием числа 60 и если больше числа 90 – то вычитанием числа 90.

1.2 Правила оформления контрольной работы

Контрольную работу выполняют в отдельной тонкой тетради.

На обложке тетради следует написать номер контрольной работы, номер варианта, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы и номер зачетной книжки.

Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. Каждую задачу следует начинать с новой страницы. При этом перед решением каждой задачи полностью переписывают ее условие. В тетради обязательно оставляют поля.

Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы, вычисления проводить в строгом порядке. Решение каждой задачи необходимо доводить до ответа, требуемого условием. В конце контрольной работы указать использованную при выполнении контрольной работы литературу.

Студент не допускается к сдаче экзамена без предъявления тетради с зачтенной контрольной работой.

2 Решение типового варианта

Задание 1

Дана система линейных алгебраических уравнений.

Требуется:

1) решить систему по формулам Крамера;

2) записать систему в матричной форме и решить ее матричным способом;

3) решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 4y - z = 5, \\ 2x - y + 3z = 9. \end{cases}$$

Решение

1 По формулам Крамера $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=12-4-24-1=-17;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}14 & 2 & 3\\ 5 & 4 & -1\\ 9 & -1 & 3\end{vmatrix}=168-15-18-108-30-14=-17;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 14 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ 2 & 9 & 3\end{vmatrix}=15-28-30+9=-34;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 14\\ 0 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 9\end{vmatrix}=36+20-112+5=-51.$$

Находим решение системы: $x=\dfrac{-17}{-17}=1,\quad y=\dfrac{-34}{-17}=2,\quad z=\dfrac{-51}{-17}=3.$

2 Для нахождения решения СЛАУ с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix};\qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}14\\ 5\\ 9\end{pmatrix}.$$

Решение СЛАУ в матричной форме имеет вид $X=A^{-1}B$, где A^{-1} – матрица, обратная матрице A. Найдем матрицу A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

где $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-17$, A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} $(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3})$, $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 3-(-1)\cdot(-1)=12-1=11;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-\left(0\cdot 3-(-1)\cdot 2\right)=-2;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-8;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-9;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-14;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4.$$

Обратная матрица имеет вид: $A^{-1}=-\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}11 & -9 & -14\\ -2 & -3 & 1\\ -8 & 5 & 4\end{pmatrix}.$

Находим решение системы:

$$X=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}11 & -9 & -14\\ -2 & -3 & 1\\ -8 & 5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\ 5\\ 9\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}154-45-126\\ -28-15+9\\ -112+25+36\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-17\\ -34\\ -51\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Итак, решение системы: $x=1,\ \ y=2,\ \ z=3$.

3 Решим систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы:

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 9\end{array}\right).$$

Проводя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получим по одному ненулевому элементу в каждом столбце основной матрицы (до черты):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 3 & 9\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{III}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 0 & -5 & -3 & -19\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{II}\cdot 3+\mathrm{I}\\ \\ \mathrm{II}\cdot(-3)+\mathrm{III}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 14 & 0 & 29\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 0 & -17 & 0 & -34\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \mathrm{III}:(-17)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 14 & 0 & 29\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{III}\cdot(-14)+\mathrm{II}\\ \mathrm{III}\cdot(-4)+\mathrm{II}\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&0&-1&-3\\0&1&0&2\end{array}\right)\text{II}\cdot(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&0&1&3\\0&1&0&2\end{array}\right).$$

Для последней матрицы система имеет вид: $\begin{cases}x=1,\\z=3,\\y=2.\end{cases}$

Ответ: $(1;2;3)$.

Задание 2

Даны четыре точки: $A(-1,3,4)$, $B(3,2,-4)$, $C(1,5,-1)$, $D(2,0,3)$.

Требуется:

1) составить уравнение прямой AB и указать ее направляющий вектор;

2) составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB;

3) найти объем пирамиды $ABCD$;

4) найти угол между прямыми AB и CD;

5) составить уравнение плоскости ABC и указать ее нормальный вектор;

6) составить уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

7) определить, образуют ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ базис;

8) найти угол между прямой AD и плоскостью ABC;

9) составить уравнение плоскости α, проходящей через точки A,C, параллельной прямой BD;

10) найти площадь треугольника ABC;

11) найти расстояние от точки B до плоскости α.

Решение

1 Канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Тогда $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-8}$ – канонические уравнения прямой AB; $\vec{s}=(4,-1,-8)$ – направляющий вектор прямой AB.

2 Так как искомая плоскость перпендикулярна прямой AB, то направляющий вектор прямой является нормальным вектором плоскости. Значит, $\vec{n}=\vec{s}=(4,-1,-8)$ – нормальный вектор плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Следовательно, искомое уравнение

$$4(x-2) - y - 8(z-3) = 0 \quad \text{или} \quad 4x - y - 8z + 16 = 0.$$

3 Объем пирамиды $ABCD$ вычислим по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|,$$

где $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ – смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$ находятся по формуле

$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

В нашем случае

$$\overrightarrow{AB} = (3+1,\ 2-3,\ 4+4) = (4, -1, -8),\ \overrightarrow{AC} = (2, 2, -5),\ \overrightarrow{AD} = (3, -3 -1).$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 48 + 15 + 48 - 60 - 2 = 41.$$

Значит, $V_{ABCD} = \dfrac{41}{6}.$

4 Косинус угла между прямыми найдем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

где $\vec{s_1}, \vec{s_2}$ – направляющие векторы прямых, $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

В нашем случае $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AB} = (4, -1, -8)$, $\vec{s}_2 = \overrightarrow{CD} = (1, -5, 4)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{4 + 5 - 32}{\sqrt{16 + 1 + 64}\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{-23}{9\sqrt{42}};$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{23}{9\sqrt{42}}\right) = \pi - \arccos\frac{23}{9\sqrt{42}}.$$

5 Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем: $\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-4 \\ 4 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad 21(x+1)+4(y-3)+10(z-4)=0,$

$21x+4y+10z-31=0$ – общее уравнение плоскости ABC;

$\vec{n}=(21,4,10)$ – нормальный вектор плоскости.

6 Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=(m,n,p)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальный вектор плоскости ABC является направляющим вектором искомой прямой, т. е. $\vec{s}=\vec{n}=(21,4,10)$. Значит, $\frac{x-2}{21}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{10}$ – канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.

7 Три вектора образуют базис в пространстве, если они некомпланарны, т. е. их смешанное произведение не равно нулю. Так как $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}=-8+48+15+48-60-2=41\neq 0$, то векторы $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ некомпланарны и, значит, образуют базис в пространстве.

8 Синус угла между прямой и плоскостью найдем по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{n}=(A,B,C)$;

$\vec{s}$ – направляющий вектор прямой, $\vec{s}=(m,n,p)$.

В нашем случае $\vec{n}=(21,4,10)$, $\vec{s}=\overrightarrow{AD}=(3,-3,-1)$.

$$\sin\varphi=\frac{|63-12-10|}{\sqrt{441+16+100}\cdot\sqrt{9+9+1}}=\frac{41}{\sqrt{10583}};$$

$$\varphi=\arcsin\frac{41}{\sqrt{10583}}.$$

9 Уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и параллельной вектору $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$

Искомая плоскость проходит через точки A, C и параллельна вектору $\overrightarrow{BD} = (-1, -2, 7)$. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-4 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0,\ 4(x+1) - 9(y-3) - 2(z-4) = 0,$$

$4x - 9y - 2z + 39 = 0$ − уравнение плоскости α.

10 Площадь треугольника ABC найдем по формуле

$$S_{\vartriangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 21\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k};$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{21^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{557};$$

$$S_{\vartriangle ABC} = \frac{\sqrt{557}}{2}.$$

11 Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ найдем по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следовательно, $d = \rho(B, \alpha) = \dfrac{|4 \cdot 3 - 9 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 39|}{\sqrt{16 + 81 + 4}} = \dfrac{41}{\sqrt{101}}.$

Задание 3

Построить линию, определяемую уравнением

$$4x^2 + 4x - 8y^2 + 24y = 25.$$

Решение

Используя формулу

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2,$$

выделяем полные квадраты двучленов:

$$4x^2 + 4x - 8y^2 + 24y = 25;$$

$$4\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 1 - 8\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + 18 = 25;$$

$$4 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 8 \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 8; \quad \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{1} = 1.$$

Так как уравнение гиперболы с центром в точке $O_1\left(x_0; y_0\right)$ и полуосями a и b (рисунок 1) имеет вид:

$$\frac{\left(x - x_0\right)^2}{a^2} - \frac{\left(y - y_0\right)^2}{b^2} = 1,$$

то полученное нами уравнение является уравнением гиперболы с действительной полуосью $a = \sqrt{2}$ и мнимой полуосью $b = 1$. Центр гиперболы находится в точке $O_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

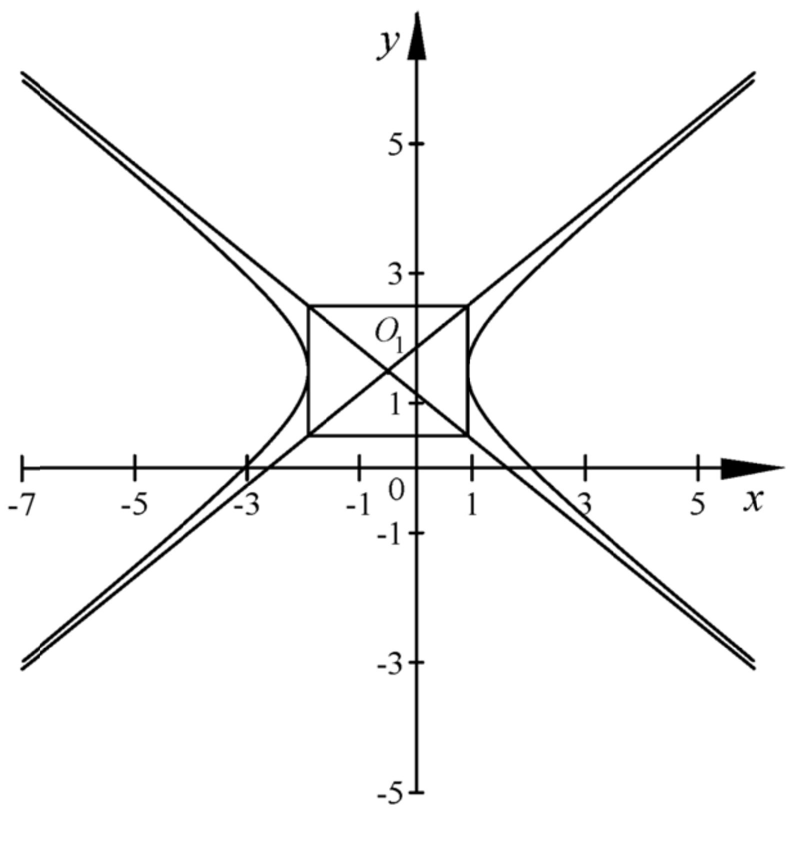

Рисунок 1

Задание 4

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^3-3}{2-7x^3+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+13}-\sqrt{6x-2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{5-3x}\right)^{2x-1}$.

При выполнении задания применим свойства пределов при условии, что все пределы существуют и конечны:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \quad (c=const)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Таблицу эквивалентных бесконечно малых функций ($\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$):

1) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

2) $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

3) $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;

4) $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

5) $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

6) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;

7) $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^3-3}{2-7x^3+5x}$.

Имеем неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x^3-3}{2-7x^3+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{7x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-2-\frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-7+\frac{5}{x^2}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0,\ \left(n>0\right)\right]=\frac{0-2-0}{0-7+0}=\frac{2}{7}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^3-3}{2-7x^3+5x}=\dfrac{2}{7}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+13}-\sqrt{9x-2}}$.

Непосредственная подстановка предельного значения $x=3$ приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Числитель разложим на множители, переведем иррациональность из знаменателя в числитель, умножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x+13}+\sqrt{2x-2}$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+13}-\sqrt{6x-2}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{\sqrt{x+13}-\sqrt{6x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+\sqrt{6x-2}}{\sqrt{x+13}+\sqrt{6x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)\left(\sqrt{x+13}+\sqrt{6x-2}\right)}{(x+13)-(6x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)\left(\sqrt{x+13}+\sqrt{6x-2}\right)}{-5x+15}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)\left(\sqrt{x+13}+\sqrt{6x-2}\right)}{-5(x-3)}=-\frac{1}{5}\cdot\lim_{x\to 3}(x+1)\left(\sqrt{x+13}+\sqrt{6x-2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot(3+1)\left(\sqrt{3+13}+\sqrt{6\cdot 3-2}\right)=-\frac{1}{5}\cdot 4\cdot 8=-\frac{32}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+13}-\sqrt{6x-2}}=-\dfrac{32}{5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\operatorname{tg}3x}$.

Непосредственная подстановка предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Используем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot\operatorname{tg}3x}=\left[\begin{array}{l}1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,\\ \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x\cdot\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 3x\cdot\sin^2 2x}{x\cdot\sin 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 3x\cdot\dfrac{\sin^2 2x}{\left(2x\right)^2}\cdot\left(2x\right)^2}{x\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\left(2x\right)^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 3x\cdot 4x^2}{3x^2}=$$

$$=\begin{bmatrix} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{(2x)^2}=1, \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1 \end{bmatrix}=\frac{8}{3}.$$

Этот пример можно выполнить иначе с использованием эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}=\begin{bmatrix} \text{при } x\to 0 \\ 1-\cos 4x \sim 8x^2, \\ \operatorname{tg} 3x \sim 3x \end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{x\cdot 3x}=\frac{8}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}=\dfrac{8}{3}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1-3x}{5-3x}\right)^{2x-1}$.

Непосредственная подстановка предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(1^{\infty}\right)$. Используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1-3x}{5-3x}\right)^{2x-1}=\left[\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1-3x}{5-3x}\right)=1;\ \lim_{x\to \infty}(2x-1)=\infty\right]=(1)^{\infty}=$$

$$=\left[\frac{1-3x}{5-3x}=1+\frac{1-3x}{5-3x}-1=1+\frac{1-3x-5+3x}{5-3x}=1+\frac{-4}{5-3x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to \infty}\left[\left(1+\frac{-4}{5-3x}\right)^{\frac{5-3x}{-4}}\right]^{\frac{-4}{5-3x}\cdot(2x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4}{5-3x}\cdot(2x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x+4}{5-3x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(-8+4\cdot\frac{1}{x}\right)}{x\left(5\cdot\frac{1}{x}-3\right)}}=e^{\frac{8}{3}}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1-3x}{5-3x}\right)^{2x-1}=e^{\frac{8}{3}}$.

Задание 5

Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y=\sin\left(2x^2+2x\right)$.

При решении воспользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных.

Правила дифференцирования:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

2) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

3) $\left(cu\right)' = c \cdot u'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (v \neq 0)$;

5) если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, то $y'_x = f'(u) \cdot u'$.

Таблица производных основных элементарных функций:

1) $\left(c\right)' = 0$;

2) $\left(x\right)' = 1$;

3) $\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ \left(\alpha \in \mathbb{R}\right)$;

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

5) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

6) $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$;

7) $\left(e^x\right)' = e^x$;

8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;

9) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

10) $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

11) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

12) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

13) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

14) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

16) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

17) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение

Дифференциал первого порядка функции $y = f\left(x\right)$ находится по формуле $dy = y'dx$.

Находим производную функции $y = \sin\left(2x^2 + 2x\right)$:

$$y' = \left(\sin\left(2x^2 + 2x\right)\right)' = \cos\left(2x^2 + 2x\right) \cdot \left(2x^2 + 2x\right)' =$$
$$= \cos\left(2x^2 + 2x\right) \cdot \left(2 \cdot 2x + 2\right) = \cos\left(2x^2 + 2x\right) \cdot \left(4x + 2\right).$$

Имеем следующее: $dy = \cos\left(2x^2 + 2x\right) \cdot \left(4x + 2\right)dx$.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y и определяется по формуле $d^2y = y''dx^2$, где $y'' = (y')'$ – вторая производная функции y.

Находим вторую производную функции $y = \sin\left(2x^2 + 2x\right)$:

$$y''=\left(y'\right)'=\left(\cos\left(2x^2+2x\right)\cdot\left(4x+2\right)\right)'=$$

$$=\left(\cos\left(2x^2+2x\right)\right)'\cdot\left(4x+2\right)+\cos\left(2x^2+2x\right)\cdot\left(4x+2\right)'=$$

$$=-\sin\left(2x^2+2x\right)\cdot\left(2\cdot 2x+2\right)\cdot\left(4x+2\right)+\cos\left(2x^2+2x\right)\cdot 4=$$

$$=-\sin\left(2x^2+2x\right)\cdot\left(4x+2\right)^2+4\cos\left(2x^2+2x\right).$$

Ответ: $d^2y=\left[-\left(4x+2\right)^2\sin\left(2x^2+2x\right)+4\cos\left(2x^2+2x\right)\right]dx^2$.

Задание 6

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $f\left(x\right)$ в указанной точке x_0, если:

1) $y=\dfrac{x^2-2}{x+1}$, $x_0=0$;

2) $\cos y-5x+xy=0$, $x_0=0, 0<y<\pi$;

3) $\begin{cases}x=t^3+1,\\ y=t^2;\end{cases}$ $x_0=9$;

4) $y=x^{2x-3}$, $x_0=1$.

Решение

Уравнение касательной к графику функции $f\left(x\right)$ в точке x_0 имеет вид:

$$y_к=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right).$$

Уравнение нормали к графику функции $f\left(x\right)$ в точке x_0 имеет вид:

$$y_н=f\left(x_0\right)-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right).$$

1 Найдем значение функции $y=\dfrac{x^2-2}{x+1}$ в точке $x_0=0$:

$$y\left(0\right)=\frac{0^2-2}{0+1}=-2.$$

Найдем производную функции $y=\dfrac{x^2-2}{x+1}$ и ее значение в точке $x_0=0$:

$$y'=\left(\frac{x^2-2}{x+1}\right)'=\frac{\left(x^2-2\right)'\left(x+1\right)-\left(x^2-2\right)\left(x+1\right)'}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2};$$

$$y'(0)=\frac{0^2+2\cdot 0+2}{(0+1)^2}=2.$$

Имеем:

$$y_к=-2+2(x-0)\Rightarrow y_к=2x-2; \quad y_н=-2-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y_н=-\frac{x}{2}-2.$$

2 Найдем значение функции $\cos y-5x+xy=0$ в точке $x_0=0$:

$$\cos y-5\cdot 0+0\cdot y=0\Rightarrow \cos y=0\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}.$$

Найдем производную неявно заданной функции $\cos y-5x+xy=0$ и ее значение в точке $x_0=0$:

$$(\cos y)'-(5x)'+(xy)'=0; -\sin y\cdot y'-5x'+(x'y+xy')=0;$$

$$-\sin y\cdot y'-5+y+xy'=0;\ y'(x-\sin y)=5-y;\ y'=\frac{5-y}{x-\sin y}.$$

$$y'(0)=\frac{5-\frac{\pi}{2}}{0-\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-5.$$

Имеем:

$$y_к=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-5\right)(x-0)\Rightarrow y_к=\left(\frac{\pi}{2}-5\right)x+\frac{\pi}{2};$$

$$y_н=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-5}(x-0)\Rightarrow y_н=\frac{2}{10-\pi}x+\frac{\pi}{2}.$$

3 Найдем значение функции $\begin{cases}x=t^3+1,\\ y=t^2;\end{cases}$ в точке $x_0=9$:

$$9=t^3+1\Rightarrow t^3=8\Rightarrow t_0=2.$$

Следовательно, $y_0=2^2=4$.

Найдем производную параметрически заданной функции $\begin{cases}x=t^3+1,\\ y=t^2;\end{cases}$ и ее значение при $t_0=2$:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(t^2\right)'}{\left(t^3+1\right)'}=\frac{2t}{3t^2}=\frac{2}{3t};\ y'_0=\frac{2}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}.$$

Имеем:

$$y_к=4+\frac{1}{3}\left(x-9\right)\Rightarrow y_к=\frac{x}{3}+1;\quad y_н=4-\frac{1}{3}\left(x-9\right)\Rightarrow y_н=-\frac{x}{3}+7.$$

4 Найдем значение функции $y=x^{3x-4}$ в точке $x_0=1$: $y\left(1\right)=1^{3\cdot 1-4}=1$.

Найдем производную функции $y=x^{3x-4}$ и ее значение в точке $x_0=1$: данная функция является степенно-показательной. Применим метод логарифмического дифференцирования. Логарифмируем данную функцию по основанию e: $\ln y=\ln x^{3x-4}$.

Используя формулу $\ln a^b=b\ln a$, имеем $\ln y=\left(3x-4\right)\cdot\ln x$.

Считая y функцией x, дифференцируем это равенство:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\left(\left(3x-4\right)\cdot\ln x\right)',\quad \frac{1}{y}\cdot y'=(3x-4)'\cdot\ln x+\left(3x-4\right)\cdot\left(\ln x\right)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=3\cdot\ln x+\left(3x-4\right)\cdot\frac{1}{x},\quad y'=x^{3x-4}\cdot\left(3\ln x+\frac{3x-4}{x}\right).$$

$$y'\left(1\right)=1^{3\cdot 1-4}\cdot\left(3\ln 1+\frac{3\cdot 1-4}{1}\right)=-1.$$

Имеем:

$$y_к=1-1\cdot\left(x-1\right)\Rightarrow y_к=-x+2;\ y_н=1-\frac{1}{-1}\left(x-1\right)\Rightarrow y_н=x.$$

Задание 7

Исследовать функцию $y=\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение

Для полного исследования функции и построения ее графика применяется следующая примерная схема:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции;

4) исследовать функцию на непрерывность и определить характер точек разрыва;

5) найти асимптоты графика функции;

6) исследовать функцию на монотонность и экстремумы;

7) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;

8) по полученным данным построить график функции.

1 *Находим область определения функции.* Функция не определена, если $x=1$. Следовательно, $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2 *Исследуем функцию на четность и нечетность, периодичность.* Функция не является ни четной, ни нечетной, так как область определения не симметрична относительно начала координат. Также функция непериодическая.

3 *Находим точки пересечения графика функции с осями координат.*

Уравнение оси $0y$ $x=0$. Находим точки пересечения:

$$\left.\frac{2x^2}{(x-1)^2}\right|_{x=0}=0.$$

Точка $(0;0)$ – точка пересечения с осью $0y$.

Уравнение оси $0x$ $y=0$. Находим точки пересечения:

$$\frac{2x^2}{(x-1)^2}=0;\quad \begin{cases}2x^2=0,\\ x-1\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$$

Точка $(0;0)$ – точка пересечения с осью $0x$. Функция положительна на всей области определения.

4 *Исследуем функцию на непрерывность и определим характер точек разрыва.* Функция непрерывна на интервалах $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$. Поскольку

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\frac{2\cdot(1-0)^2}{(1-0-1)^2}=\frac{2}{+0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\frac{2\cdot(1+0)^2}{(1+0-1)^2}=\frac{2}{+0}=+\infty,$$

то $x=1$ – точка разрыва второго рода (с бесконечным скачком), а прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

5 *Находим наклонные асимптоты*, уравнения которых имеют вид $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x(x-1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{(x-1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=2.$$

Таким образом, уравнение асимптоты $y=2$, это – горизонтальная асимптота.

6 *Исследуем функцию на монотонность и экстремумы.* Находим первую производную:

$$y'=\left(\frac{2x^2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x^2)'\cdot(x-1)^2-(2x^2)\cdot\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{4x\cdot(x-1)^2-2x^2\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\cdot(4x^2-4x-4x^2)}{(x-1)^4}=\frac{-4x}{(x-1)^3}.$$

$y'=0$ при $x=0$. Критическая точка $x=0$.

Исследуем знак производной функции на промежутках $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. Результаты исследования представлены на рисунке 2.

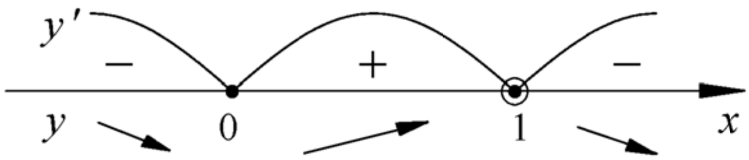

Рисунок 2

Функция убывает на интервалах $(-\infty;0),(1;+\infty)$, возрастает на интервале $(0;1)$. $x_{\min}=0-$точка минимума, $y_{\min}=y(0)=0$.

7 *Находим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.* Находим вторую производную:

$$y''=\left(\frac{-4x}{(x-1)^3}\right)'=\frac{(-4x)'(x-1)^3-(-4x)\left((x-1)^3\right)'}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{-4(x-1)^3+4x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)^2(-4x+4+12x)}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{8x+4}{(x-1)^4}=\frac{4(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

$y''=0$ при $x=-\dfrac{1}{2}$. Критическая точка второго рода $x=-\dfrac{1}{2}$. Результаты исследования знака второй производной представлены на рисунке 3.

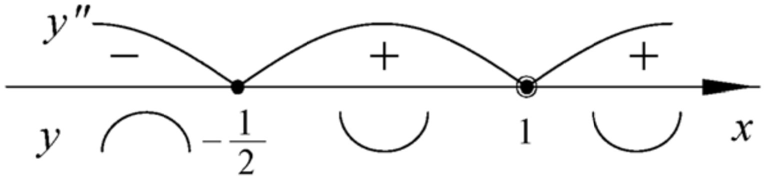

Рисунок 3

График функции является выпуклым на интервале $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, вогнутым – на интервалах $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ и $(1;+\infty)$. Точки перегиба $x=-\frac{1}{2}$, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{9}$.

8 *По полученным данным строим график функции.*

График функции $y=\frac{2x^2}{(x-1)^2}$ представлен на рисунке 4.

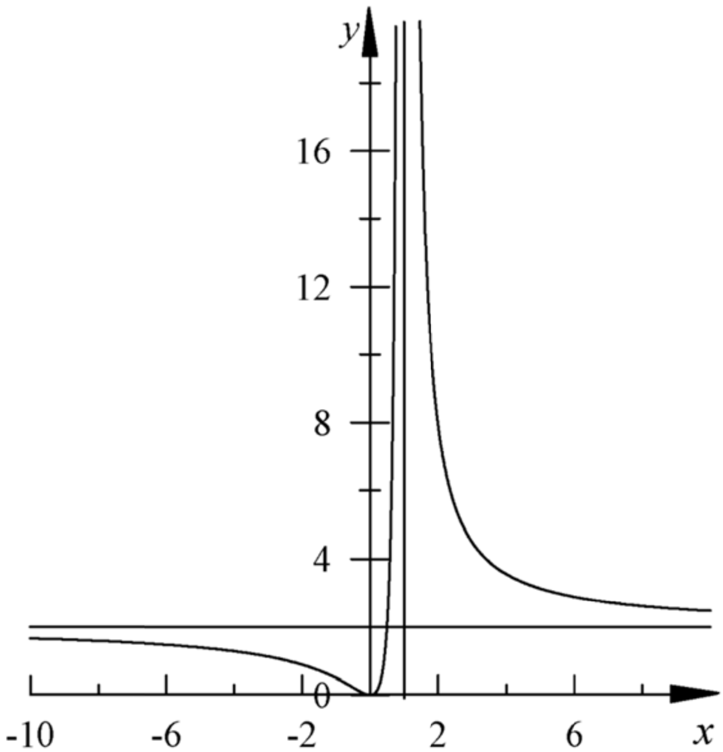

Рисунок 4

3 Варианты контрольных заданий

Задание 1

Решить систему уравнений по формулам Крамера:

1 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2, \\ x - y - 2z = -5, \\ x + y - 5z = -7; \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3x - 4y + z = 6, \\ 2x + y - 2z = -4, \\ x - 6y - 5z = -14; \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x - y + z = -1, \\ x + 2y + 2z = 0; \end{cases}$

4 $\begin{cases} x + 4y - 5z = -6, \\ 3x - 5y - z = -16, \\ 7x - 3y + z = 14; \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x - y + 4z = 3, \\ x + 7y - 2z = -10, \\ x - 23y + 4z = 26; \end{cases}$

6 $\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 2x + 3y - 5z = -21, \\ x + 9y + 7z = 3; \end{cases}$

7 $\begin{cases} 3x - 2y + 6z = -20, \\ 2x - 3y - z = -15, \\ x + y + 2z = 4; \end{cases}$

8 $\begin{cases} x + 2y - 4z = -8, \\ 2x - 3y + z = -5, \\ 8x - 5y + 5z = -11; \end{cases}$

9 $\begin{cases} x - y + 7z = 8, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 5x + y - 7z = 10; \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x - y - 3z = 4, \\ x + 5y - 2z = 7, \\ 3x - 11y - z = 0. \end{cases}$

Записать систему в матричной форме и решить ее матричным способом:

11 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2, \\ x - y - 2z = -5, \\ x + y - 5z = -7; \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3x - 4y + z = 6, \\ 2x + y - 2z = -4, \\ x - 6y - 5z = -14; \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x - y + z = -1, \\ x + 2y + 2z = 0; \end{cases}$

14 $\begin{cases} x + 4y - 5z = -6, \\ 3x - 5y - z = -16, \\ 7x - 3y + z = 14; \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x - y + 4z = 3, \\ x + 7y - 2z = -10, \\ x - 23y + 4z = 26; \end{cases}$

16 $\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 2x + 3y - 5z = -21, \\ x + 9y + 7z = 3; \end{cases}$

17 $\begin{cases} 3x - 2y + 6z = -20, \\ 2x - 3y - z = -15, \\ x + y + 2z = 4; \end{cases}$

19 $\begin{cases} x - y + 7z = 8, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 5x + y - 7z = 10; \end{cases}$

18 $\begin{cases} x + 2y - 4z = -8, \\ 2x - 3y + z = -5, \\ 8x - 5y + 5z = -11; \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x - y - 3z = 4, \\ x + 5y - 2z = 7, \\ 3x - 11y - z = 0. \end{cases}$

Решить систему методом Гаусса:

21 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2, \\ x - y - 2z = -5, \\ x + y - 5z = -7; \end{cases}$

26 $\begin{cases} x - y - z = -1, \\ 2x + 3y - 5z = -21, \\ x + 9y + 7z = 3; \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x - 4y + z = 6, \\ 2x + y - 2z = -4, \\ x - 6y - 5z = -14; \end{cases}$

27 $\begin{cases} 3x - 2y + 6z = -20, \\ 2x - 3y - z = -15, \\ x + y + 2z = 4; \end{cases}$

23 $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x - y + z = -1, \\ x + 2y + 2z = 0; \end{cases}$

28 $\begin{cases} x + 2y - 4z = -8, \\ 2x - 3y + z = -5, \\ 8x - 5y + 5z = -11; \end{cases}$

24 $\begin{cases} x + 4y - 5z = -6, \\ 3x - 5y - z = -16, \\ 7x - 3y + z = 14; \end{cases}$

29 $\begin{cases} x - y + 7z = 8, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 5x + y - 7z = 10; \end{cases}$

25 $\begin{cases} 2x - y + 4z = 3, \\ x + 7y - 2z = -10, \\ x - 23y + 4z = 26; \end{cases}$

30 $\begin{cases} 2x - y - 3z = 4, \\ x + 5y - 2z = 7, \\ 3x - 11y - z = 0. \end{cases}$

Задание 2

Даны четыре точки: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$.

Варианты 1–10:

а) составить уравнение прямой AB и указать ее направляющий вектор;

б) составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB;

в) найти объем пирамиды $ABCD$;

г) найти угол между прямыми AB и CD.

Варианты 11–20:

а) составить уравнение плоскости ABC и указать ее нормальный вектор;

б) составить уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

в) определить, образуют ли векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ базис;

г) найти угол между прямой AD и плоскостью ABC.

Варианты 21–30:

а) составить уравнение прямой BD и указать ее направляющий вектор;

б) составить уравнение плоскости α, проходящей через точки A, C, параллельной прямой BD;

в) найти площадь треугольника ABC;

г) найти расстояние от точки B до плоскости α.

1 $A(3,1,4),\ B(-1,6,1),\ C(-1,1,6),\ D(0,4,1)$;

2 $A(3,1,2),\ B(-1,0,1),\ C(-1,1,3),\ D(0,-1,2)$;

3 $A(-2,4,1),\ B(-1,1,0),\ C(3,-3,2),\ D(0,-1,2)$;

4 $A(-2,-4,3),\ B(-1,1,5),\ C(4,-3,2),\ D(3,-1,7)$;

5 $A(-2,4,1),\ B(-1,1,0),\ C(3,-3,2),\ D(0,-1,2)$;

6 $A(-2,4,5),\ B(3,-1,2),\ C(3,2,2),\ D(0,1,3)$;

7 $A(2,-1,7),\ B(5,3,4),\ C(3,-3,8),\ D(-1,-3,5)$;

8 $A(2,1,6),\ B(1,4,9),\ C(2,-3,7),\ D(4,5,4)$;

9 $A(3,2,1),\ B(4,0,-3),\ C(2,-3,5),\ D(6,-2,2)$;

10 $A(1,-2,7),\ B(4,2,10),\ C(2,3,6),\ D(4,-1,7)$;

11 $A(-2,3,4),\ B(-5,1,1),\ C(3,0,2),\ D(1,2,-1)$;

12 $A(-2,5,4),\ B(-3,2,-1),\ C(0,-2,6),\ D(1,-1,7)$;

13 $A(-2,2,-1),\ B(-1,4,-5),\ C(3,1,2),\ D(4,-1,-2)$;

14 $A(7,2,-3),\ B(2,4,-5),\ C(3,1,-2),\ D(2,1,3)$;

15 $A(8,-3,2),\ B(5,-4,5),\ C(3,2,-2),\ D(4,1,3)$;

16 $A(3,1,-1),\ B(0,4,5),\ C(3,-1,2),\ D(4,3,-2)$;

17 $A(6,-3,1),\ B(2,0,4),\ C(3,1,-2),\ D(4,1,2)$;

18 $A(5,7,2)$, $B(3,1,5)$, $C(-3,3,-2)$, $D(4,4,2)$;
19 $A(7,-3,4)$, $B(6,1,4)$, $C(3,-1,-2)$, $D(3,2,2)$;
20 $A(-5,2,3)$, $B(-2,0,4)$, $C(-3,1,2)$, $D(1,1,2)$;
21 $A(3,1,2)$, $B(4,3,-1)$, $C(3,1,8)$, $D(4,0,5)$;
22 $A(0,5,1)$, $B(2,4,-4)$, $C(-3,1,-2)$, $D(4,-1,-2)$;
23 $A(5,2,7)$, $B(2,0,6)$, $C(3,-1,2)$, $D(4,2,4)$;
24 $A(-2,4,1)$, $B(-2,1,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(-1,1,4)$;
25 $A(10,4,-5)$, $B(8,2,-4)$, $C(6,3,-2)$, $D(4,1,-5)$;
26 $A(-1,3,5)$, $B(2,0,4)$, $C(3,1,2)$, $D(-4,1,2)$;
27 $A(3,-3,0)$, $B(2,-5,2)$, $C(3,1,-2)$, $D(4,1,3)$;
28 $A(5,6,-1)$, $B(2,3,-1)$, $C(3,1,-2)$, $D(-2,1,2)$;
29 $A(8,-3,4)$, $B(5,-6,4)$, $C(3,1,2)$, $D(4,1,-3)$;
30 $A(2,-3,0)$, $B(-2,0,1)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,2)$.

Задание 3

Построить линию, определяемую уравнением:

1 $25x^2-16y^2-50x-64y-439=0$;
2 $9x^2+25y^2+36x+150y+36=0$;
3 $25x^2-16y^2-50x-64y+361=0$;
4 $9x^2+49y^2-18x+196y-236=0$;
5 $36x^2+9y^2+288x-18y+261=0$;
6 $25x^2-4y^2-50x-24y+89=0$;
7 $4x^2-9y^2-12x-36y-63=0$;
8 $9x^2-25y^2+54x-50y+281=0$;
9 $25x^2+4y^2+100x-20y+25=0$;
10 $25x^2-9y^2-150x-36y-36=0$;
11 $4x^2+9y^2+12x+36y+9=0$;
12 $25x^2-4y^2+150x+8y+121=0$;
13 $16x^2-9y^2+128x+36y+76=0$;
14 $2y^2-16y+3x+30=0$;
15 $4x^2+25y^2-12x+50y-66=0$;
16 $2x^2-12x+3y+24=0$;
17 $9y^2+12y-6x+2=0$;
18 $x^2-9y^2-4x-54y-41=0$;
19 $x^2-4x+2y-2=0$;
20 $4x^2-20x+y+28=0$;
21 $2x^2-4x-5y-13=0$;
22 $y^2+6y+2x+13=0$;
23 $2y^2-16y-3x+35=0$;
24 $x^2-6x-3y+6=0$;
25 $5y^2+20y+2x+16=0$;
26 $4x^2+y^2+24x-4y+24=0$;
27 $9x^2-4y^2+72x-16y+92=0$;
28 $4x^2-40x-3y+106=0$;
29 $2y^2+12y+5x+23=0$;
30 $x^2+9y^2-2x+54y+46=0$.

Задание 4

Вычислить пределы:

1 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^2+7x^4}{3x+20-5x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+7x}{7x-6}\right)^{3x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-x-12}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{3x}$;

2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}-x^5+2x^3}{3x^5+20-5x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^2}{x^2-6}\right)^{3x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{2x^2-5x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{3\sin 4x}$;

3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7\sqrt{x}-x+2x^3}{3x^2+20-5x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+11}{3x-3}\right)^{3x-7}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2-3x-27}{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+10}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\sin 3x}$;

4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^5+2x^3}{3x^2+20-5x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-11}{2x-3}\right)^{4x-7}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 5x}{3x\cdot\operatorname{tg}2x}$;

5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-x^6+23x^3}{3x^2+1-5x^5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{5+x}\right)^{11x-7}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x-\sin^2 2x}{x^2}$;

6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^2+x^4-6x}{30x^2+7-5x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x}{7-2x}\right)^{5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x^2}$;

7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27x+x^3-5x}{17x^2+7x^3-500}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-4x}{7-4x}\right)^{x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x}{\operatorname{tg}3x}$;

8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18\sqrt{x}+x^3-4x}{18x^2+27-6x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-5x}{6-5x}\right)^{7x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}\right)$;

9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+3x^3-2x^2}{3x^2+17x-11x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4+x}{7+x}\right)^{4+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{3x\cdot\sin5x}$;

10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+2x-7x^2}{3x^2+11x-5x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9-4x}{7-4x}\right)^{6+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos12x}{5x^2}$;

11 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10\sqrt{x}+x^4-12x}{30x^2+5x^5-5x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+2x^2}{7+2x^2}\right)^{5x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin2x}{4x^2}$;

12 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+12x^2-16x^4}{x^2-7x^4-5x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+6x}{7+6x}\right)^{3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}4x-\sin4x}{4x^2}$;

13 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-5x^3-6x^2}{3x^2+7x^3-5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+7x}{6+7x}\right)^{x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}-\dfrac{1}{\sin2x}\right)$;

14 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-11x^4-6x^3}{x^2-6x^3+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x^2}{7-x^2}\right)^{5x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x+\sin3x}{x\cdot\sin2x}$;

15 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-6x^3}{30x^2+2x-5x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{x^2-4x-45}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+5x}{7+5x}\right)^{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos5x}{4x^2}$;

16 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2+7x-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+4x}{5+4x}\right)^{5x-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x-\sin5x}{7x^2}$;

17 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^4+x}{x^2+2x^4-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{4+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{x^2}$;

18 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x+x^2-5x^3}{3\sqrt{x}+6x^3-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+5x}{8+5x}\right)^{4x-21}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+13}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{3x\cdot\arcsin x}$;

19 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x^3-3x}{3x^2+x^3-x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+x}{2+x}\right)^{3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+5}}{3x^2-4x-7}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\cdot\operatorname{tg}3x}$;

20 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+x^2}{3x^2+7x^3-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9+4x}{2+4x}\right)^{5x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-x-28}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{x\cdot\operatorname{tg}3x}$;

21 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-5x^4-6x^2}{3x^3+7x^4-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+x}{2+x}\right)^{3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{\sqrt{5-2x}-\sqrt{7-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$;

22 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-x^3+x^4}{3x^2+7x^3-5x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+4x}{2+4x}\right)^{6x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{5-2x}-\sqrt{7-4x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 3x}$;

23 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+x^2-6x^3}{3+7x^3-x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7-5x}{1-5x}\right)^{3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{\sqrt{3-x}-\sqrt{7+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$;

24 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21x^4-5x^3-6x}{3x^4+x^3-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-6x}{1-6x}\right)^{7x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg}3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

25 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3x^3+7}{3x^3+5x^2-5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{13-2x}}{x^3-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{1+2x}\right)^{3x+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

26 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x^4+11x}{x^3+5x^4+5x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{3-2x}}{x^3+27}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{6+4x}\right)^{x+10}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}5x\cdot\operatorname{ctg}3x$;

27 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-3x^2+2x}{3x^2+5x^4-5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{x^2-4x-32}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+3x^2}{2+3x^2}\right)^{3x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

28 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x^3+7}{4x^3+11x^2-5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+8x}{2+8x}\right)^{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}3x}{\sin 2x}$;

29 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{5x^3+5x^2+8}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{2+x^2}\right)^{3x^2-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{x\cdot\operatorname{tg}2x}$;

30 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x^3+11}{3x^2+5x^3-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+7x}{8+7x}\right)^{2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{4x}$.

Задание 5

Найти дифференциалы первого и второго порядков функции:

1 $y=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

2 $y=\ln^2(2x+1)$;

3 $y=x^2\cdot 2^x$;

4 $y=\arcsin(x^2)$;

5 $y=(x-2)\cdot 3^{x-2}$;

6 $y=\log_3(x^2+1)$;

7 $y=\cos^2(2x^2+3)$;

8 $y=\operatorname{arctg}(x^2+1)$;

9 $y=x\cdot\operatorname{arctg}(2x)$;

10 $y=e^x\cdot\ln(x+2)$;

11 $y=\sin x^3+\cos(2x+1)$;

12 $y=\sqrt[3]{5x^2-2x}$;

13 $y=\ln\sqrt[4]{x^2+1}$;

14 $y=x^2+\ln(x^2+1)$;

15 $y=\dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$;

16 $y=\sqrt[4]{4x^2-1}$;

17 $y=\ln(x^2+1)-\ln x$;

18 $y=\operatorname{tg}^2(2x+1)$;

19 $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$;

20 $y=e^{2x}\cdot\cos x$;

21 $y=\log_5(3x^2+2)$;

22 $y=\log_4^4 x$;

23 $y=(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)$;

24 $y=\arccos e^x$;

25 $y=\ln(e^x+e^{-x})$;

26 $y=x\cdot\arcsin 3x$;

27 $y=\ln(\arcsin x)$;

28 $y=\arcsin e^x$;

29 $y=\sqrt{x-1}\cdot\ln x$;

30 $y=e^x+\ln(e^x+x)$.

Задание 6

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в указанной точке x_0:

1 $y=-2\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}$, $x_0=1$;

2 $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0=1$;

3 $y=(\cos 2x+x)(x^2-3)$, $x_0=0$;

4 $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}; \end{cases}$ $x_0=\sqrt{3}$;

5 $y=y^3-\sqrt{x-1}+2$, $x_0=5, y_0>0$;

6 $y=(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

7 $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}}{x^2}$, $x_0=3$;

8 $5x^2-4y^3+2xy=20$, $x_0=2, y_0<0$;

9 $y=x^{\ln^2 x}$, $x_0=e$;

10 $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\dfrac{t^2}{2}; \end{cases}$ $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

11 $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0=4$;

12 $y=\ln(2x^2-5x+4)$, $x_0=1$;

13 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$, $x_0=-1$;

14 $y=\arcsin^2(3x)$, $x_0=\dfrac{1}{6}$;

15 $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$, $x_0=2$.

Составить уравнение нормали к графику функции $f(x)$ в указанной точке x_0:

16 $y=-2\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}$, $x_0=1$;

17 $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1}$, $x_0=1$;

18 $y=(\cos 2x+x)(x^2-3)$, $x_0=0$;

19 $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}; \end{cases}$ $x_0=\sqrt{3}$;

20 $y=y^3-\sqrt{x-1}+2$, $x_0=5, y_0>0$;

21 $y=(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

22 $y=\frac{\sqrt{2x+3}}{x^2}$, $x_0=3$;

23 $5x^2-4y^3+2xy=20$, $x_0=2, y_0<0$;

24 $y=x^{\ln^2 x}$, $x_0=e$;

25 $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\frac{t^2}{2}; \end{cases}$ $x_0=\frac{\pi}{4}$;

26 $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0=4$;

27 $y=\ln\left(2x^2-5x+4\right)$, $x_0=1$;

28 $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x}$, $x_0=-1$;

29 $y=\arcsin^2\left(3x\right)$, $x_0=\frac{1}{6}$;

30 $y=\frac{x^3+2}{x^3-2}$, $x_0=2$.

Задание 7

Провести полное исследование функции и построить ее график:

1 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$;

2 $y=\left(2x+3\right)e^{-2(x+1)}$;

3 $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$;

4 $y=3\ln\frac{x}{x-3}-1$;

5 $y=\frac{e^{2(x+1)}}{2\left(x+1\right)}$;

6 $y=\frac{2}{x^2+2x}$;

7 $y=\left(3-x\right)e^{x-2}$;

8 $y=\frac{4x^2}{3+x^2}$;

9 $y=x^3e^{x+1}$;

10 $y=\ln\frac{x}{x+2}+1$;

11 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

12 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$;

13 $y=x+\ln\left(x^2-4\right)$;

14 $y=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$;

15 $y=-\left(2x+1\right)e^{2(x+1)}$;

16 $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$;

17 $y=\left(x+1\right)e^{1-x}$;

18 $y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$;

19 $y=\frac{4x}{4+x^2}$;

20 $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$;

21 $y=\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$;

22 $y=2\ln\frac{x}{x-4}-3$;

23 $y=-\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$;

24 $y=\frac{4}{x^2+2x-3}$;

25 $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$;

26 $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$;

27 $y=-(x+1)e^{x+2}$;

28 $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

29 $y=-\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$;

30 $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

4 Вопросы по программе курса

Тема 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1 Матрицы, основные понятия, линейные операции над матрицами. Произведение матриц. Транспонирование матрицы.

2 Определители второго и третьего порядков, их свойства. Определитель n-го порядка.

3 Обратная матрица и ее построение. Ранг матрицы. Нахождение ранга. Теорема Кронекера-Капелли.

4 Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. Решение невырожденных систем матричным методом.

5 Правило Крамера. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

6 Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

7 Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами.

8 Координаты векторов. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Понятие о базисе на плоскости и в пространстве.

9 Скалярное произведение двух векторов, его свойства, выражение в координатной форме, приложения.

10 Векторное произведение двух векторов, его свойства, выражение в координатной форме, приложения.

11 Смешанное произведение трех векторов, его свойства, геометрическое истолкование, выражение в координатной форме, приложения.

12 Полярная система координат. Связь между декартовыми и полярными координатами точки.

13 Прямая на плоскости, различные виды уравнения прямой. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.

14 Плоскость, различные виды уравнения плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

15 Прямая в пространстве, различные виды уравнений прямой. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

16 Окружность, эллипс, вывод канонического уравнения. Исследование формы эллипса.

17 Гипербола, вывод канонического уравнения. Исследование формы гиперболы, асимптоты гиперболы.

18 Парабола, вывод канонического уравнения. Исследование формы параболы.

19 Пространство R_n. Преобразования пространства. Линейное преобразование, линейный оператор.

20 Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.

21 Цилиндрические поверхности с образующими, параллельными одной из координатных осей.

22 Канонические уравнения алгебраических поверхностей второго порядка. Эллипсоид, гиперболоид, параболоид, конус, цилиндр. Метод сечений при исследовании формы поверхностей.

Тема 2. Введение в математический анализ

1 Понятие предела числовой последовательности. Предел функции в точке и на бесконечности.

2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции в точке и на отрезке.

3 Точки разрыва функции и их классификация. Непрерывность элементарных функций и их классификации.

4 Замечательные пределы.

5 Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции и их применение к вычислению пределов.

6 Функции непрерывные на отрезке и их свойства.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1 Производная функции: определение, обозначение, геометрический и механический смысл. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой.

2 Непрерывность дифференцируемой функции.

3 Правила дифференцирования функции одной переменной.

4 Производные сложной и обратной функций.

5 Производные основных элементарных функций. Таблица производных.

6 Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций.

Логарифмическое дифференцирование.

7 Дифференциал функции: определение, обозначение, связь с производной, свойства, инвариантность формы, геометрический смысл, применение в приближенных вычислениях значений функции.

8 Производные и дифференциалы высших порядков.

9 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

10 Основные разложения элементарных функций по формуле Тейлора.

11 Правило Бернулли-Лопиталя, его применение к вычислению пределов.

12 Монотонность и экстремумы функции одной переменной.

13 Выпуклость и точки перегиба графика функции одной переменной.

14 Асимптоты графика функции.

15 Полное исследование и построение графика функции одной переменной.

Список литературы

1 **Гурский, Е. И.** Руководство к решению задач по высшей математике : в 3 т. / Е. И. Гурский ; под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – Т. 1. – 350 с.

2 **Гусак, А. А.** Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – Т. 1. – 544 с.

3 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век, 2003. – Ч. 1. – 304 с.

4 **Демидович, Б. П.** Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б. П. Демидович ; под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1970. – 472 с.

5 **Жевняк, Р. М**. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – Ч. 1. – 223 с.

6 **Жевняк, Р. М**. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – Ч. 2. – 221 с.

7 **Кручкович, Г. И.** Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович ; под ред. Г. И. Кручковича. – Минск : Выш. шк., 1973. – 516 с.

8 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1998. – Т. 1. – 432 с.