

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Методические указания к самостоятельной работе
студентов экономических специальностей
дневной формы обучения
(1 семестр)*



Могилев 2014

УДК 571
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «1» октября 2013 г.,
протокол № 2

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. Л. А. Данилович;
канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв;
ст. преподаватель А. Н. Бондарев

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

Изложены методические рекомендации и представлены контрольные задания по разделам: «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Функции нескольких переменных».

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 19.02.2014. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 56 экз. Заказ № 116.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, г. Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет», 2014

Указания к выполнению заданий

1 Задания должны быть выполнены в отдельной тетради, на обложке которой следует разборчиво написать номер варианта, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы.

2 Решение задач необходимо проводить в указанной последовательности. При этом условие каждой задачи нужно полностью переписать перед её решением. В тетради обязательно оставить поля.

3 Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы.

4 После получения проверенной работы, как зачтенной, так и незачтенной, следует исправить отмеченные ошибки и недочеты. Незачтенные задания необходимо выполнить заново. Вносить исправления в сам текст работы после проверки запрещается.

5 На повторную проверку обязательно следует предоставить и ранее проверенную работу.

6 Прежде чем приступить к выполнению задания, нужно изучить теоретические вопросы, которые даны к каждой из изучаемых тем.

1 Линейная алгебра

1.1 Дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решить СЛАУ по формулам Крамера, матричным способом, методом Гаусса, с помощью модифицированных жордановых исключений.

$$1.1.1 \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2; \\ -x_1 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

$$1.1.2 \quad \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 20; \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 24; \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 36. \end{cases}$$

$$1.1.3 \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 8; \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 16; \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.1.4 \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -6; \\ -2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$1.1.5 \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -20; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 15. \end{cases}$$

$$1.1.6 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -8; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.1.7 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -7; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -17; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

$$1.1.8 \quad \begin{cases} 5x_2 + 2x_3 = -7; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -5; \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.1.9 \quad \begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 = -9; \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -5; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$$

$$1.1.10 \quad \begin{cases} 9x_1 - x_2 + x_3 = 15; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 20. \end{cases}$$

$$1.1.11 \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 15; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.1.12 \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 15; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

$$1.1.13 \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6; \\ 4x_2 + 3x_3 = -11; \\ -x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$1.1.14 \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14; \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

$$1.1.15 \quad \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1; \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$$

$$1.1.16 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3; \\ -2x_2 + 3x_3 = -6; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.1.17 \quad \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 = -3; \\ x_1 - x_2 = -1; \\ 2x_1 + 3x_3 = -12. \end{cases}$$

$$1.1.18 \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1; \\ -x_1 + 2x_3 = 3; \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$1.1.19 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ -x_2 + 2x_3 = -8; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.1.20 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 = 3; \\ x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

$$1.1.21 \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 14; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.1.22 \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -4; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -6. \end{cases}$$

$$1.1.23 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11; \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = -5; \\ x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.1.24 \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ -x_1 - 2x_3 = -8. \end{cases}$$

$$1.1.25 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -10; \\ 3x_1 - 2x_3 = 18; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$1.1.26 \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 18; \\ 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$$

$$1.1.27 \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 21; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.1.28 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$

$$1.1.29 \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 13; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 17; \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$1.1.30 \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -1; \\ -x_1 + 3x_3 = -1; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

1.2 Найти ненулевое частное решение однородной СЛАУ. Выполнить проверку.

$$1.2.1 \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.2 \quad \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.3 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.4 \quad \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0; \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.5 \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0; \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.6 \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.7 \quad \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0; \\ 21x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.8 \quad \begin{cases} x_1 + 29x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.9 \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.10 \quad \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0; \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.11 \quad \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.12 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.13 \quad \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0; \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.14 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.15 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.16 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.17 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.18 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.19 \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.20 \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 58x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.21 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.22 \quad \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.23 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.24 \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.25 \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.26 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.27 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.28 \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.29 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$1.2.30 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

2 Аналитическая геометрия

2.1 Даны вершины треугольника ABC . Найти:

- 1) уравнение стороны AB ;
- 2) уравнение высоты CH и ее длину;
- 3) уравнение медианы AM и ее длину;
- 4) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;
- 5) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
- 6) внутренний угол при вершине A .

2.1.1 $A(3; 1), \quad B(0; -2), \quad C(-1; 2).$

2.1.2 $A(0; 1), \quad B(5; -3), \quad C(-1; -1).$

2.1.3 $A(-4; -1), \quad B(3; -11), \quad C(0; 1).$

2.1.4 $A(3; 2), \quad B(2; -1), \quad C(-2; 1).$

2.1.5 $A(-3; -1), \quad B(3; 2), \quad C(4; -3).$

2.1.6 $A(0; -4), \quad B(-2; 1), \quad C(1; 4).$

2.1.7 $A(0; 2), \quad B(4; 0), \quad C(-2; -2).$

2.1.8 $A(-1; 5), \quad B(-4; 3), \quad C(1; 1).$

2.1.9 $A(2; 3), \quad B(2; -2), \quad C(-3; 0).$

2.1.10 $A(-2; 4), \quad B(0; 0), \quad C(3; 6).$

2.1.11 $A(-1; 2), \quad B(3; 1), \quad C(0; -2).$

2.1.12 $A(-1; -1), \quad B(0; 1), \quad C(5; -3).$

2.1.13 $A(0; 1), \quad B(-4; -1), \quad C(3; -11).$

2.1.14 $A(-2; 1), \quad B(3; 2), \quad C(2; -1).$

2.1.15 $A(4; -3), \quad B(-3; -1), \quad C(3; 2).$

2.1.16 $A(1; 4), \quad B(0; -4), \quad C(-2; 1).$

2.1.17 $A(-2; -2), \quad B(0; 2), \quad C(4; 0).$

2.1.18 $A(1; 1), \quad B(-1; 5), \quad C(-4; 3).$

2.1.19 $A(-3; 0), \quad B(2; 3), \quad C(2; -2).$

2.1.20 $A(3; 6), \quad B(-2; 4), \quad C(0; 0).$

2.1.21 $A(0; -2), \quad B(-1; 2), \quad C(3; 1).$

2.1.22 $A(5; -3), \quad B(-1; -1), \quad C(0; 1).$

2.1.23 $A(3; -11), \quad B(0; 1), \quad C(-4; -1).$

2.1.24 $A(2; -1), \quad B(-2; 1), \quad C(3; 2).$

- 2.1.25 $A(3; 2), \quad B(4; -3), \quad C(-3; -1).$
 2.1.26 $A(-2; 1), \quad B(1; 4), \quad C(0; -4).$
 2.1.27 $A(4; 0), \quad B(-2; -2), \quad C(0; 2).$
 2.1.28 $A(-4; 3), \quad B(1; 1), \quad C(-1; 5).$
 2.1.29 $A(2; -2), \quad B(-3; 0), \quad C(2; 3).$
 2.1.30 $A(0; 0), \quad B(3; 6), \quad C(-2; 4).$

3 Введение в анализ

3.1 Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья.

- 3.1.1 а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20};$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x};$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2}{2x^3 - x};$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}.$
- 3.1.2 а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x};$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3};$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 + 5};$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}.$
- 3.1.3 а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27};$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x};$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 7}{x^4 + 2x^3};$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$
- 3.1.4 а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2};$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x};$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{2x^3 + 5};$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}.$
- 3.1.5 а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6};$ в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x};$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 28x}{5x^3 - 1};$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}.$

- 3.1.6 a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3}{2x^2 + 5x}$;
- 3.1.7 a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2}{x^4 - 2}$;
- 3.1.8 a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x}{5x^2 + 4}$;
- 3.1.9 a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 1}{3x^2 + x}$;
- 3.1.10 a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2}{7x^3 + 1}$;
- 3.1.11 a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 7}{2x^2 - x}$;
- 3.1.12 a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x}{x^4 - x^3}$;
- 3.1.13 a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 9}{2x^2 - x}$;
- В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$;
 В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
 В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$;
 В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$;
 В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$;
 В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$;
 В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$;
 В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}$;
 Г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}$;

$$3.1.14 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 5x}{3x^2 + 1};$$

$$3.1.15 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2}{3x^3 - x};$$

$$3.1.16 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{7x^3 + 1};$$

$$3.1.17 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2}{x^4 + 4x};$$

$$3.1.18 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 5}{4x^2 - 3x};$$

$$3.1.19 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2}{2x^4 + 1};$$

$$3.1.20 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x}{6x^2 + 1};$$

$$3.1.21 \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 + 2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right).$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}.$$

- 3.1.22 a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{3x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^4}{x+2x^4}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$.
- 3.1.23 a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 2}{6x^3 - 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$.
- 3.1.24 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 7x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$.
- 3.1.25 a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5x^4}{2 + 3x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$.
- 3.1.26 a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 7}{3x^4 + 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$.
- 3.1.27 a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^5}{x^5 + 6x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2}$.
- 3.1.28 a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2}{2 - x^3}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$.
- 3.1.29 a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2}{2x^3 - x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$.

$$3.1.30 \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 2x}{1 - 2x} \right)^{x+1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 1}{3x^2 + x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

4 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

4.1 Найти:

- а) производную и дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 ;
- б) производную функции $y = f(x)^{g(x)}$ с помощью логарифмического дифференцирования;
- в) производную функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x; y) = 0$;
- г) предел функции, пользуясь правилом Лопиталья.

$$4.1.1 \quad \text{а) } y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}, \quad x_0 = \pi; \quad \text{в) } e^y - e^{-x} + xy = 0;$$

$$\text{б) } y = (x + 2)^x; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}.$$

$$4.1.2 \quad \text{а) } y = \frac{1}{(1 - x^2)^3}, \quad x_0 = 2; \quad \text{в) } \ln(x + y) + x^2 - e^y = 0;$$

$$\text{б) } y = x^{\sin(x+1)}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}.$$

$$4.1.3 \quad \text{а) } y = e^{6x - x^2}, \quad x_0 = 1; \quad \text{в) } x \sin y - \cos(x + y) = 0;$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{1/x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$4.1.4 \quad \text{а) } y = 7^{\operatorname{ctg} \frac{x}{4}}, \quad x_0 = \pi; \quad \text{в) } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} - 1 = 0;$$

$$\text{б) } y = x^{x^3}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}.$$

$$4.1.5 \quad \text{а) } y = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x_0 = 2; \quad \text{в) } e^{xy} - x^2 + y^3 = 0;$$

$$\text{б) } y = (\sin 3x)^{2x^2 + 4}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}.$$

- 4.1.15 a) $y = \operatorname{tg}^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $xy^2 - y^3 - 4x + 5 = 0$;
 б) $y = (x + 6)^{e^x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.
- 4.1.16 a) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $x_0 = 0$; б) $\operatorname{ctg}^2(x + y) = 5x$;
 б) $y = x^{e^x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.
- 4.1.17 a) $y = \frac{1}{1 + 2x}$, $x_0 = 0$; б) $\sin y - xy^2 - 5 = 0$;
 б) $y = 12x^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$.
- 4.1.18 a) $y = \ln^2 \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $\sin^2(3x + y^2) = 5$;
 б) $y = (4 + x)^x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$.
- 4.1.19 a) $y = \ln(\cos x)$, $x_0 = 0$; б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}$;
 б) $y = x^{\sin x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$.
- 4.1.20 a) $y = (\sqrt{x} - 1)^2$, $x_0 = 100$; б) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$;
 б) $y = (\operatorname{tg} x)^x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.
- 4.1.21 a) $y = \sqrt{x + x^3}$, $x_0 = 1$; б) $x^2 y - 6x = \operatorname{tg} y$;
 б) $y = (\cos x)^{\sin x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 5x}{x^2 - x}$.
- 4.1.22 a) $y = (1 - 5x)^4$, $x_0 = 0$; б) $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$;
 б) $y = (x^2 + 4)^x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \operatorname{arcsin} x}$.
- 4.1.23 a) $y = \ln(e^{2x} + 1)$, $x_0 = 1$; б) $x^2 + y^2 = \sin y$;
 б) $y = x^{\sqrt{x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$.

- 4.1.24 а) $y = (2 - 5x)^3$, $x_0 = 0$; в) $y = x + \operatorname{tg} y$;
 б) $y = (e^x + \sqrt{x})^x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$.
- 4.1.25 а) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $x_0 = 9$; в) $y^2 = 25x - 4$;
 б) $y = (\operatorname{tg} x)^{4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$.
- 4.1.26 а) $y = \ln(1 + \cos x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; в) $e^y + xy = e$;
 б) $y = (1 + \sqrt{x})^x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$.
- 4.1.27 а) $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; в) $x^y = y^x$;
 б) $y = x^{-x^3}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$.
- 4.1.28 а) $y = \frac{1}{1 - e^{2x}}$, $x_0 = 1$; в) $x^4 + x^2 y^2 + y = 4$;
 б) $y = (\operatorname{tg} x + \sqrt{x})^x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.
- 4.1.29 а) $y = \sin^3 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; в) $x^3 + 2y^3 = 5x$;
 б) $y = (2 + e^x)^{\operatorname{ctg} x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$.
- 4.1.30 а) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; в) $y = e^y + 4x$;
 б) $y = (8 + \sqrt{x})^x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$.

4.2 Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

$$4.2.1 \quad y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

$$4.2.3 \quad y = \frac{12x}{x^2 + 9}.$$

$$4.2.2 \quad y = \frac{2}{x^2 + 2x}.$$

$$4.2.4 \quad y = \frac{4 - x^3}{x^2}.$$

4.2.5 $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}.$

4.2.6 $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$

4.2.7 $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}.$

4.2.8 $y = \frac{-8x}{(x^2 + 4)}.$

4.2.9 $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$

4.2.10 $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}.$

4.2.11 $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}.$

4.2.12 $y = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}.$

4.2.13 $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2.$

4.2.14 $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4}.$

4.2.15 $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}.$

4.2.16 $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}.$

4.2.17 $y = \frac{4x^2}{3 + x^2}.$

4.2.18 $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}.$

4.2.19 $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x-4}.$

4.2.20 $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$

4.2.21 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2.$

4.2.22 $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}.$

4.2.23 $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2.$

4.2.24 $y = \frac{4x}{(x+1)^2}.$

4.2.25 $y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}.$

4.2.26 $y = \frac{4}{3 + 2x - x^2}.$

4.2.27 $y = \frac{1}{x^4 - 1}.$

4.2.28 $y = \frac{x^3 - 32}{x^2}.$

4.2.29 $y = \frac{3x - 2}{x^3}.$

4.2.30 $y = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}.$

5 Интегральное исчисление функции одной переменной

5.1 а) найти неопределенный интеграл и проверить полученный результат дифференцированием;

б) найти неопределенный интеграл;

в) вычислить определенный интеграл.

$$5.1.1 \quad \text{а) } \int e^{\sin x} \cos x \, dx; \quad \text{б) } \int \operatorname{arctg} x \, dx; \quad \text{в) } \int_1^2 \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}.$$

$$5.1.2 \quad \text{а) } \int \frac{x}{(x^2 + 4)^6} \, dx; \quad \text{б) } \int x \sin(3x) \, dx; \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{3x^2 + 2x - 1}.$$

$$5.1.3 \quad \text{а) } \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} \, dx; \quad \text{б) } \int x 3^x \, dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 4x + 9}.$$

$$5.1.4 \quad \text{а) } \int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 1)}; \quad \text{б) } \int \frac{x}{e^x} \, dx; \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 4}}.$$

$$5.1.5 \quad \text{а) } \int \frac{\cos(3x)}{4 + \sin(3x)} \, dx; \quad \text{б) } \int x e^{3x} \, dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 2x + 3}.$$

$$5.1.6 \quad \text{а) } \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} \, dx; \quad \text{б) } \int x^5 \ln x \, dx; \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

$$5.1.7 \quad \text{а) } \int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx; \quad \text{б) } \int x \ln(x + 1) \, dx; \quad \text{в) } \int_3^4 \frac{dx}{8 - 2x - x^2}.$$

$$5.1.8 \quad \text{а) } \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} \, dx; \quad \text{б) } \int x \sin x \cos x \, dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$5.1.9 \quad \text{а) } \int \frac{dx}{x(1 + \ln x)^4}; \quad \text{б) } \int x \sin(4x) \, dx; \quad \text{в) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

$$5.1.10 \quad \text{а) } \int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} \, dx; \quad \text{б) } \int (3x - 2)e^{-2x} \, dx; \quad \text{в) } \int_8^9 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}.$$

$$5.1.11 \quad \text{а) } \int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx; \quad \text{в) } \int_1^2 \frac{dx}{4x - x^2}.$$

$$5.1.12 \quad \text{а) } \int x 7^{x^2} \, dx; \quad \text{б) } \int x e^{\frac{x}{2}} \, dx; \quad \text{в) } \int_{20}^{21} \frac{dx}{(x+1)(x-11)}.$$

- 5.1.13 a) $\int \frac{dx}{9+(3x-1)^2}$; б) $\int x \ln x dx$; B) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-x-30}$.
- 5.1.14 a) $\int \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$; б) $\int x 5^{\frac{x}{2}} dx$; B) $\int_8^9 \frac{dx}{3-4x-x^2}$.
- 5.1.15 a) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$; б) $\int x e^{-x} dx$; B) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+x-1}$.
- 5.1.16 a) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int \sqrt{x} \ln x dx$; B) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+x+1}$.
- 5.1.17 a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$; б) $\int x \cos(6x) dx$; B) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+2)(4x-1)}$.
- 5.1.18 a) $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1-e^x}} dx$; б) $\int x^3 \ln x dx$; B) $\int_4^5 \frac{dx}{x^2-x+2}$.
- 5.1.19 a) $\int x\sqrt{3-x^2} dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$; B) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x+5}$.
- 5.1.20 a) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; б) $\int (5x-2) \ln x dx$; B) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(2x-1)}$.
- 5.1.21 a) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$; б) $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$; B) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+8}$.
- 5.1.22 a) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$; б) $\int \ln(3+x) dx$; B) $\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.
- 5.1.23 a) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$; б) $\int (2-x) \sin x dx$; B) $\int_3^4 \frac{dx}{2x^2-3x+1}$.
- 5.1.24 a) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$; б) $\int (2+x) e^{-x} dx$; B) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.
- 5.1.25 a) $\int \frac{x^2}{x^3+8} dx$; б) $\int (1-\ln x) dx$; B) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.
- 5.1.26 a) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+x^2}} dx$; б) $\int (3x+4) \cos x dx$; B) $\int_2^4 \frac{dx}{5x^2+x-4}$.
- 5.1.27 a) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx$; б) $\int \operatorname{arctg}(4x) dx$; B) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$.

$$5.1.28 \quad \text{a) } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+\sin x}} dx; \quad \text{б) } \int (x-4) \ln x dx; \quad \text{в) } \int_2^3 \frac{dx}{5x^2-x-4}.$$

$$5.1.29 \quad \text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}; \quad \text{б) } \int \arccos(7x) dx; \quad \text{в) } \int_3^4 \frac{dx}{2x^2-x-1}.$$

$$5.1.30 \quad \text{a) } \int \frac{3x^2}{1+x^6} dx; \quad \text{б) } \int (x+1) e^{-4x} dx; \quad \text{в) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

5.2 Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать рисунок фигуры, площадь которой нужно вычислить.

$$5.2.1 \quad y = x^3, \quad y = 4x.$$

$$5.2.16 \quad y = 4 - x^2, \quad y = 3x.$$

$$5.2.2 \quad y = x^3 - 1, \quad y = 1 - x, \quad x = -1.$$

$$5.2.17 \quad y = x^2, \quad y = 3 - 2x.$$

$$5.2.3 \quad y = 0,5x^2, \quad y = \sqrt{2x}.$$

$$5.2.18 \quad y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$$

$$5.2.4 \quad y = 2x - x^2, \quad y = -x.$$

$$5.2.19 \quad y = 1 - x^2, \quad y = 4 - 4x^2.$$

$$5.2.5 \quad y = 2 - x^2, \quad y = x^2.$$

$$5.2.20 \quad y = x^2, \quad y = 2 + x.$$

$$5.2.6 \quad y = \frac{1}{3}x^2, \quad y = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

$$5.2.21 \quad y = \frac{9}{x}, \quad y = 12 - 3x.$$

$$5.2.7 \quad y = x^2 - 2, \quad y = x.$$

$$5.2.22 \quad xy = 6, \quad y + x - 7 = 0.$$

$$5.2.8 \quad y = x^2, \quad y = 12 + x.$$

$$5.2.23 \quad y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$$

$$5.2.9 \quad y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

$$5.2.24 \quad y = -x, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 4.$$

$$5.2.10 \quad y = 4 - x^2, \quad y = 1 + 2x.$$

$$5.2.25 \quad y = x^2, \quad y = x, \quad x = -2.$$

$$5.2.11 \quad y = x^2, \quad y = 4 - 3x^2.$$

$$5.2.26 \quad y = 1 + x^2, \quad y = 5.$$

$$5.2.12 \quad y = 3x^2 + 1, \quad y = 7 + 3x.$$

$$5.2.27 \quad y = 2 - x^2, \quad y = x.$$

$$5.2.13 \quad y = x^2, \quad y = 4.$$

$$5.2.28 \quad xy = 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 4.$$

$$5.2.14 \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 1, \quad x = 8.$$

$$5.2.29 \quad y + x = 1, \quad y = e^x, \quad x = 1.$$

$$5.2.15 \quad y = -x, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 2.$$

$$5.2.30 \quad y = 2 - x, \quad y = 2 + 2x - x^2.$$

6 Функции нескольких переменных

6.1 Дана функция $z = f(x; y)$. Найти:

а) частные производные и дифференциал первого и второго порядков данной функции; производную функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ по направлению вектора $\overline{M_0M_1}$ и градиент функции в точке $M_0(x_0; y_0)$;

б) z''_{xy} ;

в) экстремум указанной функции.

6.1.1 а) $z = x^3y + 5x^2 - y^4 - 4$, $M_0(1;1)$, $M_1(3;2)$;

б) $z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$; в) $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2$.

6.1.2 а) $z = 5x^2y - 2y^4 - 3x + 1$, $M_0(1;2)$, $M_1(3;-2)$;

б) $z = \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$; в) $z = x^3 - 3xy + y^3$.

6.1.3 а) $z = 5x^2 - y^4 + 3x^3y - 4$, $M_0(0;1)$, $M_1(1;2)$;

б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; в) $z = x^2 + xy + 4y^2 - 2x + 3$.

6.1.4 а) $z = 2x^2y + x^2 - y^4 + 1$, $M_0(1;-2)$, $M_1(3;2)$;

б) $z = \arcsin \frac{x+y}{xy}$; в) $z = 2x^2 - 2x + 3xy + 4y^2 - 1$.

6.1.5 а) $z = x^3 + 5x^2y + 2y^3 - 4$, $M_0(1;-3)$, $M_1(2;-2)$;

б) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$; в) $z = 3x^2 + 3xy + 4y^2 + 4y - 2$.

6.1.6 а) $z = -x^2 - y^4 + 3xy^3 + 2$, $M_0(1;1)$, $M_1(3;2)$;

б) $z = \frac{y}{(x^2 + y^2)^5}$; в) $z = x^3 - 2x^2 + 6xy + y^2$.

6.1.7 а) $z = 2x^3y^2 + 4x^2 - 4y + 3$, $M_0(1;0)$, $M_1(0;2)$;

б) $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; в) $z = 3x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 5$.

- 6.1.8 a) $z = 5x^2 + 3x^2y - 4y + 2$, $M_0(1; -1)$, $M_1(3; -2)$;
 б) $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; в) $z = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 6y + 7$.
- 6.1.9 a) $z = 5x^4y + 3x^3 + 2y^4 - 1$, $M_0(1; 1)$, $M_1(3; 0)$;
 б) $z = xe^{\frac{y}{x}}$; в) $z = x^2 - 6xy + y^2 - 3$.
- 6.1.10 a) $z = 4x^3y^2 + 5x^2 - 2y^2 - 4$, $M_0(2; 1)$, $M_1(4; 2)$;
 б) $z = xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}$; в) $z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 10$.
- 6.1.11 a) $z = 4x^3y + 5x^4 - 2y + 1$, $M_0(1; -2)$, $M_1(4; 2)$;
 б) $z = e^{\frac{x}{y^2}}$; в) $z = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y - 2$.
- 6.1.12 a) $z = 3x^2y^3 - x^4 - y + 2$, $M_0(-1; 1)$, $M_1(-3; 2)$;
 б) $z = \ln(x^2 + e^{-y})$; в) $z = 2x^2 + 4xy - 2y^2 + x + 2$.
- 6.1.13 a) $z = 4x^3y^2 - x^2 - 2y + 1$, $M_0(1; 2)$, $M_1(3; 2)$;
 б) $z = 1 + \frac{\cos x^2}{y}$; в) $z = x^3 + y^3 + 9xy$.
- 6.1.14 a) $z = 5x^2 - y^4 + 3 - 4x^2y^3$, $M_0(0; -1)$, $M_1(4; 2)$;
 б) $z = \ln(x + \ln y)$; в) $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$.
- 6.1.15 a) $z = 2x^4y + 3x^2 - y + 3$, $M_0(1; 0)$, $M_1(2; 3)$;
 б) $z = e^{-x-3y} \sin(x + 3y)$; в) $z = 3x - x^2 - xy - y^2 + 6$.
- 6.1.16 a) $z = 2x^3y - 4 - 4y^2 + 3x$, $M_0(-3; -2)$, $M_1(0; 0)$;
 б) $z = e^x (\cos y + x \sin y)$; в) $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - x - 2y - 5$.
- 6.1.17 a) $z = 3x^3y^2 + 5x^2 - y^2 - 5$, $M_0(1; 1)$, $M_1(0; -3)$;
 б) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$; в) $z = 2x^3 - 6xy + 2y^3 + 5$.
- 6.1.18 a) $z = 2x^4y^3 - y^4 + 2x + 5$, $M_0(1; 1)$, $M_1(3; 2)$;
 б) $z = \frac{\cos x^2}{xy}$; в) $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.

- 6.1.19 a) $z = 3xy^3 - 4x^2 + y + 8$, $M_0(-1; -2)$, $M_1(-3; 2)$;
 б) $z = e^{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$; в) $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$.
- 6.1.20 a) $z = -2x^3y - 4x^2 + 2y - 5$, $M_0(1; 1)$, $M_1(3; 2)$;
 б) $z = \cos y + (y-x)\sin y$; в) $z = 9 - x^2 + xy - y^2$.
- 6.1.21 a) $z = 3x^2y - y^2 + 5x - 1$, $M_0(1; 5)$, $M_1(2; 3)$;
 б) $z = \arctg \sqrt{x^4}$; в) $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 2$.
- 6.1.22 a) $z = 5x^2y - 4y^5 + 3x - 7$, $M_0(1; -2)$, $M_1(4; 1)$;
 б) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; в) $z = 2xy - 4x - 2y$.
- 6.1.23 a) $z = 3xy^2 + 2x + 3y^4 - 6$, $M_0(-1; 1)$, $M_1(3; 4)$;
 б) $z = \arctg\left(\frac{x}{y^2}\right)$; в) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
- 6.1.24 a) $z = 4x^2y - y^4 + 3x - 1$, $M_0(2; -2)$, $M_1(3; 2)$;
 б) $z = e^{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}$; в) $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.
- 6.1.25 a) $z = 5x^2y^5 - y^4 + 3x^2 - 3$, $M_0(-3; 1)$, $M_1(1; -2)$;
 б) $z = y\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{x}}$; в) $z = 2(x-2y)^2 + 3xy + 3$.
- 6.1.26 a) $z = 5x^2y + 2y^2 + 3x - 4$, $M_0(1; -3)$, $M_1(2; -2)$;
 б) $z = \frac{\cos y^2}{xy}$; в) $z = 2x^2 + 6xy - 4y^2$.
- 6.1.27 a) $z = 7x^2y + x^2 - 3y + 1$, $M_0(1; -2)$, $M_1(3; 2)$;
 б) $z = \ln\left(y^2 + e^{-2x}\right)$; в) $z = x^2 - 4xy - y^2 - 8$.
- 6.1.28 a) $z = 2y + 5x^2 + 3x^3y - 2$, $M_0(0; 1)$, $M_1(1; 2)$;
 б) $z = \arctg \sqrt{x^3}$; в) $z = 4x^2 + xy - y^2 - 3$.
- 6.1.29 a) $z = 2x^3y^2 - 2y^4 + 5 - x$, $M_0(1; 2)$, $M_1(3; -2)$;
 б) $z = \cos x + (y+x)\sin y$; в) $z = x^2 - xy + y^2 + 12$.

$$6.1.30 \quad \text{а) } z = 5x^3y^2 + 5x^2 - y - 4, \quad M_0(1;1), \quad M_1(3;2);$$

$$\text{б) } z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + 2y}\right); \quad \text{в) } z = x^3 - 6xy + y^3 - 3.$$

Теоретические вопросы

1 Линейная алгебра

Матрицы. Примеры специальных матриц. Арифметические операции над матрицами. Транспонирование матриц. Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Определители 2-го и 3-го порядка, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Вычисление определителей по строке (столбцу). Обратная матрица. Построение обратной матрицы. Матричный способ решения СЛАУ. Решения СЛАУ с помощью формул Крамера. Решения СЛАУ методом Гаусса, методом полного исключения. Теорема Кронекера-Капелли. Схема исследования и решения СЛАУ. Базисные и опорные решения СЛАУ. Однородные СЛАУ. Жордановы исключения, их применение при решении систем линейных уравнений.

2 Аналитическая геометрия

Векторы. Линейные операции над векторами. Коллинеарность векторов. Проекция вектора на ось. Угол между векторами. Линейная зависимость и независимость векторов, линейная комбинация. Базис. Разложение вектора по базису. Декартова прямоугольная система координат. Разложение вектора в ортонормированном базисе. Длина вектора. Направляющие косинусы. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение двух векторов, его свойства. Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.

3 Введение в анализ

Числовая последовательность и ее предел. Основные свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности (б. м. п., б. б. п.), их свойства. Предел функции. Односторонние пределы. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (б. м. ф., б. б. ф.). Свойства б. м. ф., б. б. ф. Эквивалентные б. м. ф. и их применение при вычислении пределов.

4 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Класс элементарных функций. Монотонные функции. Критерий монотонности функции. Производная функции одной переменной. Дифференциал функции одной переменной. Таблица производных основных элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной неявно. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей с помощью правила Лопиталя. Производные высших порядков. Экстремум функции одной переменной. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба графика функции. Асимптоты графика функции. Схема исследования функции и построение графика.

5 Интегральное исчисление функции одной переменной

Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица основных неопределенных интегралов. Интегрирование методом замены переменной и по частям. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной и по частям. Приложения определенного интеграла.

6 Функции нескольких переменных

Частные производные ФНП. Дифференциал ФНП. Производная по направлению ФНП. Градиент ФНП. Частные производные и дифференциалы высших порядков ФНП. Экстремум функции нескольких переменных.

Список литературы

1 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

2 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак. – Минск : Навука і тэхніка, 1991. – 479 с.

3 **Белько, И. В.** Высшая математика для экономистов. Экспресс-курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. – М. : Новое знание, 2002. – 144 с.

4 **Унсович, А. Н.** Краткий курс высшей математики для экономистов / А. Н. Унсович. – Барановичи : БНИП, 2000. – 531 с.

5 **Минюк, С. А.** Высшая математика для экономистов / С. А. Минюк, С. А. Самаль, Л. И. Шевченко. – Минск : Элайда, 2003. – Т. 1. – 525 с.