ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

***Методические указания к практическим занятиям
для студентов всех специальностей***

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Могилёв 2013

УДК 517
ББК 22.1я 73
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» « 16 » апреля 2013 г., протокол № 6.

Составители: проф. В. А. Карпенко;
доц. И. У. Примак;
доц. Д. В. Роголев;
ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. С. Н. Батан

Методические указания содержат теоретические сведения для изучения темы «Линейное преобразование. Квадратичные формы». Даны образцы решения примеров, приведены примеры для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 10.10.2013. Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,0.Тираж 99 экз. Заказ № 704.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

1 Линейное преобразование. Матрица линейного преобразования. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования

1.1 Теоретическая часть

1.1.1 Линейные преобразования (операторы).

Определение. *Преобразованием* (или *оператором*) $\mathbf{A}^*$ в линейном пространстве E_k называется отображение E_k в себя, т. е. $\mathbf{A}^* : E_k \to E_k$, при котором каждому элементу (вектору) $\vec{x} \in E_k$ ставится в соответствие элемент (вектор) $\vec{y} \in E_k$:

$$\vec{y} = \mathbf{A}^* \vec{x}. \tag{1}$$

Вектор $\vec{y}$ называется *образом* вектора $\vec{x}$, а $\vec{x}$ – *прообразом* вектора $\vec{y}$ при отображении $\mathbf{A}^*$.

Например, любая действительнозначная функция действительного аргумента

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = y$$

является оператором в одномерном пространстве $E_1 = \mathbb{R}$.

Определение. Преобразование (оператор) $\mathbf{A}^*$ в линейном пространстве E_k называется *линейным*, если оно сумму векторов из E_k переводит в сумму образов слагаемых, а произведение вектора на число переводит в произведение этого числа на образ данного вектора:

$$\mathbf{A}^*(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{A}^*\vec{x} + \mathbf{A}^*\vec{y},\ \vec{x}, \vec{y} \in E_k; \tag{2}$$

$$\mathbf{A}^*\left(\alpha\vec{x}\right) = \alpha\left(\mathbf{A}^*\vec{x}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} \in E_k. \tag{3}$$

1.1.2 Матрица линейного преобразования.

Пусть

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_k \tag{4}$$

есть некоторый фиксированный базис линейного k-мерного пространства E_{k}. Тогда имеет место теорема.

Теорема 1. Каждому линейному преобразованию $\mathbf{A}^*$ пространства E_k соответствует определённая матрица $\mathbf{A}$ типа $k \times k$ такая, что её столбцы состоят из координат векторов

$$\mathbf{A}^*\vec{e}_1, \mathbf{A}^*\vec{e}_2, \mathbf{A}^*\vec{e}_3, \ldots, \mathbf{A}^*\vec{e}_k, \tag{5}$$

причём для любого вектора $\vec{a} \in E_k$ матрица-столбец $\mathbf{X}$ из координат этого вектора в базисе (4) связана с матрицей-столбцом $\mathbf{Y}$ из координат вектора

$\mathbf{A}^*\vec{a}$ в том же базисе (4) соотношением

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}. \qquad (6)$$

Итак, имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}; \qquad \begin{cases} \mathbf{A}^*\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{k1}\vec{e}_k; \\ \mathbf{A}^*\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{k2}\vec{e}_k; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A}^*\vec{e}_k = a_{1k}\vec{e}_1 + a_{2k}\vec{e}_2 + \ldots + a_{kk}\vec{e}_k. \end{cases} \qquad (7)$$

1.1.3 Матрица перехода от одного базиса к другому. Связь между координатами вектора в различных базисах.

Пусть заданы два базиса линейного пространства E_k:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_k, \qquad (8)$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_k. \qquad (9)$$

Каждый вектор $\vec{v}_i$ ($i = \overline{1,k}$) базиса (9) однозначно разлагается по базису (8):

$$\vec{v}_i = t_{1i}\vec{e}_1 + t_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + t_{ki}\vec{e}_k,\ i = \overline{1,k}. \qquad (10)$$

Составим матрицу $\mathbf{T}$, располагая по столбцам координаты соответствующих векторов $\vec{v}_i$ ($i = \overline{1,k}$) в базисе (10):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{k1} & t_{k2} & \dots & t_{kk} \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Матрица $\mathbf{T}$ невырожденная и называется *матрицей перехода от базиса (8) к базису (9)*. Имеем

$$\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_k\right] = \left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_k\right] \cdot \mathbf{T};$$

$$\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_k\right] = \left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_k\right] \cdot \mathbf{T}^{-1}.$$

Если $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора $\vec{a}$ в базисе (8), а $\mathbf{X}'$ – столбец координат вектора $\vec{a}$ в базисе (9), то

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}',\ \mathbf{X}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{X}. \qquad (12)$$

Формулы (12) выражают правило преобразования координат вектора при замене базиса.

Укажем связь между матрицами линейного преобразования $\mathbf{A}^*$ в различных базисах.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{A}$ – матрица линейного преобразования $\mathbf{A}^*$ в базисе (8), $\mathbf{B}$ – матрица того же преобразования в базисе (9). Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}, \tag{13}$$

где $\mathbf{T}$ – матрица (11) перехода от базиса (8) к базису (9).

1.1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора (матрицы).

Определение. *Собственным вектором* линейного оператора $\mathbf{A}^*$, действующего в линейном пространстве E_k, называется ненулевой вектор $\vec{x} \in E_k$ такой, что

$$\mathbf{A}^*\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{14}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – действительное число. Число λ называется *собственным значением оператора* $\mathbf{A}^*$, соответствующим собственному вектору $\vec{x}$.

Пусть в пространстве E_k выбран базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\}$. Тогда оператор $\mathbf{A}^*$ имеет определённую матрицу $\mathbf{A}$ в данном базисе согласно (7), поэтому соотношение (14) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}, \ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = 0, \tag{15}$$

где $\mathbf{X}$ – столбец из координат вектора $\vec{x}$ в данном базисе;

$\mathbf{E}$ – единичная матрица типа $k \times k$.

Матричное равенство (15) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + (a_{kk} - \lambda)x_k = 0, \end{cases} \tag{16}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – координаты вектора $\vec{x}$ в данном базисе.

Рассмотрим ненулевые решения однородной системы уравнений (16). Известно, что система (16) имеет ненулевое решение тогда, и только тогда, когда её определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) является уравнением k-й степени относительно λ, а действительные решения этого уравнения будут собственными значениями оператора $\mathbf{A}^*$ и его матрицы $\mathbf{A}$. Пусть найдено собственное значение $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Подставляя это значение в систему (16) и решая её, можно найти координаты соответствующего вектора

$$\vec{x}^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)} \right).$$

1.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Проверить линейность следующего оператора в пространстве $E_1 \subset \mathbb{R}$: $y = kx$, $k = \text{const}$.

Решение

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\mathbf{A}^*\left(x_1 + x_2\right) = k\left(x_1 + x_2\right) = kx_1 + kx_2 = \mathbf{A}^* x_1 + \mathbf{A}^* x_2;$$

$$\mathbf{A}^*\left(\alpha x_1\right) = k\left(\alpha x_1\right) = \alpha\left(kx_1\right) = \alpha\left(\mathbf{A}^* x_1\right).$$

Условия (2) и (3) выполняются, поэтому данная функция является линейным оператором в E_1.

Пример 2 – Установить, является ли данное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$ линейным. Если ответ положителен, найти матрицу линейного преобразования в стандартном базисе.

$\mathbf{A}^* \vec{x} = \left(x_2 + x_3; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3 \right)$ для любого вектора $\vec{x} = \left(x_1; x_2; x_3 \right)$.

Решение

Пусть векторы $\vec{x} = \left(x_1; x_2; x_3\right), \vec{y} = \left(y_1; y_2; y_3\right) \in \mathbb{R}^3$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Координаты суммы векторов $\vec{x} + \vec{y} = \left(x_1 + y_1;\, x_2 + y_2;\, x_3 + y_3\right)$. Тогда

$$\mathbf{A}^*\left(\vec{x} + \vec{y}\right) =$$

$$= \left(\left(x_2 + y_2\right) + \left(x_3 + y_3\right); 2\left(x_1 + y_1\right) + \left(x_3 + y_3\right); 3\left(x_1 + y_1\right) - \left(x_2 + y_2\right) + \left(x_3 + y_3\right) \right) =$$

$$= \left(\left(x_2 + x_3\right) + \left(y_2 + y_3\right); \left(2x_1 + x_3\right) + \left(2y_1 + y_3\right); \left(3x_1 - x_2 + x_3\right) + \left(3y_1 - y_2 + y_3\right) \right) =$$

$$= \left(x_2 + x_3; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3 \right) + \left(y_2 + y_3; 2y_1 + y_3; 3y_1 - y_2 + y_3 \right) = \mathbf{A}^* \vec{x} + \mathbf{A}^* \vec{y};$$

$$\mathbf{A}^*\left(\alpha \vec{x}\right) = \left(\alpha x_2 + \alpha x_3; 2\alpha \mathrm{x}_1 + \alpha x_3; 3\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 \right) =$$

$$= \alpha\left(x_2 + x_3; 2\mathrm{x}_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3 \right) = \alpha\left(\mathbf{A}^* x_1\right).$$

Условия (2) и (3) выполняются, следовательно, данное преобразование является линейным.

Матрицу линейного преобразования получим, записав построчно коэффициенты при x_1, x_2, x_3 из соответствующих координат образа $\mathbf{A}^*\vec{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 3 – Пусть в двумерном пространстве E_2 задано преобразование $\mathbf{A}^*$ следующим образом:

$$\mathbf{A}^*\left(\vec{x}\right) = \vec{x} + \vec{a},$$

где $\vec{a}$ – фиксированный ненулевой вектор.

Установить, является ли $\mathbf{A}^*$ линейным преобразованием в E_2.

Решение

Заметим, что $\mathbf{A}^*$ является параллельным переносом на вектор $\vec{a}$. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in E_2$. Тогда

$$\mathbf{A}^*\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{a} \neq \left(\vec{x} + \vec{a}\right) + \left(\vec{y} + \vec{a}\right) = \mathbf{A}^*\vec{x} + \mathbf{A}^*\vec{y}.$$

Значит, параллельный перенос $\mathbf{A}^*$ не является линейным оператором.

Пример 4 – Пусть в обычном трёхмерном пространстве E_3 задан стандартный ортонормированный базис $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$. Найти в данном базисе матрицу линейного преобразования $\mathbf{A}^*$, где $\mathbf{A}^*$ – поворот пространства вокруг оси Oy на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Найти координаты образа точки $M(1; 2; 4)$ при данном преобразовании.

Решение

Найдём координаты векторов $\mathbf{A}^*\vec{i}$, $\mathbf{A}^*\vec{j}$, $\mathbf{A}^*\vec{k}$ (рисунок 1). Отметим, что поворот $\mathbf{A}^*$ совершается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{j}$.

Имеем

$$\mathbf{A}^*\vec{i} = -\vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \left(-1\right) \cdot \vec{k};$$

$$\mathbf{A}^*\vec{j} = \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k};$$

$$\mathbf{A}^*\vec{k} = \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k},$$

поэтому

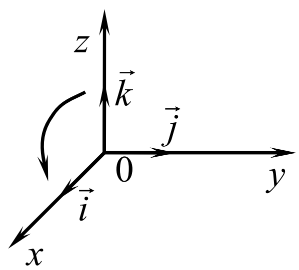

Рисунок 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь M' – образ точки M при преобразовании $\mathbf{A}^*$. Тогда координаты M' совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{OM'}$, координаты точки M совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{OM}$, поэтому по формуле (6) получаем

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ т. е. } M'(4;2;-1).$$

Замечание – Проверка линейности преобразования $\mathbf{A}^*$ опущена.

Пример 5 – Выберем на плоскости E_2 декартову прямоугольную систему координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ и рассмотрим линейное преобразование $\mathbf{A}^*$ пространства E_2, заключающееся в повороте относительно точки O на угол φ против часовой стрелки. Найти матрицу этого преобразования.

Решение

Имеем (рисунок 2)

$$\mathbf{A}^*\vec{i} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j};$$

$$\mathbf{A}^*\vec{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \vec{j} =$$

$$= -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}.$$

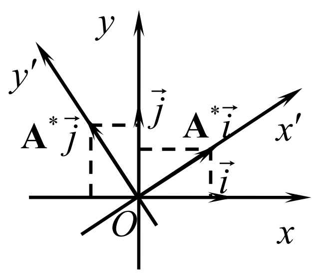

Рисунок 2

Отсюда получаем матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Пример 6 – Пусть матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

есть матрица линейного оператора $\mathbf{A}^*$ в некотором базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ трёхмерного пространства E_3. Найти матрицу $\mathbf{B}$ этого преобразования в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$, где

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_2.$$

Решение

Находим матрицу $\mathbf{T}$ перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2' &= 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3; \\ \vec{e}_3' &= 0\cdot\vec{e}_1 - 1\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3; \end{aligned} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Находим по формуле (13) матрицу $\mathbf{B}$ преобразования $\mathbf{A}^*$ в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -9 & 5 \\ 8 & 8 & -5 \\ -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример *7* – Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение

Составляем уравнение вида (17):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е. } \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Тогда $\lambda^2(\lambda+2) - (\lambda+2) = 0$, $(\lambda+2)(\lambda^2-1) = 0$, $(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$, откуда $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. Итак, найдены собственные значения матрицы $\mathbf{A}$. Находим соответствующие собственные векторы:

$$\lambda_1 = -2: \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ -x_1 - x_2 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = x_3; \\ x_2 = -x_1. \end{cases} \Rightarrow x_3 = 2x_1;$$

$$x_2 = -x_1 \Rightarrow \vec{x}^{(1)} = (x_1; -x_1; 2x_1)^T, \; x_1 \neq 0.$$

Обозначим $x_1 = c$, тогда $\vec{x}^{(1)} = (c;-c;2c)^T$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. В частности, при $c = 1$ получим $\vec{x}^{(1)} = (1;-1;2)^T$.

$$\lambda_2 = -1: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ -x_1 - 2x_2 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3; \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_3;$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_3 \Rightarrow \vec{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}x_3;-\frac{1}{4}x_3;x_3\right)^T, \ x_3 \neq 0 \text{ или } \vec{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}c;-\frac{1}{4}c;c\right)^T, \ c \neq 0.$$

В частности, при $c = 1$ получаем $\vec{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4};1\right)^T$.

$$\lambda_3 = 1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ -x_1 - 4x_2 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3; \\ x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_3;$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \Rightarrow \vec{x}^{(3)} = \left(2x_3;-\frac{1}{2}x_3;x_3\right)^T, \ x_3 \neq 0 \text{ или } \vec{x}^{(3)} = \left(2c;-\frac{1}{2}c;c\right)^T, \ c \neq 0.$$

При $c = 1$ получаем $\vec{x}^{(3)} = \left(2;-\frac{1}{2};1\right)^T$.

Замечание – Если λ есть корень кратности t уравнения (17), то ранг системы (16) равен $k - t$, а размерность пространства решений этой системы равна $k - (k - t) = t$. Таким образом, корень λ кратности t порождает t линейно независимых собственных векторов, за которые обычно принимают фундаментальную систему решений системы (16).

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1.3.1 Ниже определены преобразования линейного пространства E_3. Выяснить, являются ли они линейными. Если ответ положителен, найти матрицы линейных преобразований в стандартном базисе:

1) $\mathbf{A}^*\vec{x} = (2x_1 - x_3;x_3;x_1 - x_2)$ для любого вектора $\vec{x} = (x_1;x_2;x_3)$;

2) $\mathbf{A}^*\vec{x} = (x_1x_2;x_2x_3;x_1x_3)$ для любого вектора $\vec{x} = (x_1;x_2;x_3)$;

3) $\mathbf{A}^*\vec{x} = (x_1 - x_2 + x_3;x_3 - x_1;x_2 - 4x_3)$ для любого вектора $\vec{x} = (x_1;x_2;x_3)$;

4) $\mathbf{A}^*\vec{x} = (\vec{x},\vec{a})\vec{a}$, где $\vec{a}$ – фиксированный вектор, $\vec{x}$ – произвольный вектор, $(\vec{x},\vec{a})$ – скалярное произведение.

а) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$; б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; в) $\vec{a} = 7\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответы: 1) является, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; 2) не является; 3) является, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$; 4) является, а) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, в) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 49 & -42 & 14 \\ -42 & 36 & -12 \\ 14 & -12 & 4 \end{bmatrix}$.

1.3.2 Дана матрица $\mathbf{A}$ некоторого линейного преобразования в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

1.3.3 Дана матрица $\mathbf{A}$ некоторого линейного преобразования в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{cases} \vec{e}_1' = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3; \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}$.

1.3.4 Найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad 3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad 4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответы: 1) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\vec{x}^{(1)} = \left(-4c; c\right)^T$, $\vec{x}^{(2)} = \left(-c; c\right)^T$, $c \neq 0$;

2) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$, $\vec{x}^{(1)} = \left(-2c; c; c\right)^T$, $\vec{x}^{(2)} = \left(0; c; c\right)^T$, $\vec{x}^{(3)} = \left(\frac{6}{5}\text{c}; -\frac{7}{5}c; c\right)^T$, $c \neq 0$;

3) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 2$, $\vec{x}^{(1)} = \left(4c; 0; c\right)^T$, $\vec{x}^{(2)} = \left(-2\,\text{c}; 0; c\right)^T$, $\vec{x}^{(3)} = \left(3c; -5c; c\right)^T$, $c \neq 0$;

4) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $\vec{x}^{(1)} = \left(c; 0; 0; 0\right)^T$, $\vec{x}^{(2)} = \left(0; \text{c}; 0; 0\right)^T$, $\vec{x}^{(3),(4)} = \left(-c; 0; c; 0\right)^T$, $c \neq 0$.

1.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература [1, гл. 6, § 1; гл. 7, § 1]; [2, гл. 3, § 3.1–3.11]; [3, гл. 1, § 1.6–1.10, 1.16].

1.4.1 Ниже определены преобразования линейного пространства E_3. Выяснить, являются ли они линейными. Если ответ положителен, найти матрицы этих линейных преобразований в стандартном базисе:

1) $\mathbf{A}^*\vec{x} = \left(a_1 + a_2; a_2 + a_3; a_3 + a_1\right)$ для любого вектора $\vec{x} = \left(a_1; a_2; a_3\right)$;

2) $\mathbf{A}^*\vec{x} = \left(\vec{x} \times \vec{a}\right)$, где $\vec{x}$ – произвольный вектор, $\vec{a}$ – фиксированный вектор:

а) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$;

б) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;

в) $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Ответы: 1) является, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) является,

а) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, в) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.4.2 Дана матрица $\mathbf{A}$ некоторого k-мерного линейного пространства E_k в базисе $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_k\right\}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\left\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2 \ldots, \vec{e}\,'_k\right\}$:

1) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; $\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_2; \\ \vec{e}_2' = \vec{e}_3; \\ \vec{e}_3' = \vec{e}_1. \end{cases}$

2) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1; \\ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2; \\ \vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \\ \vec{e}_4' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4. \end{cases}$

Ответы: 1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \\ -6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1.4.3 Найти собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ответы: 1) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{x}^{(1)} = (-2c; c)^T$, $\vec{x}^{(2)} = (c; c)^T$, $c \neq 0$;

2) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, $\vec{x}^{(1)} = (0; c; 0)^T$, $\vec{x}^{(2)} = (-2\,\mathrm{c}; c; 0)^T$, $\vec{x}^{(3)} = \left(-2\,\mathrm{c}; \frac{2}{3}c; c\right)^T$, $c \neq 0$;

3) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$, $\vec{x}^{(1)} = (0; c; 0)^T$, $\vec{x}^{(2)} = (-3c; -5c; c)^T$, $\vec{x}^{(3)} = (2\,\mathrm{c}; 0; c)^T$, $c \neq 0$;

4) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $\vec{x}^{(1)} = (c; c; c)^T$, $\vec{x}^{(2),(3)} = (\mathrm{c}; c; 0)^T$, $c \neq 0$.

2 Квадратичные формы

2.1 Теоретическая часть

2.1.1 Преобразование матрицы линейного оператора.

Пусть заданы два различных базиса пространства E_k

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_k, \tag{18}$$

$$\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3, \ldots, \vec{e}\,'_k \tag{19}$$

и $\mathbf{A}^*$ – линейное преобразование пространства E_k. Обозначим через $\mathbf{A}$ матрицу преобразования $\mathbf{A}^*$ в базисе (18), через $\mathbf{B}$ – матрицу этого преобразования в базисе (19), через $\mathbf{T}$ – матрицу перехода от базиса (18) к базису (19).

Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}. \tag{20}$$

С помощью подходящего выбора базиса можно упростить матрицу линейного преобразования $\mathbf{A}^*$. В частности, имеет место теорема.

Теорема 1. Для того чтобы матрица $\mathbf{A}$ линейного преобразования $\mathbf{A}^*$ линейного пространства E_k была диагональной в некотором базисе, необходимо и достаточно, чтобы этот базис состоял из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$. Более того, тогда диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ будут собственными значениями этой матрицы.

Теорема не утверждает, что для всякого линейного преобразования существует базис, в котором матрица преобразования будет диагональной. Только отдельные матрицы (преобразования) обладают этим свойством, и среди них отметим симметрические матрицы. Из теоремы вытекает следующий алгоритм.

Процедура диагонализации матрицы:

1) находим собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$;

2) строим матрицу $\mathbf{T}$ перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$;

3) вычисляем матрицу $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, которая должна быть диагональной.

2.1.2 Квадратичная форма и её матрица.

Определение. *Квадратичной формой от k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$* называется выражение вида

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots x_k\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j\right) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j\,, \tag{21}$$

т. е.

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots x_k\right) = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1k}x_1x_k +$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2k}x_2x_k + \ldots + a_{k1}x_kx_1 +$$
$$+ a_{k2}x_kx_2 + \ldots + a_{kk}x_kx_k,$$

причём $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1,k}$.

Симметрическая матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix} \tag{22}$$

называется *матрицей квадратичной формы* (21) в системе координат $\left\{O; x_1; x_2; \ldots; x_k\right\}$. Если обозначить $\vec{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)^T$, то квадратичную форму (21) можно записать в векторно-матричном виде:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots x_k\right) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_ix_j = \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x}. \tag{23}$$

2.1.3 Канонический вид квадратичной формы.

Определение. Говорят, что квадратичная форма (21) имеет *канонический вид*, если $a_{ij} = 0$ для $\forall i \neq j$, $\left(i, j = \overline{1,k}\right)$, т. е.

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots x_k\right) = a_{11}x_1^{\ 2} + a_{22}x_2^{\ 2} + \ldots + a_{kk}x_k^{\ 2}.$$

Очевидно, что матрица квадратичной формы, находящейся в каноническом виде, является диагональной:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Имеет место следующий основной результат.

Теорема 2. Любая квадратичная форма $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ в пространстве E_k имеет канонический вид в базисе из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ этой квадратичной формы:

$$\Phi\left(y_1, y_2, \ldots, y_k\right) = \lambda_1 y_1^{\ 2} + \lambda_2 y_2^{\ 2} + \ldots + \lambda_k y_k^{\ 2}, \tag{24}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$;

$y_1, y_2, \ldots, y_k$ – координаты вектора $\vec{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)^T$ в базисе из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$.

2.1.4 Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы.

Определение. Квадратичная форма $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ называется *положительно определённой*, если $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) > 0$ для любого $\vec{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)^T$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Если же $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) < 0$ для любого $\vec{x} \neq \vec{0}$, то квадратичная форма $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ называется *отрицательно определённой*.

Существуют и знаконеопределённые квадратичные формы, например, $\Phi\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$. Поведение квадратичных форм с точки зрения постоянств знака можно выяснить с помощью канонического вида данной квадратичной формы. Однако построение канонического вида квадратичной формы может быть весьма сложным при большом числе переменных ($k > 3$). Поэтому желательно иметь и другой критерий, не связанный с построением канонического вида.

Пусть $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ – квадратичная форма, $\mathbf{A}$ – её матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_k = \left|\mathbf{A}\right|$$

и назовём $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ *главными минорами* матрицы $\mathbf{A}$.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы квадратичная форма $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы $\mathbf{A}$ были положительными, т. е. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0, \ldots,$ $\Delta_k > 0$. Для того чтобы форма $\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры нечётного порядка были отрицательными, а чётного порядка – положительными, т. е. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, \ldots,$ $(-1)^k \Delta_k > 0$.

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Привести к диагональному виду матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение

Собственные значения этой матрицы равны $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, а соответствующие им собственные векторы равны (см. п. 1.2, пример 7):

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица $\mathbf{T}$ перехода от исходного базиса к базису $\left\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}\right\}$ имеет вид:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ откуда } \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 2 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Вычисляем матрицу $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 2 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 2 – Привести к диагональному виду матрицу $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (2-\lambda)(4-\lambda) + 3 = 0; \quad \lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0;$$

$D = b^2 - 4ac = 36 - 44 = -8 < 0$, следовательно, уравнение не имеет действительных корней. Значит, матрица $\mathbf{A}$ не имеет действительных собственных значений и не может быть приведена к диагональному виду.

Пример 3 – Найти матрицу квадратичной формы

$$\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = 4x_1^{\,2} - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^{\,2} - 3x_3^{\,2}$$

и записать $\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right)$ в векторно-матричном виде.

Решение

Имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{x}^T = \left(x_1, x_2, x_3\right); \quad \mathbf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 - 3x_3 \end{bmatrix}.$$

Произведение строки $\vec{x}^T$ и столбца $\mathbf{A}\vec{x}$ даёт $\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right)$:

$$\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = 4x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - 2x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_3^{\,2}.$$

Пример 4 – Записать квадратичную форму, соответствующую матрице

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение

Пусть $\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in E_4$. Тогда

$$\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \vec{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = x_1^{\,2} + 2x_2^{\,2} - 2x_3^{\,2} + 5x_4^{\,2} - 2x_1x_3 + 6x_2x_4 + 8x_3x_4.$$

Пример 5 – Построить канонический вид квадратичной формы

$$\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^{\,2} + 3x_2^{\,2} + x_3^{\,2} - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение

Матрица данной квадратичной формы имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем собственные значения матрицы $\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. В соответствии с теоремой 2 канонический вид квадратичной формы:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{1}{2} y_3^2.$$

Пример 6 – Построить канонический вид квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2) = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Указать линейное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

Решение

Записываем матрицу данной квадратичной формы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Считаем, что матрица $\mathbf{A}$ и квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2)$ заданы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем

$$(17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = 0, \ \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 20.$$

Находим собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$. Для $\lambda_1 = 5$ имеем

$$\begin{cases} 12u_1 + 6u_2 = 0; \\ 6u_1 + 3u_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow u_2 = -2u_1; \quad \vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ -2u_1 \end{bmatrix}; \quad u_1 \neq 0.$$

Нормированный (т. е. единичной длины) собственный вектор равен $\vec{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^T$.

Для $\lambda_2 = 20$ имеем

$$\begin{cases} -3v_1 + 6v_2 = 0; \\ 6v_1 - 12v_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow v_1 = 2v_2; \quad \vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad v_2 \neq 0.$$

Нормированный собственный вектор равен $\vec{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^T$. Составляем матрицу $\mathbf{T}$ перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к базису $\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}\}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Получаем связь между старыми x_1, x_2 и новыми y_1, y_2 координатами вектора $\vec{x}$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2, \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2. \end{cases} \tag{25}$$

Подставляем эти выражения в $\Phi(x_1, x_2)$:

$$\Phi(y_1, y_2) = 17\left(\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2\right)^2 + 12\left(\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2\right) +$$

$$+ 8\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2\right)^2 = 5{y_1}^2 + 20{y_2}^2.$$

Формулы (25) дают искомое линейное преобразование, приводящее квадратичную форму $17{x_1}^2 + 12x_1x_2 + 8{x_2}^2$ к каноническому виду $5{y_1}^2 + 20{y_2}^2$.

Пример *7* – Определить знакоопределённость квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -{x_1}^2 - 2{x_2}^2 - 3{x_3}^3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение

Применим критерий Сильвестра.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = -1 < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 1 = -3 < 0.$$

Главные миноры первого и третьего порядка отрицательные, минор второго порядка положительный. Значит, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ является отрицательно определённой квадратичной формой.

2.3 Примеры для самостоятельной работы

2.3.1 Записать матрицу для квадратичной формы:

1) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$;

2) $x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+x_2^2+2x_2x_3-4x_2x_4+x_3^2-2x_4^2$.

Ответы: 1) $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&1&-2\\1&1&1&0\\-1&-2&0&-2\end{bmatrix}$.

2.3.2 Записать квадратичную форму по заданной матрице:

1) $\begin{bmatrix}1&-6\\-6&5\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}2&-3&0\\-3&1&4\\0&4&-5\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}2&-1&5\\-1&-3&6\\5&6&0\end{bmatrix}$.

Ответы: 1) $x_1^2-12x_1x_2+5x_2^2$; 2) $2x_1^2-6x_1x_2+x_2^2+8x_2x_3-5x_3^2$;

3) $2x_1^2-2x_1x_2+10x_1x_3-3x_2^2+12x_2x_3$.

2.3.3 Построить канонический вид следующих квадратичных форм и указать линейные преобразования, приводящие данные квадратичные формы к каноническому виду:

1) $\Phi(x_1,x_2)=2x_1x_2$;

2) $\Phi(x_1,x_2)=x_1{}^2-4x_1x_2+4x_2{}^2$;

3) $\Phi(x_1,x_2)=13x_1{}^2-48x_1x_2+27x_2{}^2$;

4) $\Phi(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+2x_2{}^2-5x_3{}^2+2x_1x_2$;

5) $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2+2x_3x_4$.

Ответы: 1) $\Phi(y_1,y_2)=-y_1{}^2+y_2{}^2$, $x_1=\dfrac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}$, $x_2=\dfrac{-y_1+y_2}{\sqrt{2}}$;

2) $\Phi(y_1,y_2)=5y_2{}^2$, $x_1=\dfrac{y_1+y_2}{\sqrt{5}}$, $x_2=\dfrac{y_1-y_2}{\sqrt{5}}$;

3) $\Phi(y_1,y_2)=-5y_1{}^2+45y_2{}^2$, $x_1=0{,}8y_1+0{,}6y_2$, $x_2=0{,}6y_1-0{,}8y_2$;

4) $\Phi(y_1,y_2,y_3)=-5y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2$, $x_1=\dfrac{-y_2+y_3}{\sqrt{2}}$, $x_2=\dfrac{y_2+y_2}{\sqrt{2}}$, $x_3=y_1$;

5) $\Phi\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) = -y_1{}^2 - 0{,}618 y_2{}^2 + y_3{}^2 + 1{,}618 y_4{}^2$,

$x_1 = 0{,}526 y_2 - 0{,}851 y_4$, $x_2 = -0{,}851 y_2 - 0{,}526 y_4$, $x_3 = \dfrac{-y_1 + y_3}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \dfrac{y_1 + y_3}{\sqrt{2}}$.

2.3.4 Определить, какие квадратичные формы являются положительно либо отрицательно определёнными, а какие нет:

1) $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$;

2) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$;

3) $x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

4) $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$.

Ответы: 1) положительно определённая; 2) отрицательно определённая; 3) знаконеопределённая; 4) положительно определённая.

2.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 8, § 2; гл. 6, § 4]; [2, гл. 3, § 3.11–3.13]; [3, гл. 1, §1.18–1.19].

2.4.1 Построить канонический вид следующих квадратичных форм и указать линейные преобразования, приводящие эти формы к каноническому виду:

1) $\Phi\left(x_1, x_2\right) = 5x_1{}^2 + 12x_1x_2$;

2) $\Phi\left(x_1, x_2\right) = 5x_1{}^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2{}^2$;

3) $\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 3x_3{}^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

4) $\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = 11x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

5) $\Phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = 6x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + 3x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Ответы: 1) $\Phi\left(y_1, y_2\right) = -4y_1{}^2 + 9y_2{}^2$, $x_1 = 0{,}555 y_1 - 0{,}832 y_2$, $x_2 = -0{,}832 y_1 + 0{,}555 y_2$;

2) $\Phi\left(y_1, y_2\right) = 6y_1{}^2 + 2y_2{}^2$, $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} y_1 + \dfrac{1}{2} y_2$, $x_2 = \dfrac{1}{2} y_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} y_2$;

3) $\Phi\left(y_1, y_2, y_3\right) = 2y_1{}^2 - y_2{}^2 + 5y_3{}^2$, $x_1 = \dfrac{2}{3} y_1 - \dfrac{1}{3} y_2 - \dfrac{2}{3} y_3$,

$x_2 = \dfrac{2}{3} y_1 + \dfrac{2}{3} y_2 + \dfrac{1}{3} y_3$, $x_3 = \dfrac{1}{3} y_1 - \dfrac{2}{3} y_2 + \dfrac{2}{3} y_3$;

4) $\Phi\left(y_1, y_2, y_3\right) = 9y_1{}^2 + 18y_2{}^2 - 9y_3{}^2$, $x_1 = \dfrac{2}{3} y_1 + \dfrac{2}{3} y_2 - \dfrac{1}{3} y_3$,

$x_2 = \dfrac{-1}{3} y_1 + \dfrac{2}{3} y_2 + \dfrac{2}{3} y_3$, $x_3 = \dfrac{2}{3} y_1 - \dfrac{1}{3} y_2 + \dfrac{2}{3} y_3$;

5) $\Phi(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 7y_2^2 + 7y_3^2$, $x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{45}}y_3$,
$x_2 = \frac{-2}{3}y_1 + \frac{5}{\sqrt{45}}y_3$, $x_3 = \frac{-2}{3}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{4}{\sqrt{45}}y_3$.

3 Применение квадратичных форм к исследованию кривых и поверхностей второго порядка

3.1 Теоретическая часть

3.1.1 Канонические уравнения кривых 2-го порядка.

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Алгебраическое уравнение 2-й степени относительно x, y имеет следующий вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (26)$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Укажем кривые, которые могут быть заданы уравнениями вида (26).

Эллипс (рисунок 3), его каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (27)$$

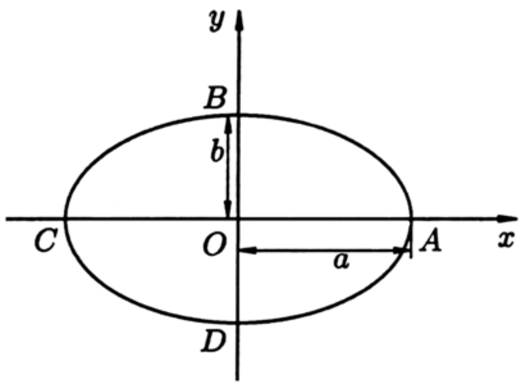

Рисунок 3

Гипербола (рисунок 4), её каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (28)$$

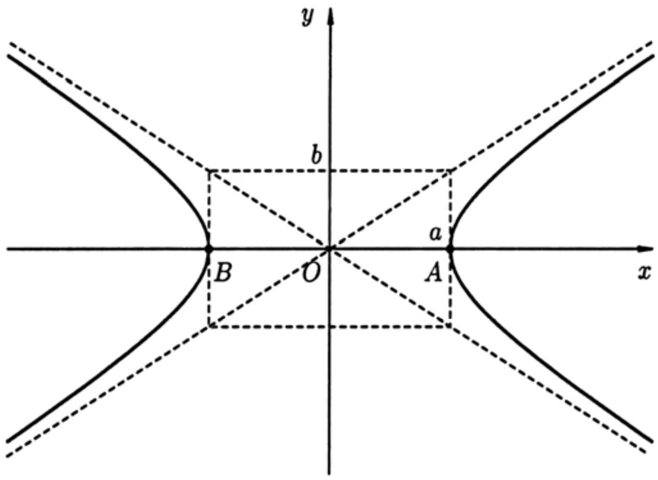

Рисунок 4

Парабола (рисунок 5), её каноническое уравнение

$$y^2 = 2px,\ p \neq 0. \tag{29}$$

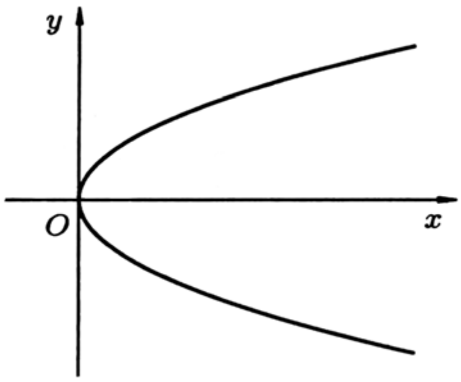

Рисунок 5

Кроме того, уравнение (26) может задавать и другие фигуры на плоскости, а именно:

– уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ определяет на плоскости две пересекающиеся прямые;

– уравнение $y^2 = a^2$ (или $x^2 = a^2$) определяет пару параллельных прямых при $a \neq 0$;

– уравнение $y^2 = 0$ ($x^2 = 0$) определяет прямую;

– уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ определяет точку $O(0,0)$.

Возможно также, что уравнение (26) не задаёт на плоскости никакую прямую.

3.1.2 Приведение общего уравнения кривых 2-го порядка к каноническому виду.

Записываем квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, соответствующую уравнению (26). Выписываем матрицу этой квадратичной формы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с пунктом 1.1.4 находим собственные значения λ_1 и λ_2 этой матрицы и её собственные векторы $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, причём $\vec{i}_1$ и $\vec{j}_1$ выбираем единичными и ортогональными. Пусть

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j}, \\ \vec{j}_1 = \alpha_2 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}. \end{cases}$$

Тогда для координат x, y и x_1, y_1 в системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ и $\{O, \vec{i}_1, \vec{j}_1\}$ соответственно имеем

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, \\ y = \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1. \end{cases} \tag{30}$$

Найденные выражения (30) подставляем в уравнение (26) и получаем

$$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 y_1^2 + a'_{13} x_1 + a'_{23} y_1 + a'_{33} = 0. \tag{31}$$

В уравнении (31) выделяем полные квадраты для x_1 и y_1, затем делаем ещё одну замену переменных:

$$x_2 = x_1 + \widetilde{a},\ y_2 = y_1 + \widetilde{b}$$

и получаем каноническое уравнение. Определяем вид кривой (или другой фигуры) и строим её в данной системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$.

Замечание – Вид кривой можно также определить, проанализировав произведение $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. Если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то рассматриваемая кривая соответствует эллиптическому типу, при $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ имеем кривую гиперболического типа. Случай $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ (причём $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ или $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$) соответствует кривой параболического типа.

3.1.3 Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка.

Пусть в пространстве E_3 задана декартова прямоугольная система координат $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Алгебраическое уравнение 2-го порядка относительно переменных x,y,z имеет следующий вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+a_{33}z^2+a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}=0. \tag{32}$$

Следующие поверхности могут быть заданы уравнением вида (32):

Эллипсоид (рисунок 6), его каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{33}$$

Конус (рисунок 7), его каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{34}$$

Однополостный гиперболоид (рисунок 8), его каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{35}$$

Двуполостный гиперболоид (рисунок 9), его каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{36}$$

Эллиптический параболоид (рисунок 10), его каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{37}$$

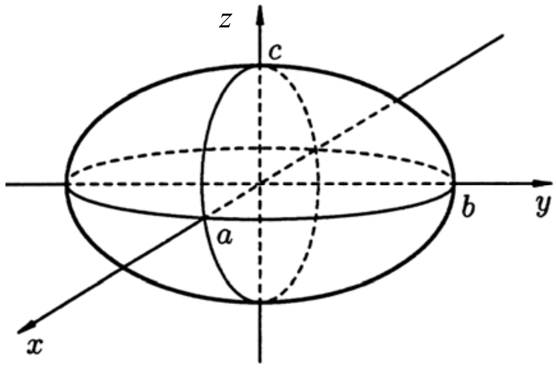

Рисунок 6

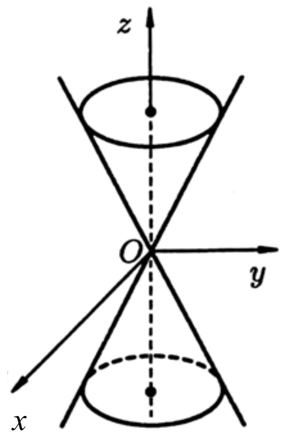

Рисунок 7

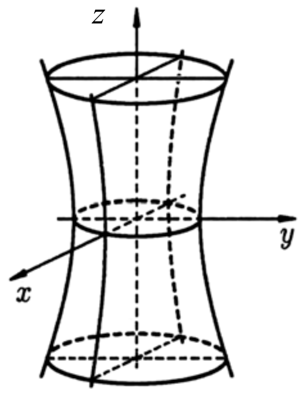

Рисунок 8

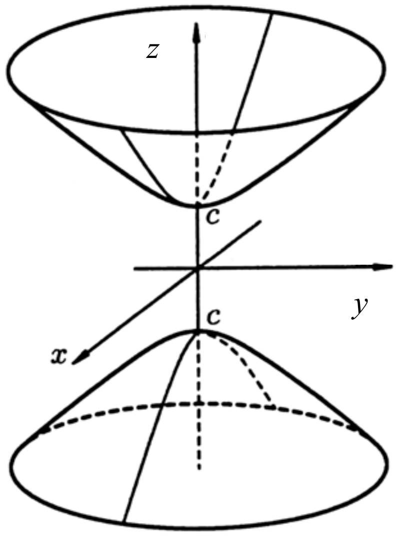

Рисунок 9

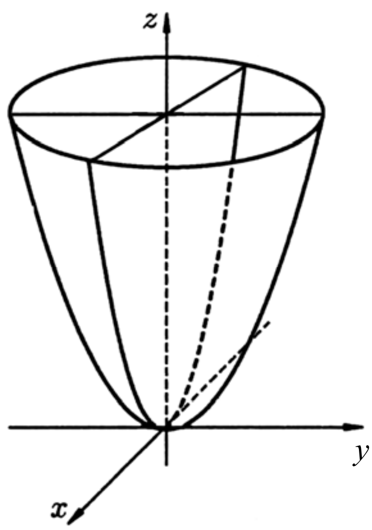

Рисунок 10

Гиперболический параболоид (рисунок 11), его каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{38}$$

Цилиндрические поверхности (рисунок 12), их канонические уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y^2=2px. \tag{39}$$

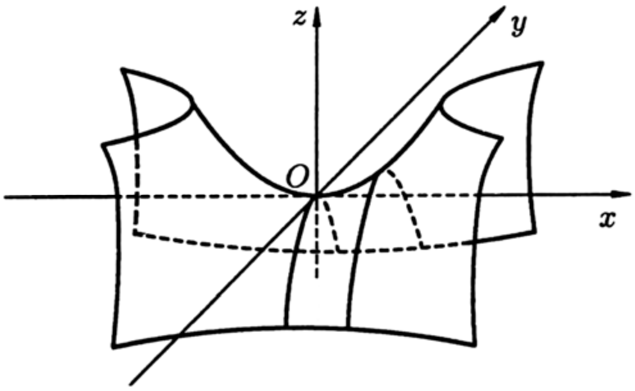

Рисунок 11

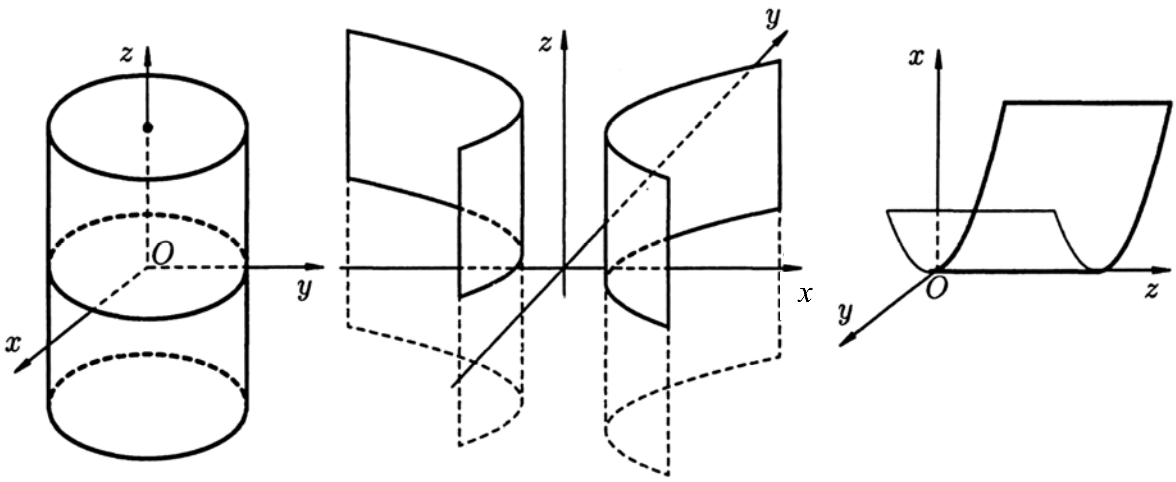

Рисунок 12

Кроме того, уравнение (32) может задавать и другие фигуры в пространстве, например, пару параллельных плоскостей, одну плоскость, пару пересекающихся плоскостей, точку. Возможно также, что уравнение (32) не определяет в пространстве никакой фигуры.

3.1.4 Приведение общего уравнения поверхностей 2-го порядка к каноническому виду.

Уравнение 2-го порядка в пространстве может быть приведено к каноническому виду таким же образом, как и уравнение 2-го порядка на плоскости. Для этого необходимо выполнить действия, перечисленные в п. 3.1.2.

3.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Определить вид и построить кривую 2-го порядка, заданную уравнением

$$2xy-6x+4y-15=0. \tag{40}$$

Решение

Квадратичная форма, соответствующая (40), есть $\Phi(x,y)=2xy$. Её матрица $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

Имеем

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-1=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1.$$

Так как $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1<0$, то рассматриваемая кривая имеет гиперболический тип. Находим собственные векторы $\mathbf{A}$.

Для $\lambda_1=1$: $\begin{cases}-x+y=0,\\ x-y=0,\end{cases}$ откуда $\vec{i}_1=(c;c)^T$. Примем $\vec{i}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

Для $\lambda_2=-1$: $\begin{cases}x+y=0,\\ x+y=0,\end{cases}$ откуда $\vec{j}_1=(c;-c)^T$. Примем $\vec{j}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

В соответствии с (30) получаем

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1,\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1.\end{cases} \tag{41}$$

Выражения (41) подставляем в (40) и выделяем полные квадраты:

$$2\left(\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}y_1^2\right)-6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)+4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)-15=0;$$

$$x_1^2-y_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}x_1-\frac{10}{\sqrt{2}}y_1-15=0;$$

$$\left(x_1^2-\frac{2}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{2}\right)-\left(y_1^2+\frac{10}{\sqrt{2}}y_1+\frac{25}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{25}{2}-15=0;$$

$$\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(y_1+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2=3.$$

Обозначаем $x_2=x_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2=y_1+\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

В результате получаем $\frac{{x_2}^2}{3}-\frac{{y_2}^2}{3}=1$. Данное уравнение задаёт гиперболу (рисунок 13).

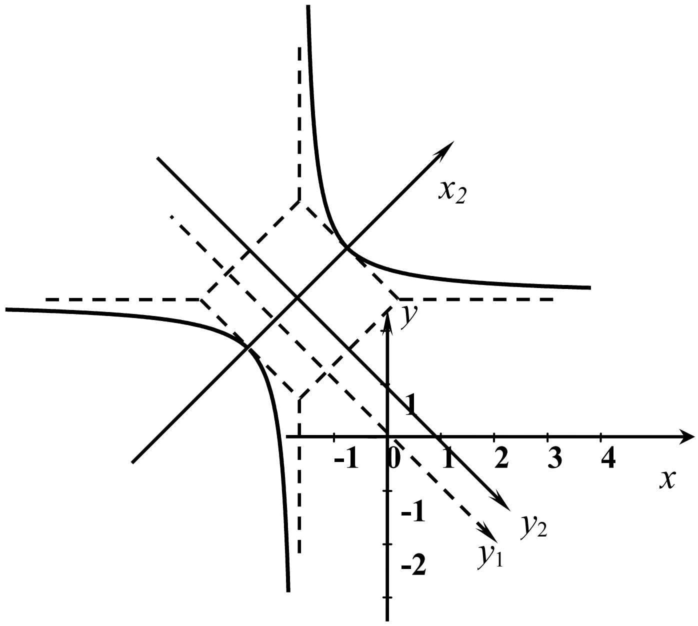

Рисунок 13

Пример 2 – Найти каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить её тип:

$$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y-8z+72=0. \qquad (42)$$

Решение

Квадратичная форма, соответствующая (42),

$$\Phi(x,y,z)=4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx.$$

Определяем её матрицу:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ -5 & 4 & 2\\ 2 & 2 & -8\end{bmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ -5 & 4-\lambda & 2\\ 2 & 2 & -8-\lambda\end{vmatrix}=0; \quad -\lambda^3+81\lambda=0;$$

$$-\lambda(\lambda-9)(\lambda+9)=0; \quad \lambda_1=9; \quad \lambda_2=-9; \quad \lambda_3=0.$$

Находим собственные векторы $\mathbf{A}$.

Для $\lambda_1 = 9$: $\begin{cases} -5x - 5y + 2z = 0, \\ -5x - 5y + 2z = 0, \\ 2x + 2y - 17z = 0, \end{cases}$ откуда $\vec{i}_1 = (c; -c; 0)^T$.

Принимаем $\vec{i}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)^T$.

Для $\lambda_2 = -9$: $\begin{cases} 13x - 5y + 2z = 0, \\ -5x + 13y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + z = 0, \end{cases}$ откуда $\vec{j}_1 = (c; c; -4c)^T$.

Принимаем $\vec{j}_1 = \left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}}; \dfrac{1}{3\sqrt{2}}; \dfrac{-4}{3\sqrt{2}} \right)^T$.

Для $\lambda_3 = 0$: $\begin{cases} 4x - 5y + 2z = 0, \\ -5x + 4y + 2z = 0, \\ 2x + 2y - 8z = 0, \end{cases}$ откуда $\vec{k}_1 = (2c; 2c; c)^T$.

Принимаем $\vec{k}_1 = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3} \right)^T$.

Получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{2}{3} z_1, \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{2}{3} z_1, \\ z = \qquad\qquad - \dfrac{4}{3\sqrt{2}} y_1 + \dfrac{1}{3} z_1. \end{cases} \tag{43}$$

Выражения (43) подставляем в (42):

$$4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} y_1 + \frac{2}{3} z_1 \right)^2 + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} y_1 + \frac{2}{3} z_1 \right)^2 - 8\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{3} z_1 \right)^2 -$$

$$-10\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} y_1 + \frac{2}{3} z_1 \right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} y_1 + \frac{2}{3} z_1 \right) +$$

$$+4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} y_1 + \frac{2}{3} z_1 \right)\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{3} z_1 \right) +$$

$$+4\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{3}z_1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{3\sqrt{2}}y_1+\frac{2}{3}z_1\right)-16\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{3\sqrt{2}}y_1+\frac{2}{3}z_1\right)-$$

$$-16\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{3\sqrt{2}}y_1+\frac{2}{3}z_1\right)-8\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{3}z_1\right)+72=0,$$

$$9x_1^2-9y_1^2-24z_1+72=0, \qquad 9x_1^2-9y_1^2-24(z_1-3)=0.$$

Обозначаем $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, $z_2=z_1-3$.

В результате получаем $\frac{x_2^2}{8/3}-\frac{y_2^2}{8/3}=z_2$. Это каноническое уравнение гиперболического параболоида (см. рисунок 11).

3.3 Примеры для самостоятельной работы

3.3.1 Следующие уравнения кривых 2-го порядка от переменных x, y привести к каноническому виду и построить соответствующие линии на плоскости:

1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;
2) $48x^2+64xy+32x+16y-11=0$;
3) $x^2+2xy+y^2-4\sqrt{2}x+4=0$;
4) $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$;
5) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;
6) $y^2+2y+4x-11=0$;
7) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

Ответы: 1) $\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1$; 2) $\frac{y_2^2}{1/4}-\frac{x_2^2}{1}=1$; 3) $y_2^2=2x_2$; 4) $\frac{x_2^2}{9}-\frac{y_2^2}{1}=1$; 5) $\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1$; 6) $y_2^2=-4x_2$; 7) $\frac{y_2^2}{16}-\frac{x_2^2}{9}=1$.

3.3.2 Следующие уравнения поверхностей 2-го порядка от переменных x, y, z привести к каноническому виду и определить вид соответствующей поверхности:

1) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$;
2) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$;
3) $x^2+3y^2-z^2+2z=0$;
4) $x^2+2y^2+3z^2+6x-4y-12z-1=0$.

Ответы: 1) эллипсоид $\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{1}+\frac{z_2^2}{2/3}=1$; 2) эллиптический цилиндр $\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{1}=1$; 3) двуполостный гиперболоид $\frac{x_2^2}{1}+\frac{y_2^2}{1/3}-\frac{z_2^2}{1}=-1$; 4) эллипсоид $\frac{x_2^2}{24}+\frac{y_2^2}{12}+\frac{z_2^2}{8}=1$.

3.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 3, § 1–4]; [2; гл. 6, § 6.1–6.11; гл. 7, § 7.1–7.8]; [3, гл. 1, § 1.20–1.21].

3.4.1 Привести к каноническому виду следующие уравнения второй степени и построить соответствующие линии на плоскости или определить вид соответствующих поверхностей в пространстве:

1) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y=0$;

2) $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$;

3) $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$;

4) $y^2-6y-x^2+2x=0$;

5) $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4xz+4yz-16x-16y+10z-3=0$;

6) $2y^2+x^2-4x-4z^2+4=0$.

Ответы: 1) $\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}=1$; 2) $\frac{x_2^2}{5/9}+\frac{y_2^2}{5/16}=1$; 3) $y_2^2=\frac{-1}{\sqrt{2}}x_2$; 4) $\frac{y_2^2}{8}-\frac{x_2^2}{8}=1$; 5) гиперболический параболоид $\frac{x_2^2}{8/3}-\frac{y_2^2}{8/3}=z_2$; 6) конус $\frac{x_2^2}{1}+\frac{y_2^2}{1/2}-\frac{z_2^2}{1/4}=0$.

Список литературы

1 **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд. испр. – М. : Физматлит, 2005. – 304 с.

2 **Гурский, Е. И.** Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – 2-е изд., доп. – Минск : Выш. шк., 1982. – 272 с.

3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.