ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Могилев 2015

УДК 517
ББК 22.16
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» апреля 2015 г., протокол № 8

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. Л. А. Данилович;
ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
математик 1 категории Е. Г. Галуза

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

В методических рекомендациях приведен тест для самоконтроля при изучении раздела «Дифференциальные уравнения». Даны решения типовых задач с необходимыми теоретическими сведениями и варианты индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Е. С. Фитцова

Подписано в печать 10.07.2015. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,70. Тираж 56 экз. Заказ № 411.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

Введение

Методические рекомендации к самостоятельной работе состоят из трёх разделов: тест для самоконтроля, решение типового варианта и варианты индивидуальных заданий.

Тест для самоконтроля содержит 48 вопросов по всему разделу «Дифференциальные уравнения». Для каждого вопроса предложено несколько вариантов ответов, из которых необходимо выбрать один правильный. Тест рекомендуется проходить под контролем преподавателя после изучения раздела «Дифференциальные уравнения» для выявления полноты усвоения материала.

Решение типового варианта содержит образец решения задач по каждому индивидуальному заданию. Для решения каждой задачи приводятся необходимые теоретические сведения.

Варианты индивидуальных заданий содержат 10 заданий для самостоятельного решения по 30 вариантов в каждом. Задания должны быть выполнены в отдельной тетради, на обложке которой следует указать номер варианта, свою группу, фамилию и инициалы. Решать индивидуальные задания необходимо в указанной в методических рекомендациях последовательности. При этом условие каждой задачи нужно полностью переписать перед её решением. Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы.

В конце методических рекомендаций к самостоятельной работе представлен список литературы.

1 Тест для самоконтроля

1.1 Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, функцию $y(x)$ и …

1) константу C;
2) n произвольных констант C_1, C_2, …, C_n;
3) x', y';
4) x', x'', …, $x^{(n)}$, y', y'', …, $y^{(n)}$;
5) y', y'', …, $y^{(n)}$.

1.2 Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка обязательно должно содержать:

1) независимую переменную в явном виде;
2) искомую функцию в явном виде;
3) производную первого порядка искомой функции;
4) производную n-го порядка искомой функции;
5) n произвольных постоянных.

1.3 Решением дифференциального уравнения $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ называется функция, которая:

1) n раз дифференцируема и обращает уравнение в тождество;
2) n раз дифференцируема и обращает уравнение в тождество лишь при фиксированном значении аргумента x_0;
3) имеет вид $y = \varphi\left(x, y^{(n)}, C_1, C_2, ..., C_n\right)$, где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные;
4) имеет вид $y = \varphi(x, y', C_1, C_2, ..., C_n)$, где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные.

1.4 Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка невозможно выразить в явном виде, то его записывают так (y – функция аргумента x; C – константа):

1) $\Phi(x, y, C) = 0$;
2) $\Phi(C, x) = 0$;
3) $\Phi(C, y) = 0$;
4) $\Phi(y, x) = 0$.

1.5 Для нахождения частного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует задать дополнительно:

1) одно начальное условие;
2) $(n-1)$ начальных условий;
3) n начальных условий;
4) $(n+1)$ начальных условий;
5) ничего не надо задавать дополнительно, т. к. решение всегда однозначно.

1.6 Пусть y – функция независимой переменной x. Дифференциальное уравнение второго порядка может иметь вид: а) $y'' = f(x, y, y')$; б) $f(x, y', y'') = 0$; в) $y'' = f(x)$. Какие записи не верны:

1) все не верны;
2) все верны;
3) только а;
4) б, в;
5) а, в.

1.7 Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего …, называется задачей Коши. Вставьте пропущенные слова:

1) данному уравнению при любом C;
2) условию $y'(0) = 0$;
3) условию $f(x_0) = y_0$;
4) условию $f(x, y) = C_0$;
5) условию $f(x_0, y_0) = y_0$.

1.8 Всякое решение дифференциального уравнения первого порядка, полученное из общего решения $y = \varphi(C, x)$ …, называется частным решением. Вставьте пропущенные слова:

1) при любом $C \neq 0$;
2) только при $C = 0$;
3) при конкретном значении $C = C_0$;
4) при $y = x$;
5) при $y = x \cdot C$.

1.9 Дифференциальное уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ станет дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если:

1) $M(x,y) = M_1(x)\cdot N_1(y)$, $N(x,y) = M_2(x)\cdot N_2(y)$;
2) $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial y}$;
3) $M(x,y) = M_1(x) + N_1(y)$, $N(x,y) = M_2(x) + N_2(y)$;
4) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

1.10 Начинаем решать дифференциальное уравнение $M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$ следующим образом:

1) проверяем условие $\dfrac{\partial N_1}{\partial y} = \dfrac{\partial M_2}{\partial x}$;
2) делим на $M_2(x)\cdot N_1(y) \neq 0$;
3) делаем замену $y(x) = u(x)\cdot v(x)$;
4) делаем замену $y(x) = x\cdot z(x)$;
5) интегрируем $\int M_1(x)\cdot N_1(y)dx + \int M_2(x)\cdot N_2(y)dy = C$.

1.11 Общий интеграл дифференциального уравнения $M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$ – это:

1) $\int M_1(x)\cdot N_1(y)dx + \int M_2(x)\cdot N_2(y)dy = C$;
2) $\int M_1(x)\cdot N_1(y)dx = \int M_2(x)\cdot N_2(y)dy$;
3) $\int \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$;
4) $\int \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$.

1.12 Какие из следующих дифференциальных уравнений:
а) $M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$;
б) $y' = M(x)\cdot N(y)$;
в) $x' = M(x)\cdot N(y)$;
г) $y' = M(x) + N(y)$
есть уравнения с разделяющимися переменными:

1) все;
2) только г;
3) а, б, в;
4) а, б.

1.13 Дифференциальное уравнение $y' = f(x) \cdot g(y)$ начинаем решать следующим образом:

1) делим на $f(x) \neq 0$, затем интегрируем;
2) умножаем на $\frac{dx}{g(y)}$ $(g(y) \neq 0)$, затем интегрируем;
3) интегрируем обе части;
4) умножаем на dx, затем интегрируем;
5) умножаем на $\frac{dx}{f(x)}$ $(f(x) \neq 0)$, затем интегрируем.

1.14 Дифференциальное уравнение первого порядка $y'(x) = f(x, y)$ будет однородным, если:

1) $f(tx, ty) = t \cdot f(x, y)$;
2) $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$;
3) $f(tx, ty) = f(x, y)$.

1.15 Какие из следующих уравнений:

а) $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$; б) $y' = f\left(\frac{y^2}{x^2 - y^2}\right)$; в) $y' = f\left(\frac{y}{x + y}\right)$

есть однородные дифференциальные уравнения первого порядка (y – функция аргумента x):

1) только а;
2) только б;
3) только в;
4) б, в;
5) ни одно.

1.16 Дифференциальное уравнение $y'(x) + P(x, y) = Q(x, y)$ будет линейным, если:

1) $P(x, y) = P(x) \cdot y$ и $Q(x, y) = Q(y)$;
2) $P(x, y) = P(y) \cdot x$ и $Q(x, y) = Q(x)$;
3) $P(x, y) = P(x) \cdot y$ и $Q(x, y) = Q(x)$;
4) $P(x, y) = P(x)$ и $Q(x, y) = Q(x)$;
5) $P(x, y) = P(y) \cdot x$ и $Q(x, y) = Q(y)$.

1.17 Какие из следующих уравнений:

а) $y'(x)+P(x)\cdot y=Q(y)$; в) $y'(x)+P(y)\cdot y=Q(x)$

б) $y'(x)+P(x)\cdot y=Q(x)$;

есть линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

1) все; 4) только б;
2) ни одно; 5) только в.
3) только а;

1.18 Дифференциальное уравнение $y'(x)+P(x)\cdot y=Q(x)$ в процессе решения сводится к двум уравнениям:

1) $v'+P(x)\cdot v=0$, $u'v=Q(x)$; 4) $v'+P(x)\cdot y=0$, $y'=Q(x)$;
2) $u'+P(x)\cdot u=0$, $u'v=Q(x)$; 5) $y'=P(x)$, $P(x)\cdot y=Q(x)$.
3) $y'+P(x)\cdot y=0$, $Q(x)=0$;

1.19 Используя приведенные ниже пункты, составьте план решения дифференциального уравнения $y'(x)+P(x)\cdot y=Q(x)$ методом вариации произвольной постоянной:

а) находим общее решение $y=\varphi(x,C)$ однородного уравнения $y'+P(x)\cdot y=0$;

б) полагаем $C=C(x)$;

в) подставляя найденное $C(x)$ в равенство $y=\varphi(x,C(x))$, получаем общее решение неоднородного уравнения;

г) вычисляем y';

д) подставляем y, y' в неоднородное уравнение $y'(x)+P(x)\cdot y=Q(x)$.

1) а, б, г, д, в; 4) б, в, а, г, д;
2) а, б, в, д, г; 5) в, б, а, г, д.
3) б, а, в, г, д;

1.20 Какие из следующих дифференциальных уравнений:

а) $y'(x)+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n$; в) $y'(x)+P(x)\cdot y=y^n$

б) $y'(x)+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y$;

есть уравнения Бернулли:

1) только а; 2) только б;

3) только в;
4) а, б;
5) а, в.

1.21 Для того чтобы дифференциальное уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ − непрерывные функции, было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно выполнение условия:

1) $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$;
2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ − непрерывные функции;
3) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$;
4) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(x,y)$.

1.22 Если y_1, y_2, …, y_n – линейно-независимые решения дифференциального уравнения $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0$ $(a_0\neq 0)$, то общее решение этого уравнения имеет вид (C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные):

1) $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$;
2) $y=e^x\left(C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n\right)$;
3) $y=e^{C_1x}y_1+e^{C_2x}y_2+...+e^{C_nx}y_n$;
4) $y=C_1e^{y_1}+C_2e^{y_2}+...+C_ne^{y_n}$;
5) $y=e^{C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n}$.

1.23 Определите тип дифференциального уравнения $e^{x+3y}dy=x\,dy$:

1) с разделяющимися переменными;
2) однородное;
3) линейное;
4) в полных дифференциалах;
5) Бернулли.

1.24 Определите тип дифференциального уравнения $(x+1)y'+y=x^3+x^2$:

1) с разделяющимися переменными;
2) однородное;
3) линейное;
4) в полных дифференциалах;
5) Бернулли.

1.25 Определите тип дифференциального уравнения $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$:

1) с разделяющимися переменными;
2) однородное;
3) линейное;
4) в полных дифференциалах;
5) Бернулли.

1.26 Определите тип дифференциального уравнения $\left(2x^2y - 2x^3\right)\cdot y' + 2y^2x - 6x^2y + 4x^3 = 0$:

1) с разделяющимися переменными;
2) однородное;
3) линейное;
4) в полных дифференциалах;
5) Бернулли.

1.27 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{x}\right) + 1$:

1) $y = \ln|Cx| + 1$;
2) $\dfrac{x}{y - x} = \ln|Cx|$;
3) $\dfrac{x}{x - y} = \ln|Cx|$;
4) $y = Cx^3 + 2\ln|x|$;
5) $\dfrac{x - y}{x} = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$.

1.28 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' + 2y = e^{3x}$:

1) $y = e^{3x} + \dfrac{C}{e^{2x}}$;
2) $y = \dfrac{e^{3x}}{5} + \dfrac{C}{e^{2x}}$;

3) $y = e^{3x} + Ce^{2x}$;

4) $y = 5e^{3x} + \dfrac{C}{e^{2x}}$;

5) $y = \dfrac{1}{3}e^{3x-2} + C$.

1.29 Решите дифференциальное уравнение $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx + \left(2xy + x\right)dy = 0$:

1) $\dfrac{x^3}{3} + 2xy + \dfrac{3xy^2}{2} = C$;

2) $2x^2y + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = C$;

3) $x^2 + y^2 + y + 2xy + x = C$;

4) $\dfrac{x^3}{3} + y^2x + xy = C$;

5) $x^2y + y^2x + 2xy = C$.

1.30 Укажите метод решения дифференциального уравнения $xy'' = y'$:

1) непосредственное интегрирование;
2) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(x)$;
3) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(y)$;
4) с помощью подстановки $y'' = p(y)$;
5) с помощью подстановки $y'' = p(x)$.

1.31 Укажите метод решения дифференциального уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$:

1) непосредственное интегрирование;
2) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(x)$;
3) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(y)$;
4) с помощью подстановки $y'' = p(y)$;
5) с помощью подстановки $y'' = p(x)$.

1.32 Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка (y – функция независимой переменной x) с постоянными коэффициентами a_1, a_2, …, a_n называется уравнение вида:

1) $F\left(x, y^n, a_1y^{(n-1)}, ..., a_{n-1}y', a_ny\right) = 0$;

2) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$;
3) $x + y^n + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$;
4) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$;
5) $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$.

1.33 Решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$ находится:

1) n-кратным интегрированием;
2) $(n-1)$-кратным интегрированием;
3) $(n+1)$-кратным интегрированием;
4) методом вариации произвольных постоянных.

1.34 Какие из следующих дифференциальных уравнений:
а) $y'' = f(x, y, y')$; в) $y'' = f(x) + g(y)$;
б) $y'' = f(x, y)$; г) $y'' = f(x) \cdot g(y)$
допускают понижение порядка после соответствующей замены (y – функция независимой переменной x):

1) все; 4) а, б;
2) ни одно; 5) а, б, в.
3) только а;

1.35 Пусть k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ $(D > 0)$, соответствующего дифференциальному уравнению $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Чему равен вронскиан W функций $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$:

1) $W = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 x e^{k_1 x} & k_2 x e^{k_2 x} \end{vmatrix}$; 4) $W = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix}$;

2) $W = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_2 e^{k_1 x} & k_1 e^{k_2 x} \end{vmatrix}$; 5) $W = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ x e^{k_1 x} & x e^{k_2 x} \end{vmatrix}$.

3) $W = 0$;

1.36 Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, имеет действительные кратные корни $k_1 = k_2 = k$. Частными решениями дифференциального уравнения будут функции: а) e^{kx}; б) $k \cdot e^{kx}$; в) $x \cdot e^{kx}$. Какие выражения верны:

1) только а;
2) только б;
3) только в;
4) все верны;
5) а, в.

1.37 Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, имеет вид:

1) $e^{kx}(1 + a_1 + ... + a_{n-1} + a_n) = 0$;
2) $e^{kx}\left(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n\right) = 0$;
3) $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k^2 + a_n k = 0$;
4) $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0$;
5) $nk^n + (n-1) a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0$.

1.38 Если характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, имеет два различных действительных корня k_1 и k_2, то фундаментальная система решений состоит из функций:

1) $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$;
2) $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $k_1 e^{k_1 x}$, $k_2 e^{k_2 x}$;
3) $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $C_1 e^{k_1 x}$, $C_2 e^{k_2 x}$ (C_1, C_2 – произвольные постоянные);
4) $e^{k_1 x} \cdot \cos x$, $e^{k_2 x} \cdot \sin x$;
5) $e^x \cdot \cos k_1 \cdot x$, $e^x \cdot \sin k_2 \cdot x$.

1.39 Если характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, то фундаментальная система решений состоит из функций:

1) $e^{\alpha} \cdot \cos \beta x$, $e^{\alpha} \cdot \sin \beta x$;
2) $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$;
3) $e^{\beta x} \cdot \cos \alpha x$, $e^{\beta x} \cdot \sin \alpha x$;
4) $e^{(\alpha+\beta)x}$, $e^{(\alpha-\beta)x}$;
5) $e^{(k_1+k_2)}$, $e^{(k_1-k_2)}$.

1.40 Решите дифференциальное уравнение $y'' - 4yy' = 0$ при заданных начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$:

1) $\operatorname{arctg} y = 2x$;

2) $y = 2\operatorname{tg} 4x$;

3) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2} = 2x$;

4) $2y^3 = 3x$;

5) $y = 2\operatorname{tg} 2x$.

1.41 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''' = 2^x$:

1) $y = 2^x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

2) $y = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

3) $y = \ln^3 2 \cdot 2^x + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

4) $y = \dfrac{2^x}{\ln^3 2} + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3$.

1.42 Решите дифференциальное уравнение $y' = xy'' + y''$ при заданных начальных условиях $y(0) = \dfrac{1}{2}$; $y'(0) = 1$:

1) $2y = x^2 + x + 1$;

2) $y = \dfrac{x^2}{2}$;

3) $y + \dfrac{1}{2} = (x+1)^2$;

4) $2y = (x+1)^2$;

5) $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2}{2} + x$.

1.43 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$:

1) $y = C_1e^x + C_2$;

2) $y = C_1e^{-x} + C_2$;

3) $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$;

4) $y = e^{-x}(C_1x + C_2)$;

5) $y = e^x(C_1x + C_2)$.

1.44 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$:

1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$;

2) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$;

3) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$;

4) $y = C_1e^x + C_2xe^{2x}$.

1.45 Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + y = 0$:

1) $y=C_1\sin\frac{x}{2}+C_2\cos\frac{x}{2}$;
2) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$;
3) $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$;
4) $y=C_1\sin\frac{x}{3}+C_2\cos\frac{x}{3}$;
5) $y=C_1\sin 3x+C_2\cos 3x$.

1.46 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''-y'=e^{-x}$:

1) $y=C_1+C_2e^{x}+2e^{-x}$;
2) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}$;
3) $y=C_1+C_2e^{x}+e^{-x}$;
4) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+xe^{-x}$;
5) $y=C_1+C_2e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}$.

1.47 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''-2y'+y=e^{2x}$:

1) $y=e^{2x}+C_1e^{x}+C_2e^{-x}$;
2) $y=(C_1+C_2)e^{x}+2e^{2x}$;
3) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{x}$;
4) $y=(C_1+C_2)e^{-x}+e^{2x}$;
5) $y=(C_1+C_2x)e^{x}+e^{2x}$.

1.48 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''-y'=\cos x$:

1) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\cos x$;
2) $y=C_1+C_2e^{x}+\cos x+\sin x$;
3) $y=C_1+C_2e^{x}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$;
4) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\sin x-\cos x$.

2 Решение типового варианта

2.1 Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$.

Решение

Преобразуем данное уравнение:

$$y\left(1-x^2\right)dy=-x\left(y^2+1\right)dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{y^2+1}=\frac{xdx}{x^2-1}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int\frac{ydy}{y^2+1}=\int\frac{xdx}{x^2-1},$$

$$\int\frac{d\left(y^2+1\right)}{y^2+1}=\int\frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1},$$

$$\ln\left(y^2+1\right)=\ln\left|x^2-1\right|+\ln C,$$

$$y^2+1=C\left|x^2-1\right|.$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения является

$$y=\pm\sqrt{C\left|x^2-1\right|-1}.$$

2.2 Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y-xy'=x+yy'$.

Решение

Из данного уравнения находим производную y':

$$y' = \frac{y-x}{y+x}.$$

Данное уравнение является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = x \cdot u(x)$. Далее находим, что $y' = u'x + u$. Подставляя в последнее уравнение, имеем

$$u'x + u = \frac{ux - x}{ux + x},$$
$$u'x = \frac{u-1}{u+1} - u,$$
$$u'x = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x},$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(u^2+1\right)}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x},$$
$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) + \operatorname{arctg} u = -\ln|x| + \ln C,$$
$$\operatorname{arctg} u = \ln \frac{C}{\left|x\sqrt{u^2+1}\right|}.$$

Следовательно, общим интегралом исходного уравнения является

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2.3 Найдите частное решение дифференциального уравнения $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = \ln 5$.

Решение

Преобразуем уравнение, выделив производную y':

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y+e^{-x}}{1-x},$$
$$y'+y=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y=u(x)\cdot v(x)$. Далее находим, что $y'=u'v+v'u$. Подставляя в последнее уравнение, имеем

$$u'v+v'u+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},$$
$$u'v+u(v'+v)=\frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (1)$$

Находим функцию $v(x)$ из условия $v'+v=0$:

$$\frac{dv}{v}=-dx,$$
$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx,$$
$$\ln|v|=-x,$$
$$v=e^{-x}.$$

Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (1):

$$u'e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x},$$
$$du=\frac{dx}{1-x},$$
$$\int du=\int\frac{dx}{1-x},$$
$$u=-\ln|1-x|+\ln C,$$
$$u=\ln\frac{C}{|1-x|}.$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения является

$$y = uv = e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}.$$

Находим C, используя начальное условие $y(0) = \ln 5$:

$$\ln 5 = \ln C,$$
$$C = 5.$$

Окончательно получаем, что частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}.$$

2.4 Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(\frac{1}{x} - y^3 + 4\right)dx + \left(-\frac{1}{y} - 3xy^2\right)dy = 0$.

Решение

Введём обозначения:

$$P(x,y) = \frac{1}{x} - y^3 + 4, \qquad Q(x,y) = -\frac{1}{y} - 3xy^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2.$$

Так как выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - y^3 + 4, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y} - 3xy^2.$$

Проинтегрируем второе из этих уравнений по y (x при этом считается постоянной):

$$u(x,y)=\int\left(-\frac{1}{y}-3xy^2\right)dy=-\ln|y|-xy^3+C(x).$$

Чтобы найти функцию $C(x)$, продифференцируем теперь по x полученную выше функцию $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-y^3+C'(x).$$

В результате получаем уравнение

$$-y^3+C'(x)=\frac{1}{x}-y^3+4,$$
$$C'(x)=\frac{1}{x}+4,$$
$$C(x)=\ln|x|+4x+C.$$

Следовательно, функция $u(x,y)$ имеет вид:

$$u(x,y)=\ln|x|-\ln|y|-xy^3+4x+C.$$

Таким образом, общим интегралом исходного уравнения является

$$\ln|x|-\ln|y|-xy^3+4x=C.$$

2.5 Найдите частное решение дифференциального уравнения $y''=\dfrac{1}{(x+2)^5}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(-1)=\dfrac{1}{12}$, $y'(-1)=-\dfrac{1}{4}$.

Решение

Последовательно два раза интегрируя данное уравнение, имеем

$$y' = \int \frac{dx}{(x+2)^5} = -\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1,$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1 \right) dx = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1 x + C_2.$$

Таким образом, общим решением исходного уравнения является

$$y = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1 x + C_2.$$

Определим теперь значения C_1 и C_2, использовав заданные начальные условия. При $x = -1$, $y = \dfrac{1}{12}$ и $y' = -\dfrac{1}{4}$ имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{12} - C_1 + C_2, \\ -\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4} + C_1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{1}{12(x+2)^3}.$$

2.6 Найдите общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка: а) $y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0$, б) $y^3 y'' = -1$.

Решение:

а) данное уравнение является уравнением, не содержащим явно искомой функции y. Поэтому понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'$ и исходное уравнение принимает вид:

$$p'\left(e^x + 1\right) + p = 0,$$

$$\frac{dp}{dx}\left(e^x + 1\right) = -p,$$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{e^x+1},$$
$$\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{e^x+1}.$$

Найдём отдельно интеграл, стоящий в правой части равенства:

$$-\int\frac{dx}{e^x+1}=\left[e^x=t,\, x=\ln t,\, dx=\frac{dt}{t}\right]=-\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t}\right)dt=$$
$$=\ln|t+1|-\ln|t|+\ln C_1=\left[t=e^x\right]=\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x+\ln C_1.$$

Возвращаясь к решению дифференциального уравнения, имеем

$$\ln|p|=\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x+\ln C_1,$$
$$p=\frac{e^x+1}{e^x}C_1.$$

Делая обратную подстановку $p=y'$, получим уравнение

$$y'=\frac{e^x+1}{e^x}C_1,$$
$$y=C_1\int\left(1+e^{-x}\right)dx=C_1\left(x-e^{-x}\right)+C_2.$$

Таким образом, общим решением исходного уравнения является

$$y=C_1\left(x-e^{-x}\right)+C_2;$$

б) данное уравнение является уравнением, не содержащим явно аргумента x. Поэтому понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y'=p(y)$. Тогда $y''=p'p$ и исходное уравнение принимает вид:

$$y^3p'p=-1,$$
$$pdp=-\frac{dy}{y^3},$$
$$\int pdp=-\int\frac{dy}{y^3},$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1,$$

$$p=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1}.$$

Делая обратную подстановку $p=y'$, получим уравнение

$$y'=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1},$$

$$dx=\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1y^2}},$$

$$x=\pm\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}=\frac{\pm1}{4C_1}\int\left(1+2C_1y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1+2C_1y^2\right)=\frac{\pm1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1y^2}+C_2.$$

Таким образом, общим решением исходного уравнения является

$$x=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1y^2}+C_2.$$

2.7 Найдите общее решение дифференциального уравнения: а) $y''-6y'-55y=0$, б) $y''+14y'+49y=0$, в) $y''-2y'+37y=0$.

Решение:

а) характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$k^2-6k-55=0.$$

Его корни $k_1=-5$, $k_2=11$ – действительные различные, поэтому общим решением дифференциального уравнения является

$$y=C_1e^{-5x}+C_2e^{11x};$$

б) характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$k^2+14k+49=0.$$

Его корни $k_{1,2}=-7$ – действительные равные, поэтому общим решением дифференциального уравнения является

$$y=e^{-7x}\left(C_1+C_2x\right);$$

в) характеристическое уравнение для данного линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$k^2-2k+37=0.$$

Его корни $k_{1,2}=1\pm 6i$ – комплексно-сопряженные, поэтому общим решением дифференциального уравнения является

$$y=e^x\left(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x\right).$$

2.8 Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ методом вариации произвольных постоянных.

Решение

Рассмотрим вначале соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y''-y=0.$$

Характеристическое уравнение для данного уравнения имеет вид:

$$k^2-1=0.$$

Его корни $k_1=-1,\ k_2=1$ – действительные различные, поэтому общим решением соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения является

$$y_{\text{оо}}=C_1e^{-x}+C_2e^x.$$

Считая, что C_1 и C_2 есть функции от x, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{он}} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x}.$$

Определяем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = \dfrac{2e^{x}}{e^{x}-1}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{e^{x}-1}, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{e^{x}-1}. \end{cases}$$

Интегрируя полученные равенства, имеем

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}dx}{e^{x}-1} = \left[e^{x} = t,\, x = \ln t,\, dx = \frac{dt}{t} \right] = -\int \frac{tdt}{t-1} = -\int \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$
$$= -t - \ln|t-1| + C_1 = \left[t = e^{x} \right] = -e^{x} - \ln\left|e^{x}-1\right| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^{x}-1} = \left[e^{x} = t,\, x = \ln t,\, dx = \frac{dt}{t} \right] = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt =$$
$$= \ln|t-1| - \ln|t| + C_2 = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C_2 = \left[t = e^{x} \right] = \ln\left|\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\right| + C_2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{он}} = \left(-e^{x} - \ln\left|e^{x}-1\right| + C_1 \right) e^{-x} + \left(\ln\left|\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\right| + C_2 \right) e^{x} =$$
$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - e^{-x}\ln\left|e^{x}-1\right| + e^{x}\ln\left|\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\right| - 1.$$

2.9 Найдите общее решение дифференциального уравнения методом подбора частного решения: а) $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$, б) $y'' + y' = 5x + \cos 2x$.

Решение:

а) по условию задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его общее решение будем искать в виде суммы общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Найдём вначале общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение для данного уравнения имеет вид:

$$k^2 - 3k - 4 = 0.$$

Его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 4$ – действительные различные, поэтому общим решением соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения является

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения найдём методом неопределённых коэффициентов по виду специальной правой части.

Правая часть уравнения задана функцией $f(x) = 6xe^{-x}$, поэтому частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y_{\text{чн}} = (Ax + B)e^{-x}x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^{-x}.$$

Выражение $(Ax + B)e^{-x}$ умножили на x, так как число -1 является корнем характеристического уравнения. Для определения коэффициентов A и B найдём $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ и подставим в исходное уравнение.

$$y'_{\text{чн}} = (2Ax + B)e^{-x} - \left(Ax^2 + Bx\right)e^{-x} = \left(-Ax^2 + 2Ax - Bx + B\right)e^{-x},$$

$$y''_{\text{чн}} = \left(-2Ax + 2A - B\right)e^{-x} - \left(-Ax^2 + 2Ax - Bx + B\right)e^{-x} =$$
$$= \left(Ax^2 - 4Ax + Bx + 2A - 2B\right)e^{-x}.$$

Отсюда получаем

$$\left(Ax^2 - 4Ax + Bx + 2A - 2B\right)e^{-x} - 3\left(-Ax^2 + 2Ax - Bx + B\right)e^{-x} -$$
$$-4\left(Ax^2 + Bx\right)e^{-x} = 6xe^{-x},$$
$$-10Ax + 2A - 5B = 6x.$$

Приравнивая коэффициенты при x и x^0, получаем систему

$$\begin{cases} -10A = 6, \\ 2A - 5B = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5}, \\ B = -\dfrac{6}{25}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будет равно:

$$y_{\text{чн}} = -\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}.$$

Таким образом, получаем общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x};$$

б) по условию задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его общее решение будем искать в виде суммы общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Найдём вначале общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y'' + y' = 0.$$

Характеристическое уравнение для данного уравнения имеет вид:

$$k^2 + k = 0.$$

Его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 0$ – действительные различные, поэтому общим решением соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения является

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2.$$

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения найдём методом неопределённых коэффициентов по виду специальной правой части.

Правая часть уравнения задана функцией $f(x) = 5x + \cos 2x$, которая представляет собой сумму функций $f_1(x) = 5x$ и $f_2(x) = \cos 2x$. Им соответствуют два частных решения:

$$y^1_{\text{чн}} = Ax^2 + Bx,$$
$$y^2_{\text{чн}} = C\cos 2x + D\sin 2x.$$

Тогда частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y_{\text{чн}} = y^1_{\text{чн}} + y^2_{\text{чн}} = Ax^2 + Bx + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

Для определения коэффициентов A, B, C и D найдём $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ и подставим в исходное уравнение.

$$y'_{\text{чн}} = 2Ax + B - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x,$$
$$y''_{\text{чн}} = 2A - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x.$$

Отсюда получаем

$$2A - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x + 2Ax + B - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x = 5x + \cos 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при x, x^0, $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получаем систему

$$\begin{cases} 2A = 5, \\ 2A + B = 0, \\ -4C + 2D = 1, \\ -4D - 2C = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{5}{2}, \\ B = -5, \\ C = -\dfrac{1}{5}, \\ D = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будет равно:

$$y_{\text{чн}} = \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Таким образом, получаем общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 + \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x.$$

2.10 Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$

Решение

Сведем данную систему обыкновенных дифференциальных уравнений методом исключения к одному дифференциальному уравнению высшего порядка. Дифференцируем первое уравнение данной системы:

$$x'' = -7x' + y'.$$

Заменяем в полученном уравнении производную y' её выражением из второго уравнения данной системы:

$$x'' = -7x' - 2x - 5y.$$

В последнем уравнении y заменяем выражением $y = x' + 7x$, найденным из первого уравнения системы:

$$x'' = -7x' - 2x - 5(x' + 7x),$$

$$x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно неизвестной функции $x(t)$. Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$k^2 + 12k + 37 = 0.$$

Его корни $k_{1,2} = -6 \pm i$ – комплексно-сопряженные, поэтому общее решение линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Для нахождения y найдем вначале из последнего выражения x', а затем воспользуемся первым уравнением системы.

$$x' = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) =$$
$$= e^{-6t}(-6C_1 \cos t - 6C_2 \sin t - C_1 \sin t + C_2 \cos t),$$

следовательно,

$$y = e^{-6t}(-6C_1 \cos t - 6C_2 \sin t - C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) =$$
$$= e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t).$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t). \end{cases}$$

3 Варианты индивидуальных заданий

3.1 Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

3.1.1 $e^{x+3y}dy = x\,dx$.

3.1.2 $y'\sin x = y\ln y$.

3.1.3 $y' = (2x-1)\operatorname{ctg} y$.

3.1.4 $\sec^2 x\operatorname{tg} y\,dx + \sec^2 y\operatorname{tg} x\,dy = 0$.

3.1.5 $\left(1+e^x\right)y\,dy - e^y dx = 0$.

3.1.6 $\left(y^2+3\right)dx - \dfrac{e^x}{x}y\,dy = 0$.

3.1.7 $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx$.

3.1.8 $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$.

3.1.9 $\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)dx + \dfrac{dy}{\cos y} = 0$.

3.1.10 $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$.

3.1.11 $\sin x\operatorname{tg} y\,dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0$.

3.1.12 $3e^x\sin y\,dx + \left(1-e^x\right)\cos y\,dy = 0$.

3.1.13 $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$.

3.1.14 $3^{x^2+y}dy + x\,dx = 0$.

3.1.15 $\left(\cos(x-2y) + \cos(x+2y)\right)y' = \sec x$.

3.1.16 $y' = e^{x^2}x\left(1+y^2\right)$.

3.1.17 $\operatorname{ctg} x\cos^2 y\,dx + \sin^2 x\operatorname{tg} y\,dy = 0$.

3.1.18 $\sin x\cdot y' = y\cos x + 2\cos x$.

3.1.19 $1 + (1+y')e^y = 0$.

3.1.20 $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$.

3.1.21 $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0$.

3.1.22 $e^x\sin y\,dx + \operatorname{tg} y\,dy = 0$.

3.1.23 $\left(1+e^{3y}\right)x\,dx = e^{3y}dy$.

3.1.24 $\left(\sin\left(2x+y\right)-\sin\left(2x-y\right)\right)dx=\dfrac{dy}{\sin y}$.

3.1.25 $\cos y\,dx=2\sqrt{1+x^2}dy+\cos y\sqrt{1+x^2}dy$.

3.1.26 $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$.

3.1.27 $e^x\operatorname{tg}y\,dx=\left(1-e^x\right)\sec^2 y\,dy$.

3.1.28 $y'+\sin\left(x+y\right)=\sin\left(x-y\right)$.

3.1.29 $\cos^3 y\cdot y'-\cos\left(2x+y\right)=\cos\left(2x-y\right)$.

3.1.30 $3^{y^2-x^2}=\dfrac{yy'}{x}$.

3.2 Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

3.2.1 $y-xy'=x\sec\dfrac{y}{x}$.

3.2.2 $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xy\,dx=0$.

3.2.3 $\left(x+2y\right)dx-x\,dy=0$.

3.2.4 $\left(x-y\right)dx+\left(x+y\right)dy=0$.

3.2.5 $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$.

3.2.6 $y^2+x^2y'=xyy'$.

3.2.7 $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

3.2.8 $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

3.2.9 $xy'-y=\left(x+y\right)\ln\dfrac{x+y}{x}$.

3.2.10 $xy'=y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$.

3.2.11 $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=x\,dy$.

3.2.12 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

3.2.13 $y=x\left(y'-\sqrt[x]{e^y}\right)$.

3.2.14 $y'=\dfrac{y}{x}-1$.

3.2.15 $y'x + x + y = 0$.

3.2.16 $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$.

3.2.17 $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

3.2.18 $\left(4x^2 + 3xy + y^2\right)dx + \left(4y^2 + 3xy + x^2\right)dy = 0$.

3.2.19 $(x - y)\,y\,dx - x^2dy = 0$.

3.2.20 $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$.

3.2.21 $\left(x^2 - 2xy\right)y' = xy - y^2$.

3.2.22 $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + x\,dy = 0$.

3.2.23 $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$.

3.2.24 $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0$.

3.2.25 $\left(y^2 - 2xy\right)dx - x^2dy = 0$.

3.2.26 $(x + 2y)\,dx + x\,dy = 0$.

3.2.27 $(2x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$.

3.2.28 $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$.

3.2.29 $x^2y' = y(x + y)$.

3.2.30 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

3.3 Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

3.3.1 $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$.

3.3.2 $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$, $y(0) = 0$.

3.3.3 $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$.

3.3.4 $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$.

3.3.5 $y' = 2x\left(x^2 + y\right)$, $y(0) = 0$.

3.3.6 $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$.

3.3.7 $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \frac{1}{2e}$.

3.3.8 $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$.

3.3.9 $\cos y\,dx = (x + 2\cos y)\sin y\,dy$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

3.3.10 $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$.

3.3.11 $(2x + y)dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$, $y(0) = 1$.

3.3.12 $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, $y(0) = 1$.

3.3.13 $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $y(0) = 1$.

3.3.14 $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$.

3.3.15 $y = x(y' - x\cos x)$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3.3.16 $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$.

3.3.17 $\left(2e^y - x\right)y' = 1$, $y(0) = 0$.

3.3.18 $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 0$.

3.3.19 $\left(x + y^2\right)dy = y\,dx$, $y(0) = 1$.

3.3.20 $\left(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y\right)y' = 1$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

3.3.21 $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$.

3.3.22 $xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$.

3.3.23 $xy' + y = \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

3.3.24 $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x$, $y\left(\sqrt{2}\right) = 1$.

3.3.25 $\left(1 - x^2\right)y' + xy = 1$, $y(0) = 1$.

3.3.26 $y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x$, $y(0) = 0$.

3.3.27 $x^2 y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$.

3.3.28 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

3.3.29 $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$, $y(0) = 0$.

3.3.30 $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$.

3.4 Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

3.4.1 $\dfrac{1}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0$.

3.4.2 $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$.

3.4.3 $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

3.4.4 $x\,dx + y\,dy + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$.

3.4.5 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$.

3.4.6 $\dfrac{2x\left(1 - e^y\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}dx + \dfrac{e^y}{1 + x^2}dy = 0$.

3.4.7 $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

3.4.8 $\left(1 - e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$.

3.4.9 $x\left(2x^2 + y^2\right)dx + y\left(x^2 + 2y^2\right)dy = 0$.

3.4.10 $\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$.

3.4.11 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

3.4.12 $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$.

3.4.13 $\left(2x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y}\right)dx - \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2}dy = 0$.

3.4.14 $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$.

3.4.15 $\left(3x^2 - 2x - y\right)dx + \left(2y - x + 3y^2\right)dy = 0$.

3.4.16 $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$.

3.4.17 $\left(3x^2y + y^3\right)dx + \left(x^3 + 3xy^2\right)dy = 0$.

3.4.18 $y\left(x^2 + y^2 + a^2\right)dy - x\left(x^2 - y^2 - a^2\right)dx = 0$.

3.4.19 $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$.

3.4.20 $\dfrac{y+\sin x\cos^2(yx)}{\cos^2(yx)}dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2(yx)}-\sin y\right)dy=0$.

3.4.21 $\left(3x^2-y\cos(xy)+y\right)dx+\left(x-x\cos(xy)\right)dy=0$.

3.4.22 $\left(12x^3-e^{\frac{x}{y}}\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(16y+\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0$.

3.4.23 $\left(\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}+2xy\sin\left(x^2y\right)+4\right)dx+\left(\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}+x^2\sin\left(x^2y\right)\right)dy=0$.

3.4.24 $y3^{xy}\ln 3\,dx+\left(x3^{xy}\ln 3-3\right)dy=0$.

3.4.25 $\left(\dfrac{1}{x-y}+3x^2y^7\right)dx+\left(7x^3y^6-\dfrac{1}{x-y}\right)dy=0$.

3.4.26 $\left(\dfrac{2y}{x^3}+y\cos(xy)\right)dx+\left(\dfrac{1}{x^2}+x\cos(xy)\right)dy=0$.

3.4.27 $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-2x\right)dx+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}dy=0$.

3.4.28 $\left(5x^4y^4+28x^6\right)dx+\left(4x^5y^3-3y^2\right)dy=0$.

3.4.29 $\left(2xe^{x^2+y^2}+2\right)dx+\left(2ye^{x^2+y^2}-3\right)dy=0$.

3.4.30 $\left(3y^3\cos 3x+7\right)dx+\left(3y^2\sin 3x-2y\right)dy=0$.

3.5 Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

3.5.1 $y'''=\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

3.5.2 $y'''=\dfrac{1}{x}$, $y(1)=\dfrac{1}{4}$, $y'(1)=0$, $y''(1)=0$.

3.5.3 $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{3}{5}$.

3.5.4 $y'''=\dfrac{6}{x^3}$, $y(1)=0$, $y'(1)=5$, $y''(1)=1$.

3.5.5 $y''=4\cos 2x$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

3.5.6 $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

3.5.7 $y'''=\dfrac{2}{x}$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$, $y'(1)=0$, $y''(1)=0$.

3.5.8 $y''' = e^{2x}$, $y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$.

3.5.9 $y''' = \cos^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{8}$, $y''(0) = 0$.

3.5.10 $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

3.5.11 $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

3.5.12 $y'' = x + \sin x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$.

3.5.13 $y'' = \operatorname{arctg} x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3.5.14 $y'' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$.

3.5.15 $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$.

3.5.16 $y'' = \frac{x}{e^{2x}}$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = -\frac{1}{4}$.

3.5.17 $y'' = \sin^2 3x$, $y(0) = -\frac{\pi^2}{16}$, $y'(0) = 0$.

3.5.18 $y''' = x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

3.5.19 $y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

3.5.20 $y'' = \cos x + e^{-x}$, $y(0) = -e^{-\pi}$, $y'(0) = 1$.

3.5.21 $y'' = \sin^3 x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3.5.22 $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x$, $y(0) = -\frac{1}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{8}\cos 2$, $y''(0) = \frac{1}{2}$.

3.5.23 $y'' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3.5.24 $y'' = 2\sin x \cos^2 x$, $y(0) = -\frac{5}{9}$, $y'(0) = -\frac{2}{3}$.

3.5.25 $y'' = 2\sin^2 x \cos x$, $y(0) = \frac{1}{9}$, $y'(0) = 1$.

3.5.26 $y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3.5.27 $y'' = 2\cos x \sin^2 x - \cos^3 x$, $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 2$.

3.5.28 $y'' = x - \ln x$, $y(1) = -\dfrac{5}{12}$, $y'(1) = \dfrac{3}{2}$.

3.5.29 $y'' = \dfrac{1}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$.

3.5.30 $y''' = \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \dfrac{15}{16}$, $y''(0) = 0$.

3.6 Найдите общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

3.6.1 а) $\left(1 - x^2\right)y'' - xy = 2$; б) $y'' = y'e^y$.

3.6.2 а) $2xy'y'' = \left(y'\right)^2 - 1$; б) $2yy'' + \left(y'\right)^2 = 0$.

3.6.3 а) $x^3y'' + x^2y' = 1$; б) $yy'' + \left(y'\right)^2 = 0$.

3.6.4 а) $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$; б) $y'' + 2y\left(y'\right)^3 = 0$.

3.6.5 а) $y''x\ln x = y'$; б) $y''\operatorname{tg} y = 2\left(y'\right)^2$.

3.6.6 а) $xy'' - y' = x^2e^x$; б) $2yy'' = \left(y'\right)^2$.

3.6.7 а) $y''x\ln x = 2y'$; б) $yy'' - \left(y'\right)^2 = y^4$.

3.6.8 а) $x^2y'' + xy' = 1$; б) $y'' = \dfrac{-1}{2y^3}$.

3.6.9 а) $y'' = \dfrac{-x}{y}$; б) $y'' = 1 - \left(y'\right)^2$.

3.6.10 а) $xy'' = y'$; б) $\left(y''\right)^2 = y'$.

3.6.11 а) $y'' = y' + x$; б) $2yy'' - \left(y'\right)^2 = 1$.

3.6.12 а) $xy'' = y' + x^2$; б) $y'' = 2 - y$.

3.6.13 а) $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$; б) $y'' = \dfrac{1}{y^3}$.

3.6.14 а) $xy'' + y' = \ln x$; б) $yy'' - 2\left(y'\right)^2 = 0$.

3.6.15 а) $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$; б) $y'' = y' + \left(y'\right)^2$.

3.6.16 а) $y'' + 2x\left(y'\right)^2 = 0$; б) $y'' + \dfrac{2}{1-y}\left(y'\right)^2 = 0$.

3.6.17 а) $2xy'y'' = \left(y'\right)^2 + 1$; б) $y''(1 + y) = 5\left(y'\right)^2$.

3.6.18 а) $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$; б) $y''(2y + 3) - 2\left(y'\right)^2 = 0$.

3.6.19 а) $y''' + y''\operatorname{tg} x = \sec x$; б) $4(y'')^2 = 1 + (y')^2$.

3.6.20 а) $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \sin^3 x$; б) $2(y')^2 = (y-1)y''$.

3.6.21 а) $y'' + 4y' = 2x^2$; б) $1 + (y')^2 = yy'$.

3.6.22 а) $xy'' - y' = 2x^2 e^x$; б) $y'' + y(y')^3 = 0$.

3.6.23 а) $x(y''+1) + y' = 0$; б) $yy'' - (y')^2 = 0$.

3.6.24 а) $y'' + 4y' = \cos 2x$; б) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$.

3.6.25 а) $y'' + y' = \sin x$; б) $yy'' = \dfrac{\ln y + 1}{\ln y - 1}(y')^2$.

3.6.26 а) $x^2 y'' = (y')^2$; б) $y''(1+y) = (y')^2 + y'$.

3.6.27 а) $2xy''y' = (y')^2 - 4$; б) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

3.6.28 а) $y''' x \ln x = y''$; б) $y'' = \dfrac{1}{2}\left(1 + (y')^2\right)$.

3.6.29 а) $y''\operatorname{ctg} x + y' = 2$; б) $yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2$.

3.6.30 а) $\left(1+x^2\right)y'' = 2xy$; б) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

3.7 Найдите общее решение дифференциального уравнения.

3.7.1 а) $y'' + 4y = 0$;
б) $y'' - 10y' + 25y = 0$;
в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

3.7.2 а) $y'' - y' - 2y = 0$;
б) $y'' + 9y = 0$;
в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3.7.3 а) $y'' - 4y' = 0$;
б) $y'' - 4y' + 13y = 0$;
в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

3.7.4 а) $y'' - 5y' + 6y = 0$;
б) $y'' + 3y' = 0$;
в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

3.7.5 а) $y'' - 2y' + 10y = 0$;
б) $y'' + y' - 2y = 0$;
в) $y'' - 2y' = 0$.

3.7.6 а) $y'' - 4y = 0$;
б) $y'' + 2y' + 17y = 0$;
в) $y'' - y' - 12y = 0$.

3.7.7 а) $y'' + y' - 6y = 0$;
б) $y'' + 9y' = 0$;
в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

3.7.8 а) $y'' - 49y = 0$;
б) $y'' - 4y' + 5y = 0$;
в) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

3.7.9 а) $y'' + 7y' = 0$;
б) $y'' - 5y' + 4y = 0$;
в) $y'' + 16y = 0$.

3.7.10 а) $y'' - 6y' + 8y = 0$;
б) $y'' + 4y' + 5y = 0$;
в) $y'' + 5y' = 0$.

3.7.11 а) $4y''-8y'+3y=0$;
б) $y''-3y'=0$;
в) $y''-2y'+10y=0$.

3.7.12 а) $y''+4y'+20y=0$;
б) $y''-3y'-10y=0$;
в) $y''-16y=0$.

3.7.13 а) $9y''+6y'+y=0$;
б) $y''-4y'-21y=0$;
в) $y''+y=0$.

3.7.14 а) $2y''+3y'+y=0$;
б) $y''+4y'+8y=0$;
в) $y''-6y'+9y=0$.

3.7.15 а) $y''-10y'+21y=0$;
б) $y''-2y'+2y=0$;
в) $y''+4y'=0$.

3.7.16 а) $y''+6y'=0$;
б) $y''+10y'+29y=0$;
в) $y''-8y'+7y=0$.

3.7.17 а) $y''+25y=0$;
б) $y''+6y'+9y=0$;
в) $y''+2y'+2y=0$.

3.7.18 а) $y''-3y'=0$;
б) $y''-7y'-8y=0$;
в) $y''+4y'+13y=0$.

3.7.19 а) $y''-3y'-4y=0$;
б) $y''+6y'+13y=0$;
в) $y''+2y'=0$.

3.7.20 а) $y''+25y'=0$;
б) $y''-10y'+16y=0$;
в) $y''-8y'+16y=0$.

3.7.21 а) $y''-3y'-18y=0$;
б) $y''-6y'=0$;
в) $y''+2y'+5y=0$.

3.7.22 а) $y''-6y'+13y=0$;
б) $y''-2y'-15y=0$;
в) $y''-8y'=0$.

3.7.23 а) $y''+2y'+y=0$;
б) $y''+6y'+25y=0$;
в) $y''-4y'=0$.

3.7.24 а) $y''+10y'=0$;
б) $y''-6y'+8y=0$;
в) $4y''+4y'+y=0$.

3.7.25 а) $y''+5y=0$;
б) $9y''-6y'+y=0$;
в) $y''+6y'+8y=0$.

3.7.26 а) $y''+6y'+10y=0$;
б) $y''-4y'+4y=0$;
в) $y''-5y'+4y=0$.

3.7.27 а) $y''-y=0$;
б) $4y''+8y'-5y=0$;
в) $y''-6y'+10y=0$.

3.7.28 а) $y''+8y'+25y=0$;
б) $y''+9y'=0$;
в) $9y''+3y'-2y=0$.

3.7.29 а) $6y''+7y'-3y=0$;
б) $y''+16y=0$;
в) $4y''-4y'+y=0$.

3.7.30 а) $9y''-6y'+y=0$;
б) $y''+12y'+37y=0$;
в) $y''-2y'=0$.

3.8 Найдите общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных.

3.8.1 $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

3.8.2 $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

3.8.3 $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

3.8.4 $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

3.8.5 $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$.

3.8.6 $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$.

3.8.7 $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$.

3.8.8 $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$.

3.8.9 $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{ctg} x$.

3.8.10 $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.

3.8.11 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$.

3.8.12 $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3.8.13 $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.

3.8.14 $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3.8.15 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

3.8.16 $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

3.8.17 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

3.8.18 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

3.8.19 $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

3.8.20 $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

3.8.21 $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

3.8.22 $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

3.8.23 $y'' + 2y' + y = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{e^x}$.

3.8.24 $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

3.8.25 $y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos\left(e^x\right)$.

3.8.26 $y'' - y' = e^{2x} \sin\left(e^x\right)$.

3.8.27 $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

3.8.28 $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

3.8.29 $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$.

3.8.30 $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$.

3.9 Найдите общее решение дифференциального уравнения методом подбора частного решения.

3.9.1 а) $y'' + y' = 2x - 1$;

б) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$.

3.9.2 а) $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$;

б) $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}$.

3.9.3 а) $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$;

б) $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$.

3.9.4 а) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$;

б) $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$.

3.9.5 а) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$;

б) $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$.

3.9.6 а) $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$;

б) $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$.

3.9.7 а) $y'' + y = 2\cos x - (4x + 4)\sin x$;

б) $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$.

3.9.8 а) $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$;

б) $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

3.9.9 а) $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$;

б) $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$.

3.9.10 а) $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^{x}$;

б) $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$.

3.9.11 а) $y'' + 5y' = 72e^{2x}$;

б) $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x}\sin 2x$.

3.9.12 а) $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$;

б) $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^{x}$.

3.9.13 а) $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$.

3.9.14 а) $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$;

б) $y'' + 3y' = 10 - 6x$.

3.9.15 а) $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$;

б) $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$.

3.9.16 а) $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$;

б) $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.

3.9.17 а) $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$;

б) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

3.9.18 а) $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$;

б) $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x}$.

3.9.19 а) $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$;

б) $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$.

3.9.20 а) $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$.

3.9.21 а) $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$;

б) $y'' + 16y = 80e^{2x}$.

3.9.22 а) $y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\cos x)e^{-2x}$;

б) $y'' + 4y' = 15e^{x}$.

3.9.23 а) $y'' + 16y = 8\cos 4x$;

б) $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$.

3.9.24 а) $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$;

б) $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$.

3.9.25 а) $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$;

б) $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$.

3.9.26 а) $y'' + 4y' = e^{x}(24\cos 2x + 2\sin 2x)$;

б) $y'' + 9y = 10e^{3x}$.

3.9.27 а) $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$;

б) $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$.

3.9.28 а) $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$;

б) $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$.

3.9.29 а) $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$;

б) $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$.

3.9.30 а) $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x$;

б) $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$.

3.10 Решите систему дифференциальных уравнений.

3.10.1 $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

3.10.2 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$

3.10.3 $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

3.10.4 $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$

3.10.5 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$

3.10.6 $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$

3.10.7 $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$

3.10.8 $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$

3.10.9 $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$

3.10.10 $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

3.10.11 $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$

3.10.12 $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$

3.10.13 $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

3.10.14 $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

3.10.15 $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$

3.10.16 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

3.10.17 $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$

3.10.18 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}.$

3.10.19 $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

3.10.20 $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

3.10.21 $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

3.10.22 $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$

3.10.23 $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

3.10.24 $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

3.10.25 $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$

3.10.26 $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$

3.10.27 $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$

3.10.28 $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$

3.10.29 $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

3.10.30 $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 2. – 448 с.

2 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд. – М. : Высш. шк., 1996. – Ч. 2. – 416 с.

3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – Ч. 3. – 208 с.

4 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

5 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

6 Руководство к решению задач по высшей математике / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 2. – 399 с.

7 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

8 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – Ч. 2. – 368 с.

9 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1991. – Ч. 2. – 352 с.

10 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачёв. – 7-е изд. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с.