ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Система упражнений по векторной алгебре для студентов дневной формы обучения всех специальностей

Могилев 2009

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» января 2009 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. физ-мат. наук, доц. Л. В. Плетнев

Методические указания содержат тестовые задания, образцы решения задач и упражнения для самостоятельной работы по векторной алгебре.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная вёрстка И. А. Алексеюс

Подписано в печать 8.04.2009 . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.4 . Уч.-изд. л. 1.3 . Тираж 99 экз. Заказ № 249.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

Введение

Система упражнений по векторной алгебре состоит из трех разделов.

Раздел 1 содержит вводный тест, предназначенный для проверки (самопроверки) готовности студентов к изучению векторной алгебры. Вводный тест содержит задания по темам: «Векторы», «Координаты векторов», «Скалярное произведение векторов» (с учетом необходимого уровня школьных знаний) (таблицы 1 и 2).

Раздел 2 состоит из образцов решения задач по векторной алгебре.

Раздел 3 содержит задачи, предназначенные для решения их студентами на практических занятиях под руководством преподавателя, а также для самостоятельного решения.

1 Вводный тест по теме «Векторы, координаты векторов»

Таблица 1 – Вариант 1

Номер вопроса	Задание	Вариант ответа
1	Даны точки $A(-2;\ p;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 2)$ и $C(a;\ 4;\ k)$. Если $\overrightarrow{AB}=0{,}5\cdot\overrightarrow{BC}$, сумма $p+a+k$ равна	1) 3; 2) -7; 3) 1; 4) 7; 5) другой ответ
2	Векторы $\vec{a}=(1;\ m;\ 2)$, $\vec{b}=(2m;\ 3;\ -1)$ и $\vec{c}=(0;\ 2;\ m)$ таковы, что вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}-\vec{c}$. Значение m равно	1) 1,5; 2) 1; 3) -2; 4) 2; 5) -1,5
3	Если векторы $\vec{a}=(3;\ m;\ -2)$ и $\vec{b}=(n+2;\ 4;\ 4)$ коллинеарны, то сумма $m+n$ равна	1) 10; 2) -10; 3)-8; 4) 9; 5) другой ответ
4	Задан вектор $\vec{a}=(2;\ 1;\ -1)$. Тогда сумма координат вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}$ и удовлетворяющего условию $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$, равна	1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) 2; 5) другой ответ
5	Из указанных пар векторов перпендикулярными являются	1) $\vec{a}=(-3;\ 7)$ и $\vec{b}=(5;\ 2)$; 2) $\vec{a}=(-3;\ 4)$ и $\vec{b}=(4;\ -3)$; 3) $\vec{a}=(5;\ 1)$ и $\vec{b}=(0;-1)$; 4) $\vec{a}=(3;\ 1)$ и $\vec{b}=(-3;-1)$; 5) таких нет
6	В треугольнике с вершинами $A(-1;\ 1;\ 2)$, $B(13;\ 4;\ 3)$ и $C(-3;\ 2;\ 7)$ длина медианы AD равна	1) 7; 2) 5; 3) 3; 4) $\sqrt{13}$; 5) $\sqrt{15}$
7	Периметр треугольника с вершинами $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(3;\ 1;\ 3)$ и $C(7;\ -3;\ 5)$ равен	1) $7\sqrt{5}$; 2) $12\sqrt{2}$; 3) 16; 4) 18; 5) другой ответ
8	В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD заданы $\overrightarrow{AB}=(-7;\ 4;\ 5)$, $\overrightarrow{AC}=(3;\ 2;\ -1)$, $\overrightarrow{AD}=(20;-4;-12)$, а M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Тогда сумма координат вектора $\overrightarrow{MN}$ равна	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5
9	Если в треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно, $\overrightarrow{AB}=(3;\ -5;\ 6)$, $\overrightarrow{MN}=(-2;\ 1;\ 7)$, то сумма координат вектора $\overrightarrow{BC}$ равна	1) -6; 2) 7; 3) -8; 4) 8; 5) 10
10	Если в параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(2;\ -5;\ 4)$, $B(1;\ -3;\ 1)$, $C(-3;\ 4;\ -6)$, то сумма координат четвертой вершины равна	1) 0; 2) -1; 3) -2; 4) -3; 5) -4
11	Даны векторы $\vec{a}=(3;\ 4;\ 2)$, $\vec{b}=(1;\ 5;\ 2)$, $\vec{c}=(2;\ 3;\ 4)$. Тогда сумма координат вектора $\vec{x}$, удовлетворяющего условиям $\vec{x}\vec{a}=8$, $\vec{x}\vec{b}=5$, $\vec{x}\vec{c}=3$, равна	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) другой ответ

Окончание таблицы 1

Номер вопроса	Задание	Вариант ответа
12	В трапеции $KLMN$ точка Q принадлежит боковой стороне MN, $\overrightarrow{QM} = 2\overrightarrow{NQ}$. Точка P является точкой пересечения диагонали KM и отрезка LQ, причем $\overrightarrow{KP}=2\overrightarrow{PM}$. Тогда сумма чисел x и y, при которых имеет место векторное равенство $\overrightarrow{PN} = x\overrightarrow{LM} + y\overrightarrow{KM}$, равна	1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) $-\frac{5}{8}$; 5) другой ответ
13	Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, а O – произвольная точка пространства. Тогда для вектора $\overrightarrow{OM}$ верно равенство	1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$; 2) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$; 3) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$; 4) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$; 5) другое соотношение
14	Даны точки $A(1;\ 0;\ 2)$ и $B(-1;\ 1;\ 1)$. Тогда координаты единичного вектора, коллинеарного вектору $\overrightarrow{AB}$ и одинаково с ним направленного, равны	1) $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$; 2) $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$; 3) $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; 4) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; 5) другой ответ
15	Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда вектор $\overrightarrow{AA_1}$ связан с векторами $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$ соотношением	1) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{DC_1}$; 3) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1}$; 4) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC_1}$; 5) другой ответ

Таблица 2 – Вариант 2

Номер вопроса	Задание	Вариант ответа
1	Даны векторы $\vec{a}=(2-m;\ 4)$, $\vec{b}=(5;\ n)$ и $\vec{c}=(m-1;\ 3)$. Если $\vec{a}=\vec{b}-2\vec{c}$, то произведение $m\cdot n$ равно	1) 5; 2) 15; 3) 50; 4) 10; 5) 7
2	Даны векторы $\vec{a}=(p;\ 2;\ -1)$ и $\vec{b}=(6;-3;\ 3)$. Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}-\vec{b}$ при значениях p, равных	1) ±7; 2) 6; 3) 7; 4) $\pm\sqrt{2}$; 5) -7
3	Векторы $\vec{a}=(k^2;\ k+2p;\ 4)$ и $\vec{b}=(k;\ k-p;\ -2)$ коллинеарны при следующих значениях k и p:	1) $k\in\{0;\ 2\}$, $p=0$; 2) $k=2$, $p=0$; 3) $k=0$, $p\in R$; 4) $k=-2$, $p\in R$; 5) $k\in\{0;-2\}$, $p=0$
4	Векторы $\vec{a}=(x;\ 2)$ и $\vec{b}=(3;\ y)$ имеют одинаковые не равные нулю суммы координат. Найти $x+y$, если известно, что векторы $5\vec{a}+2\vec{b}$ и $4\vec{a}+3\vec{b}$ коллинеарны	1) 3; 2) 5; 3) -5; 4) 9; 5) 7
5	Угол равен $\dfrac{\pi}{2}$ между следующими векторами:	1) $\vec{c}=(1;\ 8)$ и $\vec{d}=(0;\ 1)$; 2) $\vec{c}=(2{,}5;\ -2)$ и $\vec{d}=(4;\ 5)$; 3) $\vec{c}=(10;\ -3)$ и $\vec{d}=(-3;\ 10)$; 4) $\vec{c}=(-1;\ 4)$ и $\vec{d}=(1;\ 3)$; 5) таких нет
6	Вершинами треугольника ABC являются точки $A(7;\ 6;\ -2)$, $B(-3;\ 2;\ 6)$, $C(9;\ 0;\ -12)$. Тогда медиана BK	1) длиннее стороны AC; 2) короче стороны AC; 3) равна по длине стороне AC; 4) невозможно определить
7	Сумма векторов $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CO}$, где O – точка пересечения медиан треугольника ABC, равна	1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$; 3) $\vec{0}$; 4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$; 5) другой ответ
8	Векторы $\vec{a}=(5;-1;\ -2)$ и $\vec{b}=(1;-5;\ 2)$, проведенные из точки C, являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника ABC. Площадь треугольника равна	1) $12\sqrt{6}$; 2) $6\sqrt{6}$; 3) $8\sqrt{3}$; 4) 14; 5) другой ответ

Окончание таблицы 2

Номер вопроса	Задание	Вариант ответа
9	В параллелограмме $ABCD$ точка K является серединой стороны BC, а точка L – серединой стороны DC. Тогда вектор $\overrightarrow{BD}$ связан с векторами $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$ соотношением	1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}$; 2) $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK})$; 3) $\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK})$; 4) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AK}$; 5) другой ответ
10	Если в трапеции $ABCD$ векторы $\vec{a}=(7;\ 4)$ и $\vec{b}=(11;\ 1)$ являются ее диагоналями, то сумма длин оснований равна	1) 7; 2) 5; 3) 13; 4) 9; 5) 6
11	Даны векторы $\vec{a}=(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}=(2;\ 1;\ 3)$, $\vec{c}=(-2;\ 1;\ 4)$. Тогда произведение координат вектора $\vec{x}$, удовлетворяющего условиям $\vec{x}\vec{a}=-5$, $\vec{x}\vec{b}=1$, $\vec{x}\vec{c}=-9$, равно	1) 12; 2) -12; 3) 16; 4) -16; 5) другой ответ
12	В трапеции $ABCD$ точка M принадлежит боковой стороне CD, $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{MD}$. Точка K является точкой пересечения диагонали AC и отрезка BM, причем $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KC}$. Тогда сумма чисел x и y, при которых имеет место векторное равенство $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$, равна	1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{5}{8}$; 3) $-\frac{3}{8}$; 4) $-\frac{5}{8}$; 5) другой ответ
13	Центроидом треугольника ABC называется такая точка G, что $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Тогда центроид произвольного треугольника ABC совпадает с точкой	1) пересечения биссектрис треугольника; 2) пересечения медиан треугольника; 3) пересечения высот треугольника; 4) другой
14	Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Известно, что векторы $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ и $\vec{d}=(y+1)\vec{a}+(2-x)\vec{b}$ равны между собой. Тогда коэффициент x	1) в 3 раза меньше коэффициента y; 2) в 3 раза больше коэффициента y; 3) равен коэффициенту y; 4) в 2 раза больше коэффициента y; 5) другое соотношение
15	В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами ребер AB и CD, а длина ребра AB равна p. Тогда длина вектора $\overrightarrow{MN}$ равна	1) $p\sqrt{2}$; 2) $\frac{p}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{p}{1+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{p\sqrt{2}}{4}$; 5) другой ответ

2 Примеры решения задач

Задача 1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рисунок 1, а) построить векторы $2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}/2$.

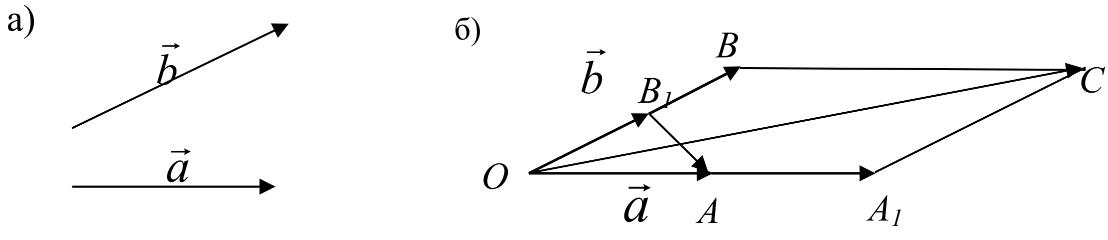

Рисунок 1

Решение

Отнесем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу О и построим параллелограмм на векторах $2\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рисунок 1, б). Сложив векторы по правилу параллелограмма, будем иметь $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+\vec{b}$. Построив вектор $\overrightarrow{OB_1}=\vec{b}/2$ (см. рисунок 1) и применив правило вычитания векторов, получим $\overrightarrow{B_1A}=\vec{a}-\vec{b}/2$.

Задача 2. В треугольнике OAB (рисунок 2) даны векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{ON}$, где M, N – середины сторон AB, OB соответственно.

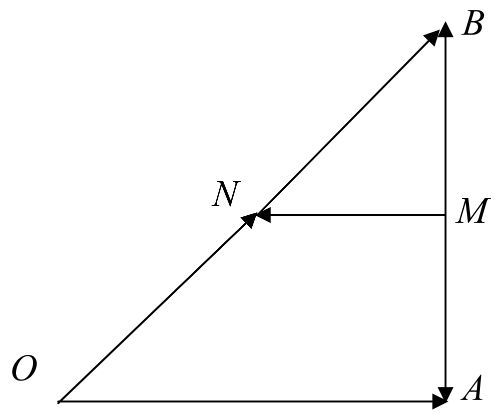

Рисунок 2

Решение

Согласно правилу вычитания векторов,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Вектор $\overrightarrow{MB}$ направлен в ту же сторону по той же прямой, что и вектор $\overrightarrow{AB}$, но длина его в два раза меньше, поэтому

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right).$$

Вектор $\overrightarrow{MA}$ имеет ту же длину, что и вектор $\overrightarrow{MB}$, но направлен в противоположную сторону. Следовательно,

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right).$$

Так как отрезок NM является средней линией треугольника OAB, то вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{OA}$, но направлен в противоположную сторону и длина его в два раза меньше. Поэтому

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a}.$$

Вектор $\overrightarrow{ON}$ направлен в ту же сторону по той же прямой, что и вектор $\overrightarrow{OB}$, но длина его в два раза меньше. Следовательно,

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Задача 3. Даны три вектора: $\vec{p}(3;\,2;\,4)$, $\vec{q}(4;\,3;\,-5)$, $\vec{r}(7;\,5;\,-2)$. Найти разложение вектора $\vec{a}(4;\,3;\,2)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Решение

Вектор $\vec{a}$ можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса, т. е.

$$\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}. \tag{1}$$

Так как векторы $\vec{a}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ заданы в некотором базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, то, применив к равенству (1) правило линейных действий над векторами, получим

$$4\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+2\overrightarrow{e_3}=$$
$$=\alpha\left(3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}+4\overrightarrow{e_3}\right)+\beta\left(4\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}-5\overrightarrow{e_3}\right)+\gamma\left(7\overrightarrow{e_1}+5\overrightarrow{e_2}-2\overrightarrow{e_3}\right)=$$
$$=(3\alpha+4\beta+7\gamma)\overrightarrow{e_1}+(2\alpha+3\beta+5\gamma)\overrightarrow{e_2}+(4\alpha-5\beta-2\gamma)\overrightarrow{e_3}.$$

Таким образом, для определения коэффициентов линейного разложения вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha+4\beta+7\gamma=4; \\ 2\alpha+3\beta+5\gamma=3; \\ 4\alpha-5\beta-2\gamma=2. \end{cases}$$

Решив эту систему по правилу Крамера, найдем: $\alpha=7,\ \beta=8,\ \gamma=-7$. Следовательно, разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид:

$$\vec{a}=7\vec{p}+8\vec{q}-7\vec{r}.$$

Задача 4. Найти угол α между векторами $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

Решение

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{2\cdot4+(-2)(-1)+1(-1)}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{16+1+1}}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда } \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Задача 5. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}+4\vec{q}$, если известно, что $\left|\vec{p}\right|=2$, $\left|\vec{q}\right|=3$ и угол между ними $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение

Применив правило линейных действий над векторами, найдем векторы — диагонали параллелограмма:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\left(2\vec{p}-3\vec{q}\right)+\left(3\vec{p}+4\vec{q}\right)=5\vec{p}+\vec{q};$$

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\left(2\vec{p}-3\vec{q}\right)-\left(3\vec{p}+4\vec{q}\right)=-\vec{p}-7\vec{q}.$$

Теперь вычислим скалярные квадраты векторов:

$$\vec{c}^{\,2}=\left(5\vec{p}+\vec{q}\right)^2=25\vec{p}^{\,2}+10\left(\vec{p},\vec{q}\right)+\vec{q}^{\,2}=$$

$$=25\cdot 4+10\cdot 2\cdot 3\cos\frac{\pi}{3}+9=139;$$

$$\vec{d}^{\,2}=\left(-\vec{p}-7\vec{q}\right)^2=\vec{p}^{\,2}+14\left(\vec{p},\vec{q}\right)+49\vec{q}^{\,2}=$$

$$=4+14\cdot 2\cdot 3\cos\frac{\pi}{3}+49\cdot 9=487.$$

Следовательно, длина диагоналей будет равна:

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{\vec{c}^{\,2}}=\sqrt{139}\approx 12{,}6;\ \left|\vec{d}\right|=\sqrt{\vec{d}^{\,2}}=\sqrt{487}\approx 22{,}1.$$

Задача 6. Даны вершины треугольника $A(5;-3)$, $B(7;4)$, $C(2;1)$. Вычислить длину его высоты, проведенной из вершины B на сторону AC.

Решение

Из элементарной геометрии известно, что площадь треугольника определяется по формуле

$$S_\Delta=\frac{1}{2}AC\cdot BD,$$

где BD – высота треугольника.

Отсюда $BD=\dfrac{2S_\Delta}{AC}$.

Для определения удвоенной площади треугольника, т. е. площади параллелограмма, воспользуемся формулой

$$2S_\Delta=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\left|2\cdot 4-7(-3)\right|=29.$$

Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ определим по формуле

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5.$$

Следовательно, $BD=\dfrac{29}{5}$.

Задача 7. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку и взаимно-перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 2,\ |\vec{c}| = 3$, вычислить $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$.

Решение

Найдем модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\frac{\pi}{2} = 4\cdot 2 = 8.$$

Векторы $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и $\vec{c}$ коллинеарны, следовательно, можно записать, что $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \lambda\vec{c}$, где $\lambda > 0$, так как векторы образуют правую тройку. Учитывая соотношение модулей этих векторов, получаем

$$\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right| = \frac{8}{3}|\vec{c}|,$$

т. е. $\lambda = \dfrac{8}{3}$. Тогда

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \frac{8}{3}\left(\vec{c},\vec{c}\right) = \frac{8}{3}\vec{c}^{\,2} = \frac{8}{3}\cdot 9 = 24.$$

Задача 8. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(1;-1;3)$, $B(6;1;-6)$, $C(1;4;-3)$, $D(5;-6;3)$.

Решение

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}$. Объем тетраэдра $ABCD$, как известно, равен одной трети произведения площади основания на высоту. У параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}$, та же высота OB, а площадь основания в два раза больше (рисунок 3).

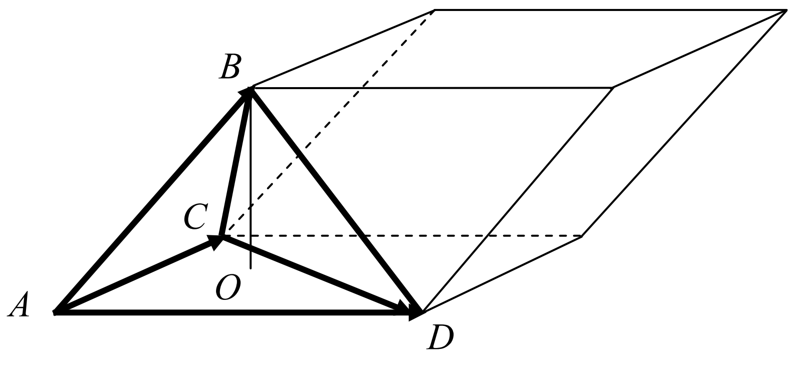

Рисунок 3

Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал.}} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) \right|.$$

По координатам данных точек *A, B, C, D* находим координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}(5;\, 2;\, -9);\ \ \overrightarrow{AC}(0;\, 5;\, -6);\ \ \overrightarrow{AD}(4;\, -5;\, 0),$$

поэтому

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 0 & 5 & -6 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -150 + 132 = -18.$$

Итак, $V_{тетр.} = 3$ куб. ед.

3 Задачи и упражнения для решения

3.1 Линейные операции над векторами. Базис и координаты вектора

1 Даны векторы $\vec{a} = (2;\, 4)$, $\vec{b} = (-3;\, 1)$, $\vec{c} = (5;\, -2)$. Найти векторы: а) $2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$; б) $\vec{a} + 24\vec{b} + 14\vec{c}$.

2 Даны векторы $\vec{a} = (5;\, 7;\, 2)$, $\vec{b} = (3;\, 0;\, 4)$, $\vec{c} = (-6;\, 1;\, -1)$. Найти векторы: а) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; б) $5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$.

3 Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверить на чертеже справедливость тождеств:

а) $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$; б) $\dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{2} + \vec{b} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$;

в) $\left(\vec{a} + \dfrac{\vec{b}}{2} \right) - \left(\vec{b} + \dfrac{\vec{a}}{2} \right) = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} \right)$; г) $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$.

4 Какому условию удовлетворяют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если вектор $\vec{a} + \vec{b}$ направлен по биссектрисе угла между ними? Предполагается, что все три вектора отнесены к одному началу.

5 В треугольнике *ABC* проведены медианы *AD*, *BE* и *CF*. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$.

6 В треугольнике *ABC* проведена медиана *AD*. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$

через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

7 Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}=\vec{k}$ и $\overrightarrow{AL}=\vec{l}$.

8 Векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.

9 Векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ и $\overrightarrow{AF}=\vec{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

10 В равнобедренной трапеции $OACB$ угол BOA равен 60°, $OB = BC = CA = 2$, точки M и N – середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через единичные векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

11 Даны векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ – медиана треугольника OAB. Разложить аналитически и геометрически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а вектор $\vec{a}$ – по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

12 На сторонах OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Точка M – середина стороны BC, N – середина стороны AC. Выразить через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{MN}$, если $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=4$.

13 На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{r}$ построен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразить через $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ векторы, совпадающие со всеми остальными ребрами; диагоналями параллелепипеда; диагоналями граней этого параллелепипеда.

14 В треугольной пирамиде $SABC$ даны векторы $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SM}$, где M – центр тяжести основания ABC.

15 На плоскости даны два вектора $\vec{p}$= (2; -3) и $\vec{q}$= (1; 2). Найти разложение вектора $\vec{a}$ = (9; 4) по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

16 Разложить вектор $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{p}=2\vec{b}+\vec{c}$.

17 Даны векторы $\vec{a}=(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}=(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d}=(d_1; d_2; d_3)$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

а) $\vec{a}$ = (5; -1; 10), $\vec{b}$ = (3; 6; 4), $\vec{c}$ = (6; 0; 11), $\vec{d}$= (2; -7; 6);

б) $\vec{a}$ = (3; 1; 2), $\vec{b}$ = (2; 1; 2), $\vec{c}$ = (-1; 2; 5), $\vec{d}$= (5; 0; -1);

в) $\vec{a}$ = (3; -2; 1), $\vec{b}$ = (-1; 1; -2), $\vec{c}$ = (2; 1; -3), $\vec{d}$= (11; -6; 5).

18 Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\vec{c}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a}$ = (5; 2; 1), $\vec{b}$ = (-1; 4; 2), $\vec{c}$ = (-1; -1; 6);

б) $\vec{a}$ = (6; 4; 2), $\vec{b}$ = (-9; 6; 3), $\vec{c}$ = (-3; 6; 3);

в) $\vec{a}$ = (6; -18; 12), $\vec{b}$ = (-8; 24; -16), $\vec{c}$ = (8; 7; 3).

3.2 Скалярное произведение векторов

1 Даны вершины четырехугольника *ABCD*: *A*(1; -2; 2), *B*(1; 4; 0), *C*(-4; 1; 1), *D*(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали взаимно-перпендикулярны.

2 Даны три последовательные вершины параллелограмма: *A*(-3; -2; 0), *B*(3; -3; 1), *C*(5; 0; 2). Найти его четвертую вершину *D* и угол φ между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

3 Даны векторы $\vec{a}$ = (5; -6; 1), $\vec{b}$ = (-4; 3; 0), $\vec{c}$ = (5; -8; 10). Вычислить выражения:

а) $3\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 2\vec{c}^2$; б) $2\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$; в) $3\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}\vec{c} - 5\vec{a}\vec{c}$.

4 Даны векторы $\vec{a}$ = (3; 1; 2), $\vec{b}$ = (2; 7; 4), $\vec{c}$ = (1; 2; 1). Вычислить выражения:

а) $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$; б) $\vec{a}^2(\vec{b}\vec{c})$; в) $\vec{a}^2\vec{b} + \vec{b}^2\vec{c} + \vec{c}^2\vec{a}$.

5 В треугольнике АВС $|\overrightarrow{BC}|$ = 5, $|\overrightarrow{CA}|$ = 6, $|\overrightarrow{BA}|$ = 7. Найти ($\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$).

6 Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°, $|\vec{a}|$ = 5, $|\vec{b}|$= 8. Найти $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.

7 Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти проекции $np_{\vec{b}}\vec{a}$, $np_{\vec{a}}\vec{b}$ и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

8 Даны векторы $\vec{a}$ = (3; -6; -1), $\vec{b}$ = (1; 4; -5), $\vec{c}$ = (3; -4; 12). Найти $np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

9 Найти численную величину проекции вектора $\vec{a}$= (8; 4; 1) на ось, параллельную вектору $\vec{b}$= (2; -2; 1).

10 Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно-перпендикулярны?

11 Даны два вектора $\vec{a}$= (5; 2) и $\vec{b}$= (7; -3). Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий одновременно двум уравнениям: $\vec{a}\,\vec{x}$= 38, $\vec{b}\,\vec{x}$= 30.

12 Даны два вектора $\vec{a} = (3; -1; 5)$ и $\vec{b} = (1; 2; -3)$. Найти координаты вектора $\vec{x}$, перпендикулярного к оси Oz и удовлетворяющего следующим условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.

13 Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ = $2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b}$ = $\vec{m} - 2\vec{n}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$ – единичные векторы,

образующие угол, равный 60°.

14 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно-перпендикулярны. Вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|$ = 3, $|\vec{b}|$ = 5, $|\vec{c}|$ = 8, вычислить $(3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{b}+3\vec{c})$, $|\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}|^2$.

15 Радиус-вектор точки M составляет с осью OY угол 60°, а с осью OZ – угол 45°; $|\overline{OM}|$ = 8. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

16 Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC: $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$. Показать, что треугольник ABC – равносторонний.

17 Даны вершины треугольника ABC: $A=(1;\,2;\,1)$, $B=(3;\,-1;\,7)$, $C=(7;\,4;\,-2)$. Вычислив внутренние углы треугольника ABC, убедиться, что этот треугольник – равнобедренный.

18 Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$= (1; -2; -2), образующий с осью OY острый угол и имеющий длину $|\vec{x}|$ = 15.

19 Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$= (4; -2; -3) и $\vec{b}$= (0; 1; 3), образует с осью OY тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|$ = 26, найти координаты вектора $\vec{x}$.

20* Доказать, что векторы $\vec{p}=\vec{a}(\vec{b}\,\vec{c})-\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c})$ и $\vec{c}$ перпендикулярны друг к другу.

3.3 Векторное произведение векторов

1 Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ =5, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{4}$.

2 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|$ = 3, $|\vec{b}|$ =5, вычислить $|[\vec{a},\vec{b}]|$, $|[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}]|$, $|[3\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-3\vec{b}]|$.

3 Даны точки $A(2;\,-1;\,2)$, $B(1;\,2;\,-1)$, $C(3;\,2;\,1)$. Найти $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}]$, $[\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}]$.

4 Вычислить синус угла φ, образованного векторами $\vec{a}=(2;\,-2;\,1)$ и $\vec{b}=(2;\,3;\,6)$.

5 Найти вектор $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$, построить его и вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}=3\vec{i}$, $\vec{b}=2\vec{k}$; б) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; в) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k}$.

6 Вычислить площадь треугольника с вершинами A,B,C:

а) $A(7;\,3;\,4)$, $B(1;\,0;\,6)$, $C(4;\,1;\,6)$; б) $A(-1;\,0;\,2)$, $B(1;\,-2;\,5)$, $C(3;\,0;\,-4)$.

7 Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$. Найти $[2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{b}]$.

8 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, где $\vec{p},\vec{q}$ – единичные векторы, образующие угол, равный 30°.

9 Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{m}-\vec{n}$, $4\vec{m}-5\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, образующие угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

10 Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=-\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

11 Даны векторы $\vec{a}=\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{j}-\vec{k}$. Найти координаты следующих векторов:

а) $\vec{a}\times\vec{b}$; б) $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})$; в) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

12 При каком α векторы $\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны?

13 Вектор $\vec{b}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a}=(8;-15;3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{b}|=51$, найти его координаты.

14* Зная два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, найти:

а) $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]$; б) $\left[\vec{a},\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$; в) $\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right)\right]$.

15* Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Доказать, что $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a}]$.

16* Проверить справедливость равенства

$$[[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}]+[[\vec{b},\vec{c}]\vec{a}]+[[\vec{c},\vec{a}]\vec{b}]=\vec{0}.$$

17* Доказать компланарность векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, зная, что

$$[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]=\vec{0}.$$

3.4 Смешанное произведение векторов

1 Показать, что точки A,B,C,D лежат в одной плоскости:

а) $A(2;-1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$;

б) $A(1;1;0)$, $B(-3;-1;2)$, $C(-3;1;8)$, $D(0;2;5)$.

2 Проверить, компланарны ли данные векторы, если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – взаимно-перпендикулярные орты:

а) $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{r}=7\vec{a}+14\vec{b}-13\vec{c}$;

б) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{r}=3\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$;

в) $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$, $\vec{r}=3\vec{a}-4\vec{b}+7\vec{c}$.

3 Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны и разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 30°, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зная, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

5 Даны вершины тетраэдра A, B, C, D. Вычислить косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, площадь треугольника ABC, объем тетраэдра, если:

а) $A(2; 4; 3)$, $B(7; 6; 3)$, $C(4; 9; 3)$, $D(3; 6; 7)$;

б) $A(3; 5; 4)$, $B(5; 8; 3)$, $C(1; 9; 9)$, $D(6; 4; 8)$.

Выполнить чертеж.

6 Построить параллелепипед на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и вычислить его объем. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

7 Даны вершины тетраэдра $O(-5; -4; 8)$, $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$. Найти высоту, опущенную из точки O на грань ABC.

8 Дан тетраэдр с вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$. Найти площадь грани ABC, объем тетраэдра и его высоту, опущенную из точки O на грань ABC.

9 Вычислить объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a} = (2; 8; 6)$, $\vec{b} = (4; 11; 7)$ и $\vec{c} = (8; 21; 8)$.

10 Доказать, что при любых λ и μ справедливо тождество $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\left(\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Ответы

3.1 Линейные операции над векторами. Базис и координаты вектора.

1. а) $(-30; 21)$, б) $(0; 0)$. ***2.*** а) $(-3; 22; -3)$, б) $(19; 39; 30)$. ***4.*** Указание. Параллелограмм, построенный на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, должен быть ромбом; $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. ***5.*** 0. ***6.*** $\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$. ***7.*** $\overrightarrow{BC} = \dfrac{4\vec{l} - 2\vec{k}}{3}$, $\overrightarrow{CD} = \dfrac{2\vec{l} - 4\vec{k}}{3}$. ***8.*** $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = \dfrac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA} = -\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$. ***9.*** $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q}$, $\overrightarrow{CD} = -\vec{q}$, $\overrightarrow{DE} = -\vec{p}$, $\overrightarrow{EF} = -\vec{p} - \vec{q}$. ***10.*** $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{n} - \vec{m})$, $\overrightarrow{OM} = 2\vec{n} + \vec{m}$, $\overrightarrow{ON} = 3\vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{MN} = 2\vec{m} - \vec{n}$. ***11.*** $\vec{c} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$, $\vec{a} = 2\vec{c} - \vec{b}$. ***12.*** $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{j}$, $\overrightarrow{BO} = -4\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OM} = \dfrac{3}{2}\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{ON} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{MN} = \dfrac{3}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$. ***13.*** $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{p}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{q}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \vec{p} + \vec{q}$, $\overrightarrow{A_1D} = \vec{q} - \vec{r}$, $\overrightarrow{A_1C} = \vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$. ***14.*** $\dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. ***15.*** $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. ***16.*** $\vec{s} = \vec{n} + \vec{p}$. ***17.*** а) $(1;-1;0)$, б) $(0;2;-1)$, в) $(2;-3;1)$. ***18.*** а) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы, б) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы, $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$, в) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы, но вектор $\vec{c}$ не может быть представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны между собой, а вектор $\vec{c}$ им не коллинеарен.

3.2 Скалярное произведение векторов

2. $D(-1; 1; 1)$, $\varphi = 120°$. ***3.*** а) 716, б) -721, в) -353. ***4.*** а) $(21; 42; 21)$, б) 280, в) $(115; 242; 137)$. ***5.*** 19. ***6.*** $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. ***7.*** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$; $\cos\varphi = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. ***8.*** -4. ***9.*** 3. ***10.*** $60°$. ***11.*** $(6; 4)$. ***12.*** $(2;-3; 0)$. ***13.*** $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$. ***14.*** $(-72; 373)$. ***15.*** $M\left(-4; 4; 4\sqrt{2}\right)$. ***18.*** $(-5; 10; 10)$. ***19.*** $(-6; -24; 8)$.

3.3 Векторное произведение векторов

1. $50\sqrt{2}$. ***2.*** $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$, $15\sqrt{3}$, $75\sqrt{3}$. ***3.*** $(6;-4;-6)$, $(-12; 8; 12)$. ***4.*** $\sin\varphi = \dfrac{5\sqrt{17}}{21}$. ***5.*** а) $(0;-6; 0)$, $S = 6$; б) $(0; 0;-2)$, $S = 2$; в) $(6;-4; 6)$, $S = 2\sqrt{22}$. ***6.*** а) $\dfrac{7}{2}$; б) 14.

7. $(25;\,5;\,-35)$. ***8.*** $\frac{3}{2}$. ***9.*** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. ***10.*** $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{5}$, $S=\sqrt{6}$. ***11.*** а) $(2;\,6;\,3)$, б) $(-10;-30;-15)$, в) $(-15;\,2;\,1)$. ***12.*** $\alpha=-15$. ***13.*** $(45;\,24;\,0)$. ***14.*** а) $-2\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, б) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, в) $\frac{3}{4}\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

3.4 Смешанное произведение векторов

2. а) некомпланарны, б) некомпланарны, в) компланарны. ***3.*** $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$. ***4.*** 27. ***5.*** а) $\cos\varphi=\frac{20}{29}$; $S=10{,}5$; $V=14$; б) $\cos\varphi=\frac{1}{70}$; $S=\frac{\sqrt{621}}{2}$; $V=\frac{121}{6}$. ***6.*** $V=51$, левая. ***7.*** 11. ***8.*** $S=6\sqrt{3}$; $V=14$; $H=\frac{7\sqrt{3}}{3}$. ***9.*** $V=25$.

Вопросы для контроля и самоконтроля

1 Что называется вектором?
2 Дайте определение произведения вектора на число.
3 Укажите свойства операции умножения вектора на число.
4 Дайте определение суммы двух векторов.
5 Укажите свойства операции сложения векторов.
6 Что называется базисом на плоскости?
7 Что называется базисом в пространстве?
8 Что называется скалярным произведением векторов?
9 Приведите основные формулы вычисления скалярного произведения.
10 Укажите свойства скалярного произведения векторов.
11 Что называется векторным произведением?
12 Укажите свойства векторного произведения векторов.
13 Приведите основные формулы вычисления векторного произведения.
14 Что называется смешанным произведением векторов?
15 Приведите формулу вычисления смешанного произведения.
16 Укажите свойства смешанного произведения векторов.

Список литературы

1 **Гурский, Е. И.** Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1982. – 272 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление одной переменной / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

3 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Минск : Выш. шк., 1973. – 575 с.

4 Руководство к решению задач по высшей математике / Под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1. – 350 с.

5 **Сухая, Т. А.** Задачи по высшей математике / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 1. – 416 с.