ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Могилев 2015

УДК 517.3
ББК 22.161.1
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «02» июня 2015 г., протокол № 9

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. Л. А. Данилович;
канд. физ.-мат. наук, доц. В. Г. Замураев;
канд. физ.-мат. наук, доц. Д. В. Роголев

Рецензент канд. техн. наук, доц. О. Е. Печковская

Изложены краткие теоретические сведения и подобраны задачи с ответами по теме «Кривые и поверхности второго порядка».

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная вёрстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 09.10.2015. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,4. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 115 экз. Заказ № 644.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилёв.

Содержание

1 Кривые на плоскости

1.1 Уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат

Говорят, что кривая Γ в системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x,y)=0, \tag{1}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x,y)$ принадлежит кривой Γ в том, и только в том случае, когда её координаты удовлетворяют соотношению (1). Если, в частности, $F(x,y)=f(x)-y$, то уравнение (1) может быть записано в виде $y=f(x)$, и в этом случае кривая Γ совпадает с графиком функции $f(x)$.

Задание 1

В задачах 1–5 требуется установить, какие кривые определяются заданными уравнениями, и построить эти кривые.

1 $x+|y|=0$.

2 $x^2-y^2=0$.

3 $x^2+(y+3)^2=1$.

4 $2x^2+y^2+2=0$.

5 $x^2+|y^2-1|=0$.

6 Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точек $M_1(3,2)$ и $M_2(2,3)$.

7 Написать уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до точки $M_1(-1,1)$ вдвое меньше расстояния до точки $M_2(-4,4)$.

8 Написать уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2,-2)$ и $F_2(2,2)$ равен 4.

9 Написать уравнение окружности, проходящей через точку $M(1,2)$ и касающейся координатных осей.

10 Вычислить кратчайшее расстояние от точки $M_0(-7,2)$ до окружности $\Gamma: x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

Ответы

1 Рисунок 1. **2** Прямые $x-y=0$ и $x+y=0$. **3** Окружность радиуса $R=1$ с центром в точке $C(0,-3)$. **4** Пустое множество. **5** Точки $(0,\pm1)$.

6 $x-y=0$. **7** $x^2+y^2=8$. **8** $xy=2$. **9** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ или $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **10** 2.

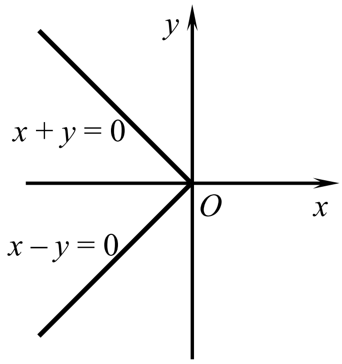

Рисунок 1

1.2 Алгебраические кривые второго порядка

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Γ, уравнение которой в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{2}$$

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю (в противном случае Γ – прямая, т. е. алгебраическая кривая первого порядка).

В общем случае может оказаться, что уравнение (2) определяет так называемую *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая Γ невырожденная, то для неё найдётся такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих трёх видов *(каноническое уравнение)*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\ge b>0; \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0; \tag{4}$$

$$y^2=2px,\ p>0. \tag{5}$$

При этом кривая Γ называется соответственно *эллипсом, гиперболой* или *параболой*, а сама система координат, в которой её уравнение имеет вид (3), (4) или (5), называется *канонической системой координат* для заданной кривой.

Рассмотрим основные геометрические свойства невырожденных кривых второго порядка на основе их канонических уравнений.

Эллипс с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a\ge b>0$, имеет форму, изображённую на рисунке 2.

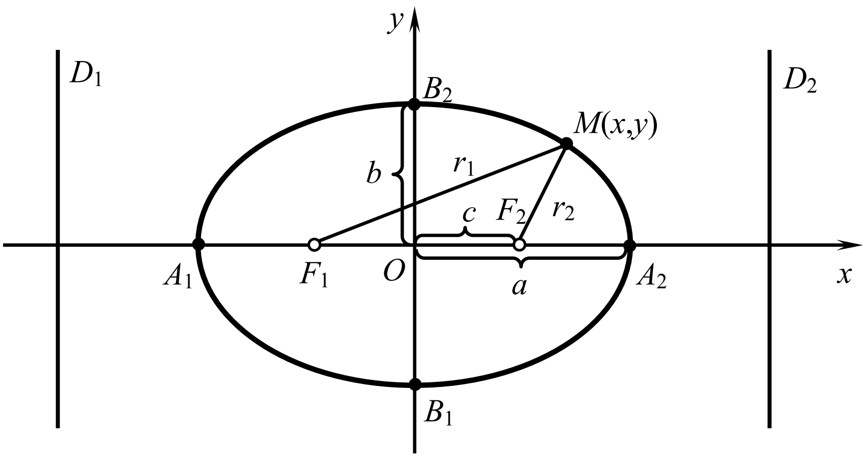

Рисунок 2

Параметры a и b называют *полуосями* эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$ – его *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy – *главными осями*, а центр симметрии O – *центром* эллипса.

Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}\ge 0$, называются *фокусами* эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей эллипсу. В частном случае $a=b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, или $x^2+y^2=a^2$, т. е. описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ $(0\le e<1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $e=0$ эллипс является окружностью).

Прямые $D_1: x=-\dfrac{a}{e}$ и $D_2: x=\dfrac{a}{e}$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от центра, называются *директрисами* эллипса.

Если $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\ge b$, то фокальные радиусы этой точки $r_1(M)=a+ex$, $r_2(M)=a-ex$. Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M эллипса выполняется равенство

$$r_1(M)+r_2(M)=2a.$$

Пусть заданы точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, $c\ge 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=2a$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$.

Если $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ – фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M,D_1)$ и $\rho(M,D_2)$ – её расстояния до директрис, то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M,D_1)}=\frac{r_2(M)}{\rho(M,D_2)}=e.$$

Пусть заданы точка $F(c,0)$и прямая $D: x-d=0$, $d>c>0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\frac{\left|\overrightarrow{FM}\right|}{\rho(M,D)}=e<1$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a=de$ и $b^2=a^2-c^2$.

Задание 2

1 Построить эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

2 Написать каноническое уравнение эллипса, если:

а) $b=5$, $e=\frac{12}{13}$;

б) $c=2$ и расстояние между директрисами равно 5.

3 Установить, что уравнение $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ определяет эллипс, найти его центр C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис.

4 Эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями, проходит через точки $M_1(2,\sqrt{3})$ и $M_2(0,2)$. Написать его уравнение, найти фокальные радиусы точки M_1 и расстояния от этой точки до директрис.

5 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если сумма расстояний от неё до точек $F_1(-1,-1)$ и $F_2(1,1)$ остаётся постоянной и равной $2\sqrt{3}$.

Ответы

1 а) $a=5$, $b=3$; б) $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$; в) $e=\frac{4}{5}$; г) $D_1: x=-\frac{25}{4}$, $D_2: x=\frac{25}{4}$. **2** а) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; б) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$. **3** $C(1,-2)$, $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $e=\frac{1}{2}$, $D_1: y+10=0$, $D_2: y-6=0$. **4** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $r_{1,2}=4\pm\sqrt{3}$, $\rho_{1,2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(4\pm\sqrt{3}\right)$. **15** $2x^2-2xy+2y^2-3=0$.

Гипербола с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$, имеет форму, изображённую на рисунке 3.

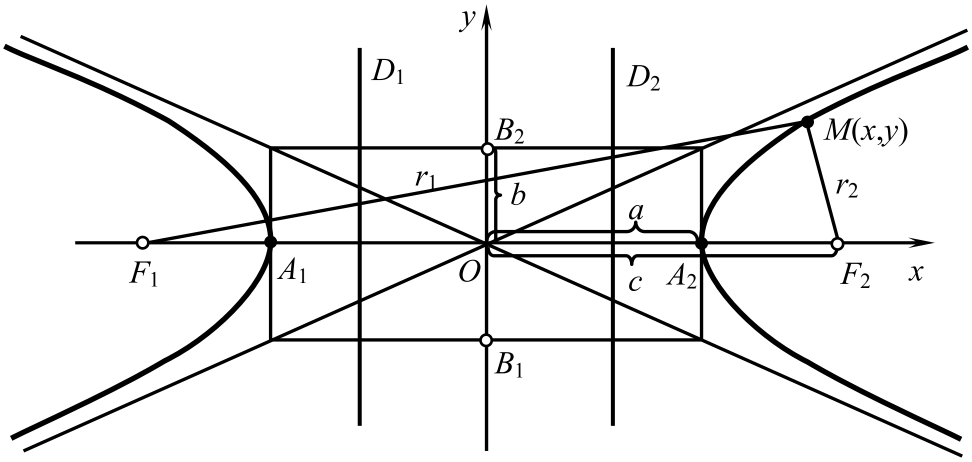

Рисунок 3

Параметры a и b называются *полуосями* гиперболы, точки $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ – её *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy – *действительной* и *мнимой осями*, а центр симметрии O – *центром* гиперболы.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы.

Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$, называются *фокусами* гиперболы, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – *фокальными радиус-векторами*, а числа

$r_1 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальными радиусами* точки M , принадлежащей гиперболе.

Число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ $(1 < e < +\infty)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы и является мерой её «сплюснутости». В частном случае $a = b$ гипербола называется *равносторонней*, её эксцентриситет $e = \sqrt{2}$, а угол между асимптотами равен $\frac{\pi}{2}$.

Прямые $D_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $D_2 : x = \frac{a}{e}$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра, называются *директрисами* гиперболы.

Если $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то фокальные радиусы этой точки: $r_1(M) = a + ex$, $r_2(M) = -a + ex$, если точка M лежит на правой ветви гиперболы; $r_1(M) = -a - ex$, $r_2(M) = a - ex$, если эта точка лежит на её левой ветви. Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M гиперболы выполняется равенство

$$\left|r_1(M) - r_2(M)\right| = 2a .$$

Пусть заданы точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, $c > 0$. Тогда множество точек M , удовлетворяющих условию $\left|\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right|\right| = 2a$, $a > 0$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

Если $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ – фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M,D_1)$ и $\rho(M,D_2)$ – её расстояния до директрис, то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M,D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M,D_2)} = e .$$

Пусть заданы точка $F(c,0)$и прямая $D : x - d = 0$, $c > d > 0$. Тогда множество точек M , удовлетворяющих условию $\frac{\left|\overrightarrow{FM}\right|}{\rho(M,D)} = e > 1$, есть гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $a=de$ и $b^2=c^2-a^2$.

Задание 3

1 Построить гиперболу $16x^2-9y^2=144$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

2 Построить гиперболу $16x^2-9y^2=-144$ (*сопряжённую* к гиперболе задачи 1). Какова каноническая система координат для этой гиперболы? Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

3 Написать каноническое уравнение гиперболы, если:

а) $c=3$, $e=\dfrac{3}{2}$;

б) $c=10$ и уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

4 Установить, что уравнение $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$ определяет гиперболу, найти её центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

5 Написать уравнение гиперболы, если известны её эксцентриситет $e=\sqrt{5}$, фокус $F(2,-3)$ и уравнение соответствующей директрисы $3x-y+3=0$.

Ответы

1 а) $a=3$, $b=4$; б) $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$; в) $e=\dfrac{5}{3}$; г) $y=\pm\dfrac{4}{3}x$; д) $x=\pm\dfrac{9}{5}$. **2** а) $a=4$, $b=3$; б) $F_1(0,-5)$, $F_2(0,5)$; в) $e=\dfrac{5}{4}$; г) $y=\pm\dfrac{4}{3}x$; д) $y=\pm\dfrac{16}{5}$. **3** а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$; б) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$. **4** $C(2,-1)$, $a=4$, $b=3$, $e=\dfrac{5}{4}$, уравнения асимптот: $4x+3y-5=0$ и $4x-3y-11=0$, уравнения директрис: $y=-4{,}2$ и $y=2{,}2$. **5** $7x^2-6xy-y^2+26x-18y-17=0$.

П а р а б о л а с каноническим уравнением $y^2=2px,\ p>0$, имеет форму, изображённую на рисунке 4.

Число p называется *параметром* параболы, точка O – её *вершиной*, а ось Ox – *осью* параболы.

Точка $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ называется *фокусом* параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ – *фокаль-*

ным радиус-вектором, а число $r = \left|\overrightarrow{FM}\right|$ – *фокальным радиусом* точки M параболы.

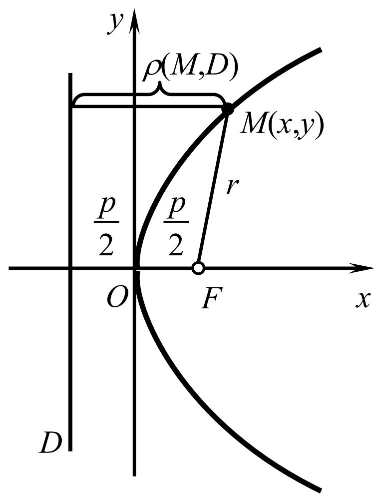

Рисунок 4

Прямая $D: x = -\dfrac{p}{2}$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $\dfrac{p}{2}$ от вершины параболы, называется её *директрисой*.

Если $M(x, y)$ – произвольная точка параболы $y^2 = 2px$, $r(M)$ – её фокальный радиус, а $\rho(M, D)$ – расстояние от точки M до директрисы, то выполняется равенство

$$\frac{r(M)}{\rho(M,D)} = 1.$$

Пусть заданы точка $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ и прямая $D: x = -\dfrac{p}{2}$. Тогда множество точек *M*, удовлетворяющих условию $\dfrac{\left|\overrightarrow{FM}\right|}{\rho(M,D)} = 1$, есть парабола $y^2 = 2px$.

Задание 4

1 Построить следующие параболы и найти их параметры:

а) $y^2 = 6x$; в) $y^2 = -4x$;

б) $x^2 = 5y$; г) $x^2 = -y$.

2 Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что фокус параболы находится в точке $F(0, -3)$.

3 Установить, что уравнение $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$ определяет параболу, найти координаты её вершины A и величину параметра p.

4 Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=12x$, если $y(M)=6$.

5 Написать уравнение параболы, если известны фокус $F(2,-1)$ и директриса $D: x-y-1=0$.

Ответы

1 а) $p=3$; б) $p=\frac{5}{2}$; в) $p=2$; г) $p=\frac{1}{2}$. **2** $x^2=-12y$. **3** $A(6,-1)$, $p=3$. **4** 6. **5** $x^2+2xy+y^2-6x+2y+9=0$.

1.3 Уравнение кривой в полярной системе координат

Говорят, что на плоскости введена полярная система координат $\langle O,u\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *полюсом*;

2) некоторый луч u, исходящий из точки O и называемый *полярной осью*.

Полярными координатами точки $M \neq O$ называются два числа: *полярный радиус* $r(M)=\left|\overrightarrow{OM}\right|>0$ и *полярный угол* $\varphi(M)$ – угол, на который следует повернуть ось u для того, чтобы её направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ (при этом, как обычно, $\varphi(M)>0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi(M)<0$ в противном случае). Запись $M(r,\varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ.

Полярный угол $\varphi(M)$ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину вида $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$). Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0\le\varphi<2\pi$, называется *главным*. В некоторых случаях главным значением полярного угла называют значение φ, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\le\pi$.

Пусть на плоскости введены правая декартова прямоугольная система координат Oxy (т. е. такая, что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy происходит против часовой стрелки) и полярная система $\langle O,u\rangle$, причём полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Тогда связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки $M \neq O$ даётся формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $F(r,\varphi) = 0$ или $r = f(\varphi)$. Оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой, заданном в декартовых прямоугольных координатах.

Если Г – эллипс, ветвь гиперболы или парабола, F – фокус этой кривой, D – соответствующая директриса, то уравнение кривой Г в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом, а полярная ось сонаправлена с осью кривой, имеет следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

где e – эксцентриситет кривой;

p – параметр кривой, называемый *полуфокальным диаметром*;

$\frac{p}{e}$ – расстояние от фокуса до директрисы.

Задание 5

1 Записать уравнения заданных кривых в полярных координатах:

а) $x + y - 1 = 0$; б) $x^2 + y^2 = a^2$; в) $x^2 + y^2 = ax$.

2 Записать уравнения заданных кривых в декартовых прямоугольных координатах и построить эти кривые:

а) $r = 5$; б) $r\sin\varphi = 1$; в) $r = 2a\cos\varphi$.

3 Написать в полярных координатах уравнение окружности, если радиус $R = 5$, окружность проходит через полюс, а её центр лежит на полярной оси.

4 Написать канонические уравнения следующих кривых второго порядка:

а) $r = \frac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; б) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; в) $r = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$.

5 Построить кривые, заданные уравнениями в полярных координатах:

а) $r = \sin 5\varphi$; б) $r = 2a(1 - \cos\varphi)$; в) $r = \varphi$.

Ответы

1 а) $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $r = a$; в) $r = a\cos\varphi$. **2** а) окружность $x^2 + y^2 = 25$; б) прямая $y = 1$; в) окружность $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. **3** $r = 10\cos\varphi$.

4 а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; в) $y^2=6x$.

1.4 Параметрические уравнения кривой

Пусть заданы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывные на некотором промежутке I числовой оси (промежуток I может быть интервалом (a,b), отрезком $[a,b]$, а также одним из полуинтервалов $(a,b]$ или $[a,b)$, причём не исключаются случаи, когда $a=-\infty$ и (или) $b=+\infty$). Уравнения

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in I, \tag{6}$$

называются *параметрическими уравнениями* кривой Γ в декартовой прямоугольной системе координат, если выполнено следующее условие: для всякого значения *параметра* $t\in I$ точка $M\left(\varphi(t),\psi(t)\right)$ принадлежит кривой Γ и, наоборот, для всякой точки $M(x,y)$ кривой Γ существует такое значение параметра $t\in I$, что $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Исключением параметра t из (6) уравнение кривой может быть представлено в виде $F(x,y)=0$.

Аналогично определяются параметрические уравнения кривой в полярных координатах.

Задание 6

В задачах 1–3 требуется исключением параметра t найти уравнения заданных кривых в виде $F(x,y)=0$ и построить эти кривые.

1 $x=t^2-2t+1$, $y=t-1$, $t\in(-\infty,+\infty)$.

2 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi)$.

3 $x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$, $y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$, $t\in(0,+\infty)$.

4 Составить параметрические уравнения гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

5 Составить параметрические уравнения параболы $y^2=2px$, принимая в качестве параметра:

а) ординату y;

б) угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

Ответы

1 Парабола $y^2 = x$. **2** Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **3** Правая ветвь гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **4** $x = \frac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}}$, $x = \frac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}}$, где $t \in \left(-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$ для правой ветви и $t \in \left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$ для левой ветви. **5** а) $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$, $t \in (-\infty, +\infty)$; б) $x = 2p\operatorname{ctg}^2 t$, $y = 2p\operatorname{ctg} t$, где $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ для верхней ветви и $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ для нижней ветви.

2 Поверхности и кривые в пространстве

2.1 Уравнения поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат

Говорят, что поверхность S в системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \tag{7}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности S в том, и только в том случае, когда её координаты удовлетворяют соотношению (7). Если, в частности, $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, то уравнение (7) может быть записано в виде

$$z = f(x, y),$$

и в этом случае поверхность S совпадает с графиком функции двух переменных $f(x, y)$.

Кривая Γ в пространстве в общем случае определяется как линия пересечения некоторых поверхностей S_1 и S_2 (определяемых неоднозначно), т. е. заданием системы двух уравнений:

$$F_1(x, y, z) = 0,\ F_2(x, y, z) = 0.$$

Задание 1

В задачах 1–2 установить, какие геометрические образы определяются заданными уравнениями.

1 $x^2 - 4z^2 = 0$.

2 $xy - y^2 = 0$.

3 Установить, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$ определяет сферу. Найти её центр C и радиус R.

4 Установить, какая кривая определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

5 Составить уравнения окружности, проходящей через три точки $M_1(3,-1,-2)$, $M_2(1,1,-2)$ и $M_3(-1,3,0)$.

Ответы

1 Пара пересекающихся плоскостей $x - 2z = 0$ и $x + 2z = 0$, параллельных оси Oy. **2** Пара плоскостей $y = 0$ и $y = x$. **3** $C(2,1,-1)$, $R = 5$. **4** Окружность, лежащая в плоскости $z = 2$ с центром в точке $C(0,0,2)$ и радиусом $R = 4$. **5**

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27, \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

2.2 Алгебраические поверхности второго порядка

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \tag{8}$$

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю (в противном случае S – алгебраическая поверхность первого порядка, т. е. плоскость).

Может оказаться, что уравнение (8) определяет так называемую *вырожденную* поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей).

Если же поверхность *невырожденная*, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат её уравнение (8) может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности.

1 *Эллипсоид:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (рисунок 5).

2 *Гиперболоид:*

а) *однополостный:* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рисунок 6, а);

б) *двуполостный:* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (рисунок 6, б).

3 *Конус второго порядка*: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (рисунок 7).

4 *Параболоид:*

а) *эллиптический:* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ (рисунок 8, а);

б) *гиперболический:* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$ (рисунок 8, б).

5 *Цилиндр второго порядка:*

а) *эллиптический:* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рисунок 9, а);

б) *гиперболический*: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рисунок 9, б);

в) *параболический:* $y^2=2px,\ p>0$ (рисунок 9, в).

Одним из основных методов исследования формы поверхности по её уравнению является *метод сечений*.

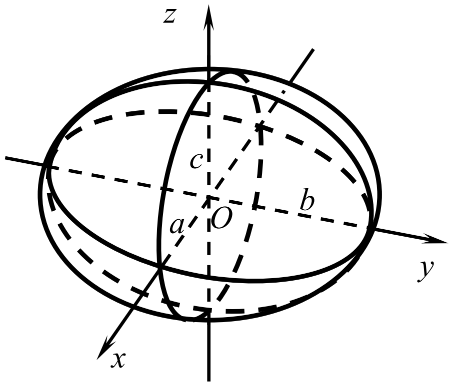

Рисунок 5

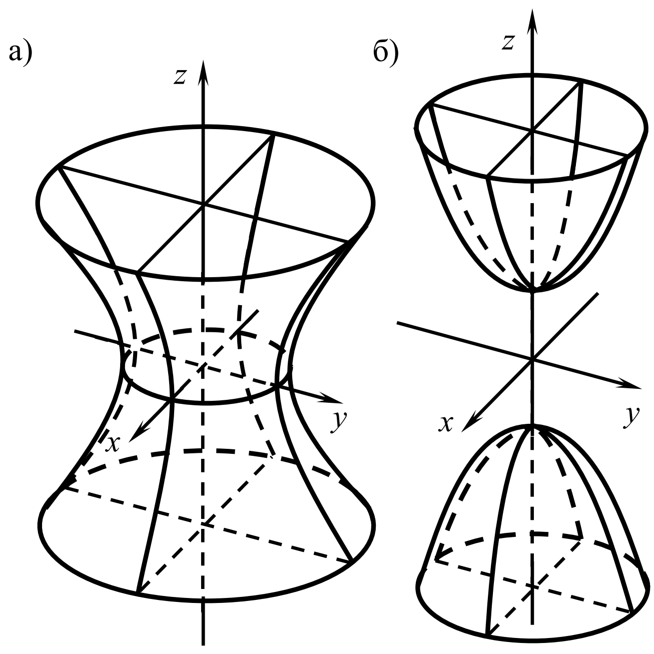

Рисунок 6

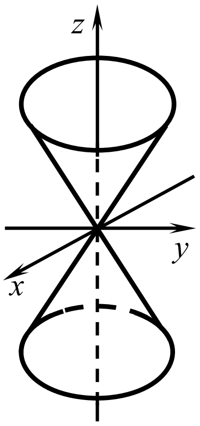

Рисунок 7

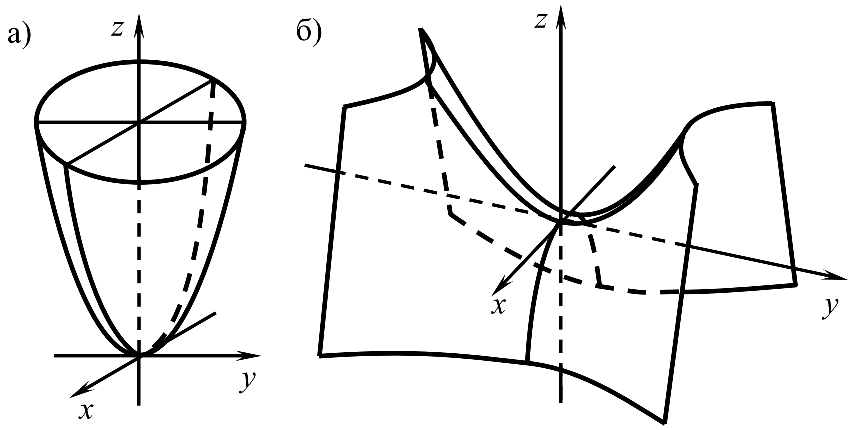

Рисунок 8

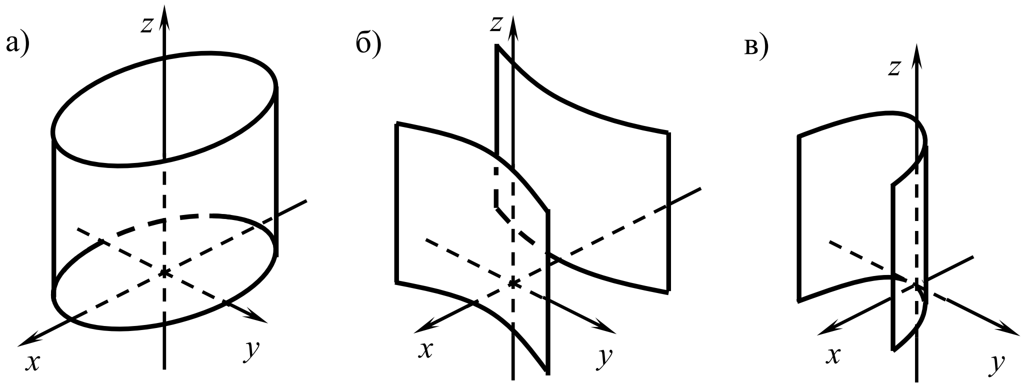

Рисунок 9

Задание 2

В задачах 1–3 установить тип заданных поверхностей и построить их.

1 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$.

2 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$.

3 $x^2=2az$, $a\neq 0$.

4 Доказать, что уравнение $z^2=xy$ определяет конус с вершиной в начале координат.

5 Доказать, что плоскость $2x-12y-z+16=0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2-4y^2=2z$ по прямолинейным образующим (т. е. прямым, целиком лежащим на этой поверхности). Составить уравнения этих образующих.

Ответы

1 Однополостный гиперболоид. **2** Гиперболический параболоид. **3** Параболический цилиндр. **4** Воспользоваться однородностью уравнения. **5** $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x-2y+4=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-12y-z+16=0, \\ x+2y-8=0. \end{cases}$

2.3 Классификация поверхностей по типу преобразований пространства

Выделяют три класса поверхностей: цилиндрические, конические и поверхности вращения, – инвариантных относительно преобразований соответствующего типа.

Цилиндрической поверхностью (*цилиндром*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований параллельного переноса, определяемых любым вектором, коллинеарным некоторому вектору $\vec{q}(l,m,n)$. Из этого определения следует, что если точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит цилиндру S, то и вся прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ также принадлежит этому цилиндру.

Принята следующая терминология: всякая прямая, коллинеарная вектору $\vec{q}(l,m,n)$, называется *осью* цилиндра S; прямые $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, целиком принадлежащие цилиндру, называются его *образующими*; всякая кривая Γ, лежащая на цилиндре и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого цилиндра.

Пусть $\vec{q}(l,m,n)$ – любой вектор, коллинеарный оси цилиндра S, а направляющая Γ задана уравнениями

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0.$$

Точка $M(x,y,z)$ принадлежит цилиндру S в том, и только в том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x+lt$, $y+mt$, $z+nt$ лежит на образующей Γ, т. е.

$$\begin{cases} F_1(x+lt,y+mt,z+nt)=0, \\ F_2(x+lt,y+mt,z+nt)=0. \end{cases} \tag{9}$$

Исключая параметр t из системы (9), получим соотношение вида $F(x,y,z)=0$, которое и является уравнением заданного цилиндра.

Конической поверхностью (*конусом*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований гомотетии с произвольным коэффициентом k и центром в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называемой *вершиной* конуса. Из этого определения следует, что если точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит конусу, то вся прямая $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_1}{z_1-z_0}$, проходящая через эту точку и вершину M_0 и называемая *образующей* конуса, целиком лежит на конусе. Всякая кривая Γ, лежащая на конусе и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого конуса.

Пусть задан конус S с вершиной $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющей

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0.$$

Точка $M(x,y,z)$ принадлежит конусу S в том, и только в том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x+t(x-x_0)$, $y+t(y-y_0)$, $z+t(z-z_0)$ лежит на образующей Γ, т. е.

$$\begin{cases} F_1\big(x+t(x-x_0), y+t(y-y_0), z+t(z-z_0)\big)=0, \\ F_2\big(x+t(x-x_0), y+t(y-y_0), z+t(z-z_0)\big)=0. \end{cases} \tag{10}$$

Исключая параметр t из системы (10), получим уравнение конуса в виде $F(x,y,z)=0$.

Поверхностью вращения называется поверхность, инвариантная относительно поворотов на любой угол φ вокруг некоторой фиксированной оси u. Эта поверхность может быть получена вращением вокруг оси u кривой, получающейся в сечении поверхности любой плоскостью, проходящей через эту ось.

Если, например, поверхность образована вращением кривой $F(x,z)=0$, $y=0$ вокруг оси Oz, то уравнение этой поверхности имеет следующий вид:

$$F\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0.$$

Задание 3

1 Составить уравнение поверхности, каждая точка которой одинаково удалена от прямой $x=a$, $y=0$ и плоскости Oyz. Построить поверхность.

2 Составить уравнение цилиндра, если ось коллинеарна вектору $\vec{q}(1,2,3)$, а направляющая задана уравнениями $y^2=4x$, $z=0$.

3 Составить уравнение конуса, если заданы координаты вершины $M_0\left(0,-a,0\right)$ и уравнения направляющей $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y+z=a$.

4 Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z=x^2$, $y=0$ вокруг оси Ox. Построить эту поверхность.

5 Показать, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ есть уравнение поверхности вращения с осью вращения Ox. Написать уравнение кривой в плоскости $z=0$, вращением которой получена эта поверхность.

Ответы

1 $y^2=2ax-x^2$. **2** $\left(3y-2z\right)^2=12\left(3x-z\right)$. **3** $x^2+z^2=z\left(y+a\right)$. **4** $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$. **5** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Список литературы

1 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 576 с.

2 Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1 : Линейная алгебра и основы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 3-е изд. – М. : Наука, 1993. – 480 с.

3 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.