МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Могилев 2021

УДК 517
ББК 22.1я73
В93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» декабря 2020 г., протокол № 4

Составители: Т. Ю. Орлова;
Д. В. Роголев

Рецензент И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Интегральное исчисление функций многих переменных. Кратные интегралы» предназначены для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения. В работе изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения задач, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Двойные интегралы и их вычисление…………………………………… 4
2 Замена переменных в двойном интеграле. Двойные интегралы в полярных координатах……………………………………………………………9
3 Приложения двойного интеграла………………………………………….. 14
4 Тройной интеграл и его вычисление в декартовой системе координат…………………………………………………………………………..… 20
5 Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах………………………………………………………………………….. 25
6 Приложения тройных интегралов………………………………………….. 31
Список литературы………...……………………………………………….. 37

1 Двойные интегралы и их вычисление

1.1 Теоретическая часть

Пусть функция $z = f(x,y)$ задана в некоторой ограниченной замкнутой области D на плоскости xOy. Разобьём эту область сеткой кривых на ячейки $s_1, s_2, ..., s_n$. В каждой ячейке s_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ выберем произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$ и умножим значение функции $f(P_i)$ на площадь Δs_i ячейки s_i. Сумма таких произведений по всем ячейкам $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$ называется *интегральной суммой*. Обозначим через $d(s_i)$ диаметр ячейки s_i и $\Delta = \max_{1\le i\le n} d(s_i)$ – наибольший из диаметров всех ячеек.

Двойным интегралом $\iint_D f(x,y)ds$ от функции $f(P)$ по области D называется предел интегральных сумм при условии $\Delta \to 0$:

$$\iint_D f(P)ds = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i ,$$

который не зависит от способа разбиения области D и от выбора точек P_i.

В декартовых координатах элемент площади ds записывается в виде $ds = dxdy$, а двойной интеграл обозначается $\iint_D f(x,y)dxdy$.

Область D на плоскости xOy называется *простой областью* относительно оси Ox, если она ограничена снизу линией $y = \varphi_1(x)$, сверху $y = \varphi_2(x)$ (функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны), и с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.

Всякая прямая, параллельная оси Oy и проходящая внутри отрезка $[a;b]$, пересекает границу области в двух точках (рисунок 1.1). Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy . \tag{1.1}$$

Область D на плоскости xOy называется *простой областью* относительно оси Oy, если она ограничена слева линией $x = \psi_1(y)$, справа $x = \psi_2(y)$ (функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны), снизу прямой $y = c$ и сверху прямой $y = d$.

Всякая прямая, параллельная оси Ox и проходящая внутри отрезка $[c;d]$, пересекает границу области в двух точках (рисунок 1.2).

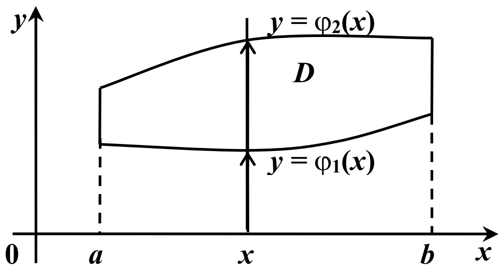

Рисунок 1.1

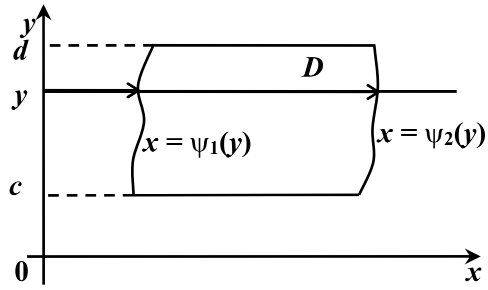

Рисунок 1.2

Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (1.2)$$

Наиболее простой вид формулы (1.1) и (1.2) принимают в случае прямоугольной области (рисунок 1.3).

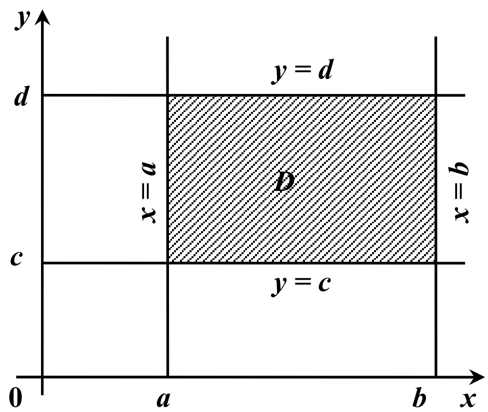

Рисунок 1.3

Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx. \qquad (1.3)$$

1.2 Образцы решения примеров

1.2.1 Вычислить $\iint\limits_D (x+y^3)dxdy$ по области $D:\{x=1, x=2, y=0, y=2\}$.

Решение

Применим формулу (1.3):

$$\iint\limits_D \left(x+y^3\right)dxdy = \int\limits_1^2 dx\int\limits_0^2 \left(x+y^3\right)dy = \int\limits_1^2 \left(xy+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 dx = \int\limits_1^2 \left(2x+\frac{16}{4}\right)dx =$$

$$=\left(x^2+4x\right)\Big|_1^2 = \left(4+8\right)-\left(1+4\right)=7.$$

1.2.2 Вычислить $\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $x=1$, $y=x$, $y=2-x^2$.

Решение

Построим область D (рисунок 1.4).

Область D является простой относительно оси Ox. В соответствии с формулой (1.1) имеем

$$\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} \left(x+y\right)dy =$$

$$=\int\limits_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{2-x^2} dx = \int\limits_0^1 \left(x\cdot\left(2-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(2-x^2\right)^2 -\right.$$

$$\left.-\left(x\cdot x+\frac{x^2}{2}\right)\right)dx = \int\limits_0^1 \left(2x-x^3+2-2x^2+\frac{1}{2}x^4-x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4-x^3-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{2}x^2+2x+2\right)dx = \left(\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}-\frac{7x^3}{6}+x^2+2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{10}-\frac{1}{4}-\frac{7}{6}+1+2=\frac{101}{60}.$$

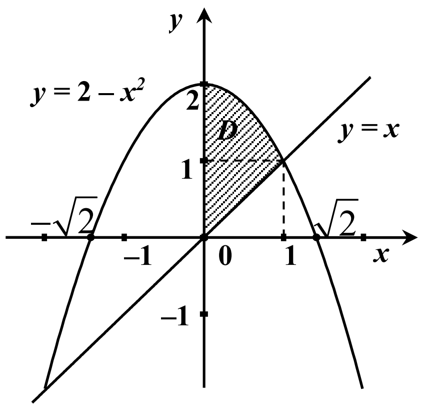

Рисунок 1.4

1.2.3 Вычислить $\iint\limits_D \left(x+2y\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x+y-2=0$.

Решение

Построим область D (рисунок 1.5).

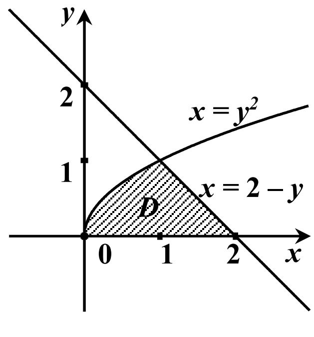

Рисунок 1.5

Она является простой относительно оси Oy. Применим формулу (1.2):

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y} (x+2y)\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Bigg|_{y^2}^{2-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 2y(2-y) - \frac{y^4}{2} - 2y^3\right)dy = \int\limits_0^1 \left(2-2y+\frac{y^2}{2}+4y-2y^2-\frac{y^4}{2}-2y^3\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2+2y-\frac{3}{2}y^2-2y^3-\frac{1}{2}y^4\right)dy = \left(2y+y^2-\frac{y^3}{2}-\frac{y^4}{2}-\frac{y^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = 3-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10} = 1,9.$$

1.2.4 Изменить порядок интегрирования в интеграле $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy$.

Решение

Изобразим область интегрирования (рисунок 1.6). Она ограничена прямыми $x=1$, $y=2x$ и параболой $y=x^2$. Разобьём эту область на две части прямой $y=1$.

Получим $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)\,dx$.

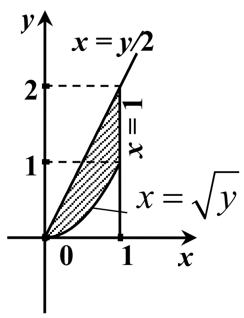

Рисунок 1.6

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1.3.1 Вычислить повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 (x^2+2y)\,dy$; б) $\int\limits_{-3}^3 dy \int\limits_{y^2-4}^5 (x+2y)\,dx$; в) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy$.

Ответ: а) $\frac{14}{3}$; б) $50,4$; в) $2,25$.

1.3.2 Расставить пределы интегрирования для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, если известно, что область интегрирования D:

а) ограничена прямыми $x=1$, $x=4$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y-1=0$;

б) является треугольником с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;3)$, $B(1;5)$.

1.3.3 Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

а) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$; б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{5x} f(x,y)dy$; в) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

1.3.4 Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x^2$ и $y^2=x$. Ответ: $\frac{33}{140}$.

1.3.5 Вычислить $\iint\limits_D xdxdy$, где область D ограничена линиями $xy=6$, $x+y-7=0$. Ответ: $20\frac{5}{6}$.

1.3.6 Вычислить $\iint\limits_D x^2dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2.$ Ответ: 2,25.

1.3.7 Вычислить $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy,\ D: y=x,\ y=\frac{\pi}{2},\ x=0.$ Ответ: 1.

1.3.8 Вычислить $\iint\limits_D y\ln x dxdy,\quad D: xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2.$ Ответ: $\frac{5}{4}\ln 2-\frac{5}{8}.$

1.4 Домашнее задание

1.4.1 В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы для обоих порядков интегрирования по области D, ограниченной линиями $y=2x,\ x=0,\ x+y=3.$

1.4.2 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3} f(x,y)dy$.

1.4.3 Вычислить $\iint\limits_D xdxdy,$ где $D: y=x^3,\ x+y=2,\ x=0$. Ответ: $\frac{7}{15}$.

1.4.4 Вычислить $\iint\limits_D xy^2dxdy,$ где $D: x^2+y^2=4, x+y-2=0, x\ge 0, y\ge 0$. Ответ: $\frac{8}{5}$.

2 Замена переменных в двойном интеграле. Двойные интегралы в полярных координатах

2.1 Теоретическая часть

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соответственно

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v); \end{cases}$$

где $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно отображающие область D плоскости xOy на область D' плоскости $uO'v$.

Формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(\varphi(u, v), \psi(u, v)\big) \cdot |J|\,dudv, \qquad (2.1)$$

где J – якобиан перехода, $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Прямоугольные декартовы и полярные координаты связаны соотношением

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases}$$

где $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$

Якобиан перехода от прямоугольных декартовых координат к полярным координатам имеет вид:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Формула замены переменных имеет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \cdot \rho \cdot d\rho d\varphi. \qquad (2.2)$$

2.2 Образцы решения примеров

2.2.1 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$ по области D плоскости xOy, ограниченной линиями $y=x-1$, $y=x+2$, $y=-x-2$, $y=-x+3$.

Решение

Построим область D (рисунок 2.1). Она не будет простой ни относительно оси Ox, ни относительно оси Oy.

Положим $\begin{cases} u=y-x, \\ v=y+x. \end{cases}$ Тогда прямые $y=x-1$ и $y=x+2$ перейдут в прямые $u=-1$ и $u=2$ плоскости $uO'v$, а прямые $y=-x-2$ и $y=-x+3$ – в прямые $v=-2$ и $v=3$ этой же плоскости. Область D отобразится в область D' (рисунок 2.2).

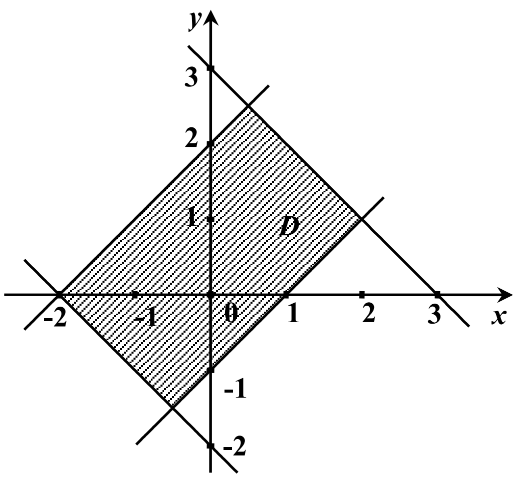

Рисунок 2.1

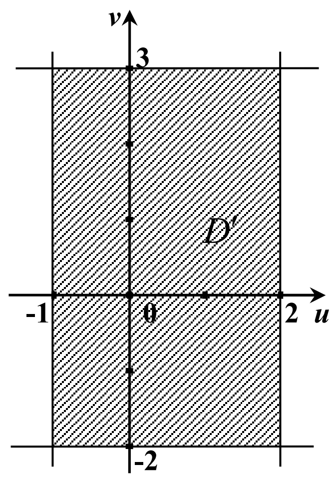

Рисунок 2.2

Из системы выражаем x и y: $\begin{cases} x=\dfrac{-u+v}{2}, \\ y=\dfrac{u+v}{2}. \end{cases}$

Найдём якобиан перехода:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2},\ \ |J|=\frac{1}{2}.$$

Согласно формуле (2.1)

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} v\cdot\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2}du\int\limits_{-2}^{3}vdv = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left.\frac{v^2}{2}\right|_{-2}^{3} = \frac{15}{4}.$$

2.2.2 Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dxdy,$ если область D – круг радиусом R и центром в начале координат.

Решение

Область D имеет вид: $x^2+y^2=R^2$.

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho^2=R^2;\ \rho=R; \quad D:\begin{cases} 0\le\rho\le R, \\ 0\le\varphi\le 2\pi. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_D \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\,dxdy = \iint\limits_{D'}\sqrt{\left(\rho^2\right)^3}\cdot\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D'}\rho^4 d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho^4 d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^R d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{R^5}{5}d\varphi = \frac{R^5}{5}\cdot 2\pi = \frac{2}{5}\pi R^5.$$

2.2.3 Вычислить $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, если область D ограничена полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2}$ и осью Ox.

Решение

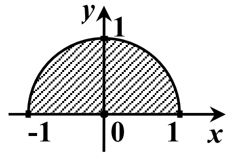

Рисунок 2.3

Изобразим область D (рисунок 2.3).

Перейдём к полярным координатам. Уравнение окружности в полярной системе координат (ПСК) имеет вид: $\rho=1$, где

$$D:\begin{cases} 0\le\rho\le 1, \\ 0\le\varphi\le\pi. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1} = \iint\limits_{D'} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^2+1} = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho d\rho}{\rho^2+1} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\left(\rho^2+1\right)\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(\ln 2 - \ln 1\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 \int\limits_0^{\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}\ln 2 .$$

2.2.4 Вычислить $\iint\limits_D ydxdy$, если область D ограничена верхней половиной дуги окружности $x^2+y^2=ax$ и отрезком оси Ox.

Решение

Преобразуем уравнение окружности:

$$x^2+y^2-ax=0; \qquad \left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}ax+\frac{a^2}{4}\right)+y^2=\frac{a^2}{4};$$

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ – окружность с центром в точке с координатами $\left(\frac{a}{2};0\right)$ и радиусом $R=\frac{a}{2}$. Сделаем рисунок (рисунок 2.4).

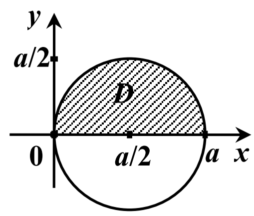

Рисунок 2.4

Перейдём к полярным координатам. Уравнение окружности $x^2+y^2=ax$ перейдёт в уравнение $\rho^2=a\rho\cos\varphi$, откуда

$$\rho=a\cos\varphi,\ D:\begin{cases}0\le\rho\le a\cos\varphi;\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_D ydxdy = \iint\limits_{D'} \rho\sin\varphi\cdot\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho^2 d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{a^3\cos^3\varphi}{3}d\varphi = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\left(\cos\varphi\right) =$$

$$= -\frac{a^3}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{12}\left(\cos^4\frac{\pi}{2}-\cos^4 0\right) = \frac{a^3}{12}.$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

2.3.1 Вычислить $\iint_D (x+y)dxdy$, если область D ограничена прямыми $2x+y=1$, $2x+y=3$, $x-y=2$, $x-y=-1$. Ответ: $7/3$.

2.3.2 Вычислить $\iint_D (12-x-y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=9$. Ответ: 108π.

2.3.3 Вычислить $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где $D: x^2+y^2=R^2, x=0, x\geq 0, y\geq 0$. Ответ: $\frac{\pi}{4}\left(e^{R^2}-1\right)$.

2.3.4 Вычислить $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$. Ответ: 24π.

2.3.5 Вычислить $\iint_D (4-x-y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2y$. Ответ: 3π.

2.3.6 Вычислить $\iint_D \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy$, если область D – кольцо между окружностями с центром в начале координат и радиусами e и 1. Ответ: 2π.

2.3.7 Вычислить $\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$, $D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=25$. Ответ: $\frac{128\pi}{3}$.

2.3.8 Вычислить $\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, \quad y\geq 0$. Ответ: 2.

2.3.9 Вычислить $\iint_D ydxdy$, $D: y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$. Ответ: $\frac{7\left(2\pi-\sqrt{3}\right)}{12}$.

2.4 Домашнее задание

2.4.1 Вычислить $\iint_D (y-x)dxdy$, где D – область, ограниченная прямыми $y=x+1$, $y=x+3$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+5$. Ответ: –8.

2.4.2 Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где D – круг $x^2+y^2=R^2$. Ответ: $\pi\left(e^{R^2}-1\right)$.

2.4.3 Вычислить $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy$, где D – часть кольца, ограниченная линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Ответ: $\dfrac{\pi^2}{6}$.

2.4.4 Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2x$. Ответ: $\dfrac{3\pi}{2}$.

3 Приложения двойного интеграла

3.1 Теоретическая часть

1 Площадь плоской фигуры

$$S=\iint\limits_D dxdy. \tag{3.1}$$

2 Объём криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу – плоскостью $z=0$, сбоку – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси *Oz*, а направляющей служит контур области *D*:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{3.2}$$

3 Площадь поверхности, заданной уравнением $z=f(x,y)$:

$$Q=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy. \tag{3.3}$$

Пусть $\mu(x,y)$ – поверхностная плотность пластины.

4 Масса плоской фигуры

$$m=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy. \tag{3.4}$$

5 Статические моменты относительно координатных осей:

$$M_x = \iint_D y\mu(x, y)dxdy; \tag{3.5}$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x, y)dxdy. \tag{3.6}$$

6 Координаты центра масс:

$$x_C = \frac{M_y}{m}; \; y_C = \frac{M_x}{m}. \tag{3.7}$$

7 Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x, y)dxdy; \tag{3.8}$$

$$I_y = \iint_D x^2\mu(x, y)dxdy; \tag{3.9}$$

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\mu(x, y)dxdy. \tag{3.10}$$

В случае однородной пластины $\mu\left(x, y\right) = \text{const}$.

3.2 Образцы решения примеров

3.2.1 Вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$, $2x + y = 1$.

Решение

Изобразим область D (рисунок 3.1).

Найдём точки пересечения данных линий, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = x + 1, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ \left(1 - 2x\right)^2 - x - 1 = 0; \end{cases}$$

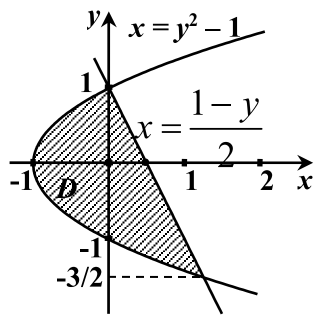

Рисунок 3.1

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{5}{4}, \\ y_2 = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Область D является простой относительно оси Oy. Найдём площадь:

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} dy \int_{y^2-1}^{\frac{1-y}{2}} dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(\frac{1-y}{2} - y^2 + 1 \right) dy = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(\frac{3}{2} - \frac{y}{2} - y^2 \right) dy =$$

$$= \left(\frac{3}{2} y - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{9}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{24} = \frac{125}{48}.$$

3.2.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\left(x^2 + y^2 \right)^2 = a^2 \left(x^2 - y^2 \right), \; a < 0.$$

Решение

Перейдём к полярным координатам, в которых уравнение линии примет вид: $\rho^4 = a^2 \cdot \rho^2 \left(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \right)$, откуда $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Эта кривая называется лемнискатой Бернулли (рисунок 3.2).

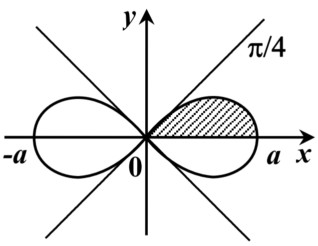

Рисунок 3.2

Так как кривая симметрична относительно координатных осей, то $S = 4\iint_D dxdy$. Перейдём к полярной системе координат, учитывая, что $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le a\sqrt{\cos 2\varphi}.$ Тогда

$$S = 4\iint_D dxdy = 4\iint_{D'} \rho d\rho d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= 2a^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi) d(2\varphi) = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = a^2.$$

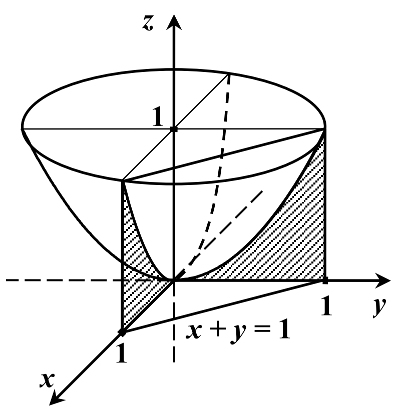

Рисунок 3.3

3.2.3 Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение

Поверхность $z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения. Плоскость $x + y = 1$ параллельна оси Oz. Сделаем рисунок (рисунок 3.3).

Область D ограничена треугольником, лежащим в плоскости xOy:

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1; \\ 0 \le y \le 1 - x. \end{cases}$$

Применим формулу (3.2):

$$V = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_1^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

3.2.4 Вычислить площадь части конуса $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 4x$.

Решение

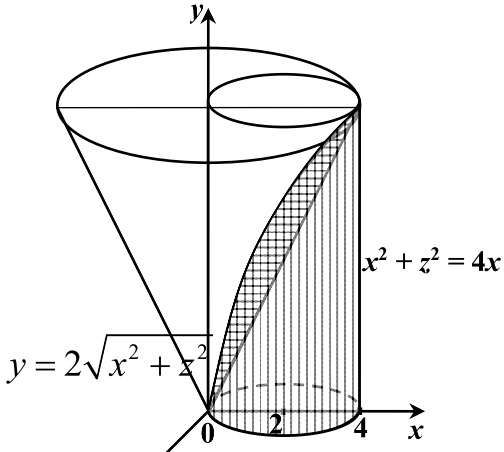

Рисунок 3.4

Так как поверхность задана уравнением вида $y = f(x, z)$, то её площадь надо вычислять по формуле

$$Q = \iint\limits_{D_y} \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(y'_z\right)^2}\, dxdz. \qquad (3.11)$$

Область D_y – проекция поверхности на плоскость xOz, представляющая собой круг, ограниченный окружностью $(x-2)^2 + z^2 = 4$ (рисунок 3.4).

$$y'_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+z^2}};\ y'_z = \frac{2z}{\sqrt{x^2+z^2}};$$

$$1 + \left(y'_x\right)^2 + \left(y'_z\right)^2 = 1 + \frac{4x^2}{x^2+z^2} + \frac{4z}{x^2+z^2} =$$

$$= \frac{x^2+z^2+4x^2+4z^2}{x^2+z^2} = 5.$$

В полярных координатах уравнение окружности примет вид: $\rho = 4\cos\varphi$, при этом $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 4\cos\varphi$. Тогда

$$Q = \iint\limits_{D_н} \sqrt{5}dxdy = \sqrt{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \rho d\rho = \sqrt{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{4\cos\varphi} d\varphi = 8\sqrt{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 8\sqrt{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 8\sqrt{5}\left.\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}\pi = 4\pi\sqrt{5}.$$

3.2.5 Найти координаты центра масс пластины D, ограниченной линиями $y = x,\ y = 2x,\ x = 2,$ если её плотность $\mu(x, y) = xy.$

Решение

Изобразим пластину D (рисунок 3.5). Определим её массу:

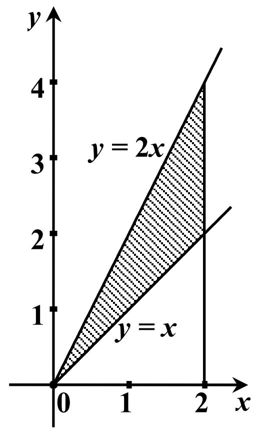

Рисунок 3.5

$$m = \iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^2 xdx\int\limits_x^{2x} ydy = \int\limits_0^2 x\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_x^{2x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x\left(4x^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 6.$$

Применим формулы (3.5)–(3.7):

$$M_y = \iint\limits_D x^2 ydxdy = \int\limits_0^2 x^2dx\int\limits_x^{2x} ydy = \int\limits_0^2 x^2\left.\frac{y^2}{2}\right|_x^{2x} dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 x^4dx = \frac{3}{2}\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{48}{5};$$

$$M_x = \iint\limits_D xy^2dxdy = \int\limits_0^2 xdx\int\limits_x^{2x} y^2dy = \int\limits_0^2 x\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_x^{2x} dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 7x^4dx = \frac{7}{3}\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{224}{15};$$

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{8}{5};\ y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{112}{45}.$$

3.3 Примеры для самостоятельной работы

3.3.1 Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 2 - x,\ \ y^2 = 4x + 4;$

б) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x = 4;$

в) $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = -6x + 9;$

г) $\rho = a\sin 2\varphi,\ a > 0.$

Ответ: а) $\frac{64}{3}$; б) $\frac{16}{3}$; в) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; г) $\frac{\pi a^2}{4}$.

3.3.2 Вычислить объёмы тел, ограниченных указанными поверхностями:

а) плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$;

б) параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$;

в) цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $z = 0$, $z = x + y + 10$;

г) $x^2 + y^2 = 4x,\ 2z = x^2 + y^2,\ z = 0$.

Ответ: а) $186\frac{2}{3}$; б) $78\frac{15}{32}$; в) 40π; г) 12π.

3.3.3 Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Ответ: $\frac{2\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)}{3}$.

3.3.4 Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры плотностью $\mu\left(x, y\right) = 1$, которая ограничена линиями $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$. Ответ: 8.

3.3.5 Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$, если $\mu\left(x, y\right) = xy$. Ответ: $x_C = y_C = \frac{9}{14}$.

3.3.6 Вычислить статический момент однородного полукруга, лежащего в плоскости xOy, радиуса R относительно диаметра. Ответ: $\frac{2R^3}{3}$.

3.3.7 Вычислить координаты центра масс однородной пластины ($\mu\left(x, y\right) = 1$), ограниченной прямой $y = 0$ и первой полуволной синусоиды $y = \sin x$. Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$.

3.4 Домашнее задание

3.4.1 Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $xy = 4,\ x + y - 5 = 0;$

б) $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = 16 - 8x.$

Ответ: а) $\frac{15}{2} - 8\ln 2$; б) $8\sqrt{2}$.

3.4.2 Вычислить объём тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y + z = 2$ и цилиндром $y = x^2$. Ответ: $\frac{32\sqrt{2}}{15}$.

3.4.3 Вычислить площадь части конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 4x$. Ответ: $4\sqrt{2}\pi$.

3.4.4 Вычислить координаты центра масс однородной плоской пластинки, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. Ответ: $x_C = \frac{5a}{6}; y_C = 0$.

3.4.5 Вычислить момент инерции относительно точки пересечения диагоналей прямоугольной пластинки со сторонами 4 и 6, если её плотность $\mu(x, y) = 2$. Ответ: 208.

4 Тройной интеграл и его вычисление в декартовой системе координат

4.1 Теоретическая часть

Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ задана в некоторой ограниченной замкнутой пространственной области V. Разобьём эту область на пространственные ячейки $V_1, V_2, ..., V_n$. В каждой ячейке $V_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ и умножим значение функции в этой точке на объём Δv_i ячейки V_i. Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$. Обозначим через $d(V_i)$ диаметр ячейки V_i, т. е. расстояние между наиболее удалёнными точками этой ячейки, и $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} d(V_i)$ – наибольший из диаметров ячеек.

Тройным интегралом $\iiint\limits_V f(M)dv$ от функции $f(M)$ по области V называется предел интегральных сумм при условии $\Delta \to 0$:

$$\iiint\limits_V f(M)dv = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i, \tag{4.1}$$

который не зависит от способа разбиения области V и от выбора точек M_i.

В декартовых координатах элемент объёма записывается в виде $dv = dxdydz$. Тогда тройной интеграл обозначают в виде $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$.

Вычисление тройных интегралов производится по прямоугольной и криволинейной области V.

Прямоугольная область. Пусть V проектируется в область D на плоскости xOy (рисунок 4.1). Тройной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)dz. \qquad (4.2)$$

Криволинейная область. Пусть область V ограничена сверху поверхностью $\psi_2(x,y)$, снизу – $\psi_1(x,y)$, с боков – цилиндрической поверхностью и проектируется в область D плоскости xOy (рисунок 4.2).

Тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (4.3)$$

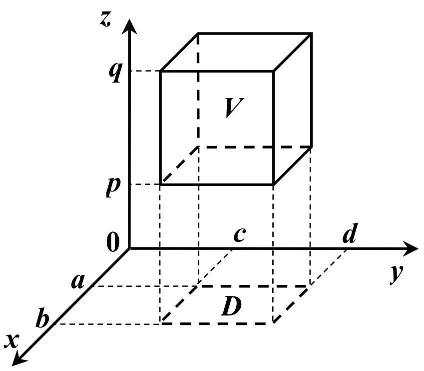

Рисунок 4.1

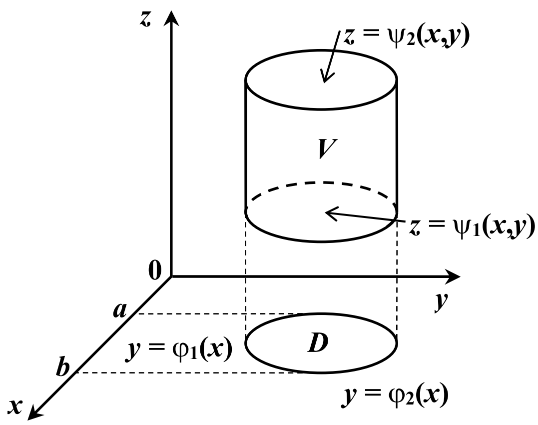

Рисунок 4.2

4.2 Образцы решения примеров

4.2.1 Вычислить $\iiint\limits_V x^3y^2zdxdydz$, если область V определяется неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

Решение

$$\iiint\limits_V x^3y^2z\,dxdydz=\int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^2 y^2dy\int\limits_0^3 zdz=\int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^2 y^2\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^3 dy=\int\limits_0^1 x^3dx\int\limits_0^2 y^2\cdot\frac{9}{2}dy=$$

$$=\frac{9}{2}\int\limits_0^1 x^3\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2 dx=\frac{9}{2}\int\limits_0^1 x^3\cdot\frac{8}{3}dx=12\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=12\cdot\frac{1}{4}=3.$$

4.2.2 Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+4z=12$.

Решение

Изобразим область V (рисунок 4.3).
Запишем уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1.$$

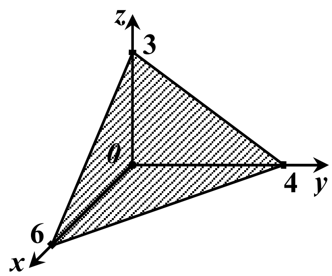

Рисунок 4.3

Область V проектируется в треугольник:

$$0\le x\le 6,\ 0\le y\le\frac{12-2x}{3}.$$

Пределы интегрирования z следующие: $0\le z\le\dfrac{12-2x-3y}{4}$. Итак,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{12-2x}{3}} dy\int\limits_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x,y,z)\,dz.$$

4.2.3 Вычислить $\iiint\limits_V y\cdot\cos(x+z)\,dxdydz$, где V – область, ограниченная цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $x+z=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение

Изобразим область V (рисунок 4.4) и её проекцию на плоскость xOy (рисунок 4.5).

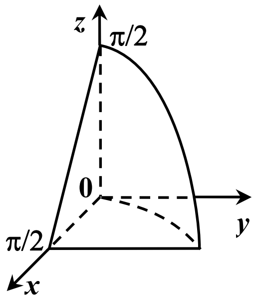

Рисунок 4.4

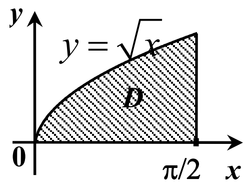

Рисунок 4.5

$$\iiint\limits_V y\cdot\cos(x+z)\,dxdydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}ydy\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}y\cdot\sin(x+z)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}y\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\,dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}ydy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}xdx-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=$$

$$=\begin{bmatrix}u=x;\ dv=\sin xdx\\ du=dx; v=-\cos x\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

4.3.1 Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями:

а) $y=x^2,\ z=0,\ y+z=4;$

б) $y=x,\ y=2x,\ z=0,\ x+z=2.$

4.3.2 Вычислить $\iiint\limits_V\left(2x^2+3y+z\right)dxdydz$, если V: $2\le x\le 3$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 4$. Ответ: 194.

4.3.3 Вычислить $\iiint\limits_V x^2yzdxdydz$, если V: $-1\le x\le 2$, $0\le y\le 3$, $2\le z\le 3$. Ответ: $\frac{135}{4}$.

4.3.4 Вычислить $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, где V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y+z=4$.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

4.3.5 Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(x+y+z+1\right)^3}$, где V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$.

4.3.6 Вычислить $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, $V: y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$. Ответ: $\frac{1}{96}$.

4.3.7 Вычислить $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, где $V: x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $z=x^2+y^2$. Ответ: $\frac{14}{3}$.

4.3.8 Вычислить $\iiint\limits_V dxdydz$, где $V: y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $z=1-x^2$, $z\geq 0$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

4.4 Домашнее задание

4.4.1 Вычислить $\iiint\limits_V \left(x+y+4z^2\right)dxdydz$, если V: $-1\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$, $-1\leq z\leq 1$. Ответ: $\frac{56}{3}$.

4.4.2 Вычислить $\iiint\limits_V 5xyz^2\,dxdydz$, если V: $-1\leq x\leq 0$, $2\leq y\leq 3$, $1\leq z\leq 2$.

Ответ: $-\frac{175}{12}$.

4.4.3 Вычислить $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, если V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=1$, $x+z=1$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

4.4.4 Вычислить $\iiint\limits_V \left(1-2y\right)dxdydz$, если V: $z=y^2$, $2x+z=6$, $x=0$, $z=4$.

Ответ: $19{,}2$.

5 Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

5.1 Теоретическая часть

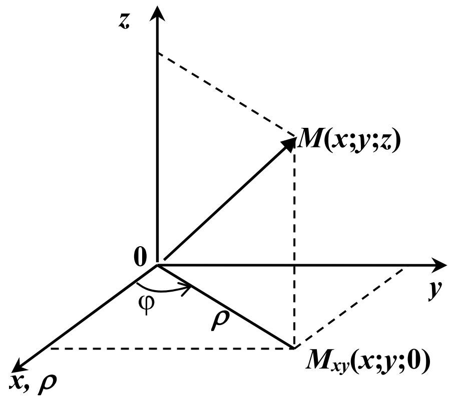

Рисунок 5.1

В случае цилиндрических координат положение точки $M(x;y;z)$ в пространстве определяется тремя числами (ρ,φ,z) (рисунок 5.1), где ρ – полярный радиус проекции точки $M(x;y;z)$ на плоскость xOy $\left(M_{xy}(x;y;0)\right)$; φ – полярный угол точки $M_{xy}(x;y;0)$; z – аппликата точки $M(x;y;z)$.

Связь декартовых и цилиндрических координат произвольной точки $M(x;y;z)$ пространства осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \quad (-\pi\le\varphi\le\pi), \\ y=\rho\sin\varphi, & 0\le\rho<+\infty, \\ z=z; & -\infty<z<+\infty. \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}; \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Тогда имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\cdot\rho\cdot d\varphi d\rho dz, \tag{5.2}$$

где якобиан перехода от ПДСК к цилиндрическим координатам равен $|J|=\rho$, т. е.

$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho.$$

Переход к цилиндрическим координатам целесообразен, если проекция области V на плоскость xOy есть круг, кольцо или их части.

Рассмотрим случай сферических координат.

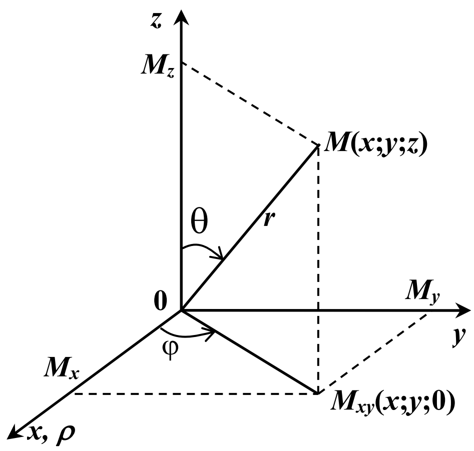

Рисунок 5.2

Введём сферические координаты (r,θ,φ) (рисунок 5.2), где r – радиус-вектор точки $M(x;y;z)$; θ – угол между радиус-вектором точки $M(x;y;z)$ и осью Oz; φ – угол между проекцией радиус-вектора точки $M(x;y;z)$ на плоскость xOy и осью Ox.

Связь декартовых и сферических координат произвольной точки $M(x;y;z)$ пространства осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & 0 \le \theta \le \pi, \\ z = r\cos\theta; & 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases} \tag{5.3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Для представления тройного интеграла в сферических координатах вычисляем якобиан:

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Окончательно получаем

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f^*(r,\theta,\varphi)\cdot r^2\sin\theta\cdot dr d\theta d\varphi. \tag{5.4}$$

Переход к сферическим координатам целесообразен, если область V есть шар или его часть.

5.2 Образцы решения примеров

5.2.1 Вычислить тройной интеграл по области V:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ V:\ x^2+y^2=4,\ z=2+x^2+y^2,\ z=1.$$

Решение

Построим область V, где $x^2+y^2=4$ – цилиндр, $z=2+x^2+y^2$ – параболоид, $z=1$ – плоскость (рисунок 5.3).

Проекцией области V на плоскость xOy является круг с центром в начале координат и радиусом 2 (рисунок 5.4).

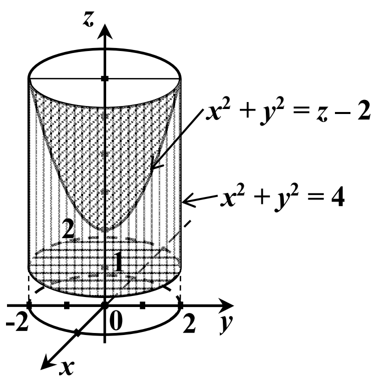

Рисунок 5.3

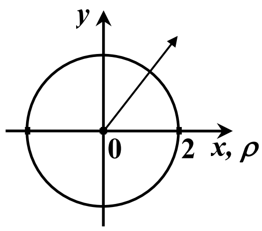

Рисунок 5.4

Введём цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x^2+y^2=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2; \\ x^2+y^2=z-2 \Rightarrow \rho^2=z-2 \Rightarrow z=\rho^2+2. \end{array}$$

$$V^*:\begin{cases} 1\le z\le \rho^2+2, \\ 0\le\rho\le 2, \\ 0\le\varphi\le 2\pi. \end{cases}$$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{V^*}\rho\cdot\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2d\rho\int\limits_1^{\rho^2+2}dz=\frac{272\pi}{15}.$$

5.2.2 Вычислить тройной интеграл по области V:

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ V: x^2+y^2=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=a.$$

Решение

Построим область V, где $x^2+y^2=2x$ – цилиндр, $z=0$, $z=a$, $y=0$ – плоскости (рисунок 5.5).

Проекцией области V на плоскость xOy является полукруг с центром в точке $(1;0)$ и радиусом 1 (рисунок 5.6).

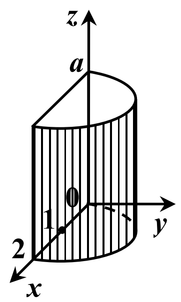

Рисунок 5.5

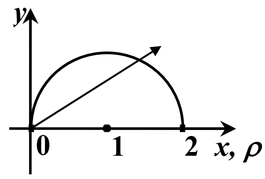

Рисунок 5.6

Введём цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+y^2=2x \Rightarrow \rho^2=2\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=2\cos\varphi,$$

$$V^*: \begin{cases} 0\le z\le a, \\ 0\le\rho\le 2\cos\varphi, \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{V^*} z\cdot\rho\cdot\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho\int\limits_0^a zdz=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^a d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\cdot\frac{a^2}{2}d\rho=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\cos^3\varphi}{3}d\varphi=\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi=\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\left.\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4a^2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8a^3}{9}.$$

5.2.3 Вычислить тройной интеграл по области V:

$$\iiint\limits_V \left(3z^2 - x^2 - y^2\right) dxdydz \text{ , } V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

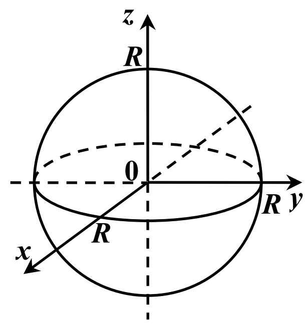

Рисунок 5.7

Решение

Область V – шар с центром в начале координат и радиусом R (рисунок 5.7).

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow r = R .$$

$$V^*: \begin{cases} 0 \le r \le R, \\ 0 \le \theta \le \pi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

$$\iiint\limits_V \left(3z^2 - x^2 - y^2\right) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} \left(3\left(r\cos\theta\right)^2 - \left(r\cos\varphi\cdot\sin\theta\right)^2 - \left(r\sin\theta\cdot\sin\varphi\right)^2\right)\cdot r^2\sin\theta d\varphi\, dr d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^{\pi} \left(4\cos^2\theta - 1\right)\sin\theta d\theta = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^{\pi} \left(4\cos^2\theta - 1\right) d\cos\theta =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^4 \left(\frac{4\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} dr = -\left(-\frac{4}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 1\right)\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^5}{5}\Bigg|_0^R d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{R^5}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2R^5}{15}\cdot 2\pi = \frac{4\pi R^5}{15} .$$

5.2.4 Вычислить тройной интеграл по области V:

$$\iiint\limits_V \left(3z^2 - x^2 - y^2\right) dxdydz \text{ , } V: x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz .$$

Решение

Область V – шар с центром в точке $\left(0;0;R\right)$ и радиусом R, т. к.

$$x^2+y^2+z^2=2Rz \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+\left(z-R\right)^2=R^2$$

(рисунок 5.8).

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=2Rz \Rightarrow r^2=2Rr\cos\theta \Rightarrow r=2R\cos\theta .$$

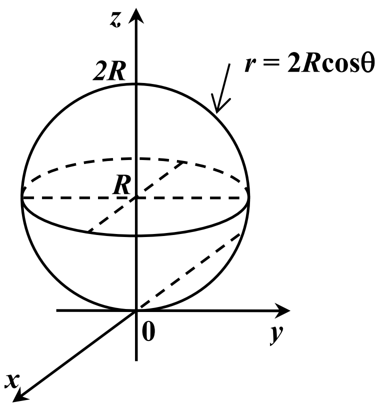

Рисунок 5.8

$$V^*:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le r\le 2R\cos\theta. \end{cases}$$

$$\iiint\limits_V \left(3z^2-x^2-y^2\right)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{V^*}\left(3\left(r\cos\theta\right)^2-\left(r\cos\varphi\cdot\sin\theta\right)^2-\left(r\sin\theta\cdot\sin\varphi\right)^2\right)\cdot r^2\sin\theta d\varphi dr d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2\theta-1\right)\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}r^4dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2\theta-1\right)\sin\theta\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{2R\cos\theta}d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2\theta-1\right)\sin\theta\frac{32R^5\cos^5\theta}{5}d\theta=$$

$$=-\frac{32R^5}{5}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^7\theta-\cos^5\theta\right)d\cos\theta=-\frac{32R^5}{5}\int\limits_0^{2\pi}\left.\left(\frac{4\cos^8\theta}{8}-\frac{\cos^6\theta}{6}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=$$

$$=-\frac{32R^5}{5}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{32R^5\cdot 1}{5\cdot 3}\cdot 2\pi=\frac{64\pi R^5}{15}.$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить тройные интегралы.

5.3.1 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz, \quad V: z=x^2+y^2, z=1$. Ответ: $\dfrac{4\pi}{15}$.

5.3.2 $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz, \quad V: z=x^2+y^2, z=0, x^2+y^2=1$. Ответ: $\dfrac{\pi}{32}$.

5.3.3 $\iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)dxdydz, \quad V: 2y = x^2+z^2,\ y=2$. Ответ: $\dfrac{16\pi}{3}$.

5.3.4 $\iiint\limits_V z^3 dxdydz, \quad V: x^2+y^2=z^2,\ z=1,\ y=0,\ x=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{24}$.

5.3.5 $\iiint\limits_V \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{R^5}{40}$.

5.3.6 $\iiint\limits_V xyzdxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{1}{48}$.

5.3.7 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2=36,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y\le -x$.

Ответ: 81π.

5.4 Домашнее задание

Вычислить тройные интегралы.

5.4.1 $\iiint\limits_V xdxdydz, \quad V: x^2 = 2\left(y^2+z^2\right),\ x=4,\ x\ge 0$. Ответ: 32π.

5.4.2 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{16\pi}{5}$.

5.4.3 $\iiint\limits_V x^2 dxdydz, \quad V: x^2+y^2=1,\ z=2x,\ z=3x,\ x>0$. Ответ: $\dfrac{4}{15}$.

5.4.4 $\iiint\limits_V ydxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2=32$, $y^2=x^2+z^2$, $y\ge 0$. Ответ: 128π.

6 Приложения тройных интегралов

6.1 Теоретическая часть

1 Вычисление объёма замкнутой области V:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz. \tag{6.1}$$

2 Вычисление массы тела, занимающего область V:

$$m = \iiint\limits_V \mu\left(x,y,z\right)dxdydz, \tag{6.2}$$

где $\mu(x,y,z)$ – объёмная плотность тела V.

Если тело V однородное, то $\mu(x,y,z)=\text{const}$.

3 Вычисление статических моментов тела, занимающего область V:

– статический момент тела V относительно плоскости yOz:

$$M_{yz}=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\cdot x\cdot dxdydz; \qquad (6.3)$$

– статический момент тела V относительно плоскости xOz:

$$M_{xz}=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\cdot y\cdot dxdydz; \qquad (6.4)$$

– статический момент тела V относительно плоскости xOy:

$$M_{xy}=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\cdot z\cdot dxdydz. \qquad (6.5)$$

4 Вычисление координат центра масс тела, занимающего область V (центра тяжести):

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m};\quad y_c=\frac{M_{xz}}{m};\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}, \qquad (6.6)$$

где M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статические моменты тела относительно координатных плоскостей; m – масса тела V.

5 Вычисление моментов инерции тела, занимающего область V:

– момент инерции тела V относительно оси Ox:

$$I_x=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\cdot\left(y^2+z^2\right)\cdot dxdydz; \qquad (6.7)$$

– момент инерции тела V относительно оси Oy:

$$I_y=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\cdot\left(x^2+z^2\right)\cdot dxdydz; \qquad (6.8)$$

– момент инерции тела V относительно оси Oz:

$$I_z=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot dxdydz; \qquad (6.9)$$

– момент инерции тела V относительно плоскости xOy:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V \mu(x,y,z) \cdot z^2 \cdot dxdydz; \qquad (6.10)$$

– момент инерции тела V относительно плоскости yOz:

$$I_{yz} = \iiint\limits_V \mu(x,y,z) \cdot x^2 \cdot dxdydz; \qquad (6.11)$$

– момент инерции тела V относительно плоскости xOz:

$$I_{xz} = \iiint\limits_V \mu(x,y,z) \cdot y^2 \cdot dxdydz; \qquad (6.12)$$

– момент инерции тела V относительно начала координат:

$$I_O = \iiint\limits_V \mu(x,y,z) \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot dxdydz. \qquad (6.13)$$

6.2 Образцы решения примеров

6.2.1 Вычислить объём тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$.

Решение

Параболоид $x^2 + y^2 = 3z$ является поверхностью входа, а сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ – поверхностью выхода (рисунок 6.1).

Проекцией тела на плоскость xOy является круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$ (рисунок 6.2), т. к.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0,\, z \ge 0 \Rightarrow z_1 = -4; z_2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3.$$

Перейдём к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \Rightarrow \rho^2 = 3z,\, \rho^2 + z^2 = 4,$$

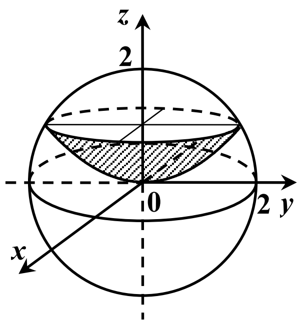

Рисунок 6.1

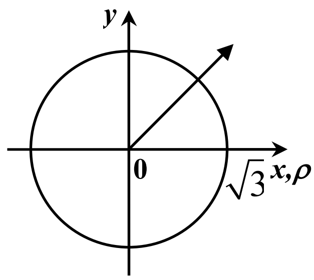

Рисунок 6.2

$$V^*:\begin{cases}\dfrac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2},\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le\sqrt{3}.\end{cases}$$

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_{V^*}\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\rho\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)d\rho^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{2\sqrt{\left(4-\rho^2\right)^3}}{3}-\frac{\rho^4}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}-\frac{9}{6}+\frac{16}{3}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{19}{12}\cdot 2\pi=\frac{19\pi}{6}.$$

6.2.2 Найти массу сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x^2+y^2+z^2=4a^2$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

Решение

Сделаем рисунок (рисунок 6.3).

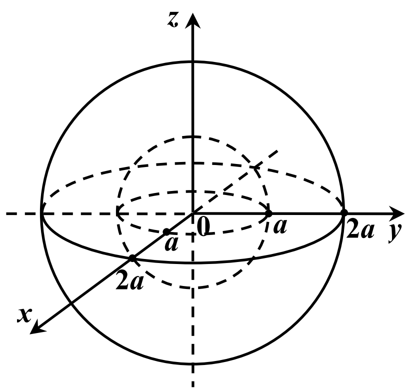

Рисунок 6.3

Плотность распределения масс найдём по формуле

$$\mu(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Тогда $m=\iiint\limits_V\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$.

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$V^*: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \pi, \\ a \le r \le 2a. \end{cases}$$

$$m = \iiint\limits_V \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz = \iiint\limits_{V^*} \frac{k}{r}\cdot r^2 \cdot \sin\theta dr d\varphi d\theta = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_a^{2a} r dr =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_a^{2a} r dr = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \left.\frac{r^2}{2}\right|_a^{2a} d\theta = -k\frac{4a^2 - a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos\theta\Big|_0^{\pi} d\varphi =$$

$$= -k\frac{3a^2}{2}(-1-1)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = k\cdot 3a^2\cdot 2\pi = 6\pi k a^2.$$

6.3 Примеры для самостоятельной работы

6.3.1 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$. Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

6.3.2 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $z = 2x^2 + y^2$, $y = x, y = 3x$, $x = 2, z \ge 0$. Ответ: $\dfrac{152}{3}$.

6.3.3 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$, $z \ge 0$. Ответ: 8π.

6.3.4 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 4z$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$. Ответ: $\dfrac{3\pi}{8}$.

6.3.5 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x = 6 - z^2 - y^2$, $x^2 = y^2 + z^2$, $x \ge 0$. Ответ: $\dfrac{32\pi}{3}$.

6.3.6 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$, $z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$, $z \ge 0$. Ответ: $\dfrac{92\pi R^3}{75}$.

6.3.7 Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 1$, $x = 0,\ y = 0$, $(x \ge 0,\ y \ge 0)$. Ответ: $x_c = y_c = \dfrac{16\sqrt{3}}{15\pi},\ z_c = 2$.

6.3.8 Найти массу тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, если $\mu(x, y, z) = kz^2$. Ответ: $\dfrac{59k\pi R^5}{480}$.

6.3.9 Найти момент инерции однородного цилиндра радиуса R, высоты H относительно его оси. Ответ: $\dfrac{\pi R^4 H}{2}$.

6.4 Домашнее задание

Найти объёмы тел, ограниченных поверхностями.

6.4.1 $x^2 + y^2 - 8x = 0,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z = 0$. Ответ: $\dfrac{2048}{9}$.

6.4.2 $x^2 + z^2 = y,\ y = 1$. Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

6.4.3 $y^2 + z^2 = 2ax,\ y^2 + z^2 = 2az,\ x = 0\ (a > 0)$. Ответ: $\dfrac{3\pi a^3}{4}$.

6.4.4 Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$. Ответ: $\dfrac{80}{3}$.

Список литературы

1 Высшая математика. Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск: Вышэйшая школа, 2000. – 351 с.

2 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – Т. 2. – 448 с.

4 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 411 с.

6 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: учебное пособие для втузов / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Т. 1. – 464 с.

7 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Т. 2. – 368 с.

8 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачёв. – 7-е изд. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с.