Министерство образования Республики Беларусь

МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ



Могилев 2000

УДК

Составители: Дроздова В.И.,
Зубова М.Н., Галуза Е.Г.

"Системы линейных дифференциальных уравнений". Методические указания к практическим занятиям, Могилев: МГТУ, 2000 — 15 с.

В методической разработке изложен материал, который рекомендуется использовать студентам I и II курсов всех специальностей при подготовке к практическим занятиям по теме: "Системы линейных дифференциальных уравнений". Даны необходимые теоретические сведения, указаны три метода решения системы линейных дифференциальных уравнений. Подобраны примеры для самостоятельного решения.

Составлены 30 вариантов индивидуальных заданий по указанной теме. Методическая разработка может быть использована студентами заочного факультета при подготовке к выполнению контрольной работы; при подготовке к экзамену.

Одобрено кафедрой высшей математики МГТУ "4" июня 2000 г., протокол № 10

Рецензент Титов В.Л.
Редактор Авдевич Л.В.

Рекомендовано к опубликованию комиссией методического совета МГТУ.

Ответственный за выпуск Пугин В.В.

***СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ***



Подписано в печать 25.09.00. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл.печ.л. 0,93. Уч.-изд.л. 0,98. Тираж 210 экз. Заказ № 390

Издатель и полиграфическое исполнение:
Могилевский государственный технический университет
Лицензия ЛВ № 243 от 11.03.98 г., лицензия ЛП № 165 от 08.01.98 г.
212005, г.Могилев, пр.Мира, 43

# 1 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (1.1)$$

где $y_1$, $y_2$,..., $y_n$ — неизвестные функции независимой переменной x, называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Если правые части нормальной системы д.у. являются линейными функциями относительно $y_1$, $y_2$,..., $y_n$, то система д.у. называется **линейной**.

Решением системы (1.1) на интервале $a \le x \le b$ называется совокупность функций $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$, ..., $y_n=\varphi_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и обращающих уравнения системы (1.1) в тождества относительно $x \in (a, b)$.

Рассмотрим методы интегрирования систем д.у.

## 1.1 Последовательное интегрирование систем дифференциальных уравнений

Если система д.у. состоит из n уравнений первого порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию, то ее интегрирование сводится к интегрированию каждого из уравнений в отдельности.

В случае, когда система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (1.2)$$

ее интегрирование выполняется последовательно: нужно проинтегрировать первое уравнение, подставить найденное общее решение во второе уравнение, проинтегрировать его и т.д.

***Пример 1:*** Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2xy^2, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z-x}{x}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Интегрируя каждое из уравнений в отдельности, получим из первого уравнения после разделения переменных и интегрирования:

$$y = -\frac{1}{x^2 + C_1},$$

а из второго, решая линейное уравнение первого порядка, имеем

$$z = x(C_2 - \ln|x|).$$

О т в е т: общее решение системы имеет вид:

$$y = -\frac{1}{x^2 + C_1}, \quad z = x(C_2 - \ln|x|),$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

***Пример 2:*** Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Выполняем интегрирование последовательно, начиная с третьего уравнения. Находим $z=C_1e^{2t}$. Подставляем выражение z во второе уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = 2y + C_1e^{2t}.$$

Получили линейное уравнение первого порядка. Интегрируя, имеем

$$y = (C_1t + C_2)\,e^{2t}.$$

Тогда первое уравнение принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + (C_1t + C_2)\,e^{2t}.$$

Откуда $x=\left(\frac{C_1}{2}t^2+C_2t+C_3\right)e^{2t}$.

О т в е т: решение системы имеет вид:

$$x=\left(\frac{C_1}{2}t^2+C_2t+C_3\right)e^{2t},\quad y=(C_1t+C_2)\,e^{2t},\quad z=C_1e^{2t},$$

где $C_1, C_2, C_3$— произвольные постоянные.

## 1.2 Метод исключения

Метод исключения состоит в приведении системы к одному уравнению (если оно возможно), что достигается последовательным дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных функций, кроме одной. В случае линейной системы д.у. полученное вспомогательное уравнение обязательно линейное.

***Пример 3 :*** Найти общее решение системы:

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}+3y+z=0,\\ \frac{dz}{dx}-y+z=-x.\end{cases}$$

Р е ш е н и е: Дифференцируем первое уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0. \qquad (1.3)$$

Вычитая из второго уравнения системы первое, имеем

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}+4y-x. \qquad (1.4)$$

Подставляя выражение $\frac{dz}{dx}$ в уравнение (1.3), получаем линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''+4y'+4y=x. \qquad (1.5)$$

Решаем его: $y''+4y'+4y=0$, $k^2+4k+4=0$, $k_1=k_2=-2$,

$y_{o.o.}=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

$$y_{ч.н.}=Ax+B, \quad y'_{ч.н.}=A, \quad y''_{ч.н.}=0.$$

Подставим выражения $y_{ч.н}$, $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н}$ в уравнение (1.5):

$$4A+4Ax+4B=x, \text{ откуда } 4A=1, \quad A=\frac{1}{4}, \quad 4A+4B=0,$$

$$B=-A=-\frac{1}{4}, \quad y_{ч.н.}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}.$$

Тогда $y_{о.н.}=y(x)=y_{о.о}+y_{ч.н}=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$,

$$y'(x)=-2C_1e^{-2x}-2C_2x\,e^{-2x}+C_2\,e^{-2x}+\frac{1}{4}.$$

Подставляя найденные выражения $y(x)$ и $y'(x)$ в 1-ое уравнение системы, найдем $z=-y'-3y=-C_1e^{-2x}-C_2(1+x)\,e^{-2x}+\frac{1}{4}(2-3x)$.

О т в е т: общее решение системы имеет вид

$$y=C_1\,e^{-2x}+C_2x\,e^{-2x}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}, \quad z=-C_1\,e^{-2x}-C_2(1+x)\,e^{-2x}+\frac{1}{4}(2-3x).$$

***Пример 4 :*** Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=z-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=z, \\ \dfrac{dz}{dt}=z-x. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Продифференцируем третье уравнение по t:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dz}{dt}-\frac{dx}{dt}.$$

Используя первое уравнение, находим $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dz}{dt}-z+y$, откуда, дифференцируя еще раз по t и используя второе уравнение системы, получаем линейное однородное уравнение третьего порядка относительно z:

$$\frac{d^3z}{dt^3}-\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}-z=0.$$

Его общее решение: $z(t)=C_1\,e^t+C_2\cos t+C_3\sin t$.
Из третьего уравнения системы находим

$$x=z-\frac{dz}{dt}=C_2(\cos t+\sin t)+C_3(\sin t-\cos t),$$

а из первого уравнения— $y=z-\frac{dx}{dt}=C_1e^t+C_2\sin t-C_3\cos t.$

О т в е т: общее решение системы имеет вид

$$x=C_2(\cos t+\sin t)+C_3(\sin t-\cos t),$$
$$y=C_1e^t+C_2\sin t-C_3\cos t,$$
$$z=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t.$$

где $C_1, C_2, C_3$ — произвольные постоянные.

## 1.3 Метод Эйлера — Коши (метод "векового" уравнения)

Рассмотрим линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера рассмотрим для случая n=3. Обозначая неизвестные функции независимой переменной x через y, z, w, запишем линейную однородную систему с постоянными коэффициентами в виде

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=a_{11}y+a_{12}z+a_{13}w,\\ \frac{dz}{dx}=a_{21}y+a_{22}z+a_{23}w,\\ \frac{dw}{dx}=a_{31}y+a_{32}z+a_{33}w.\end{cases}\qquad(1.6)$$

Согласно методу Эйлера ненулевые решения системы (1.6) ищут в виде

$$y=\alpha e^{kx},\quad z=\beta e^{kx},\quad w=\gamma e^{kx},\qquad(1.7)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, k$ — некоторые числа, которые надо подобрать так, чтобы функции (1.7) удовлетворяли системе (1.6).

Подставляя функции (1.7) и их производные в уравнение системы (1.6), получим:

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha+a_{12}\beta+a_{13}\gamma=0,\\ a_{21}\alpha+(a_{22}-k)\beta+a_{23}\gamma=0,\\ a_{31}\alpha+a_{32}\beta+(a_{33}-k)\gamma=0.\end{cases}\qquad(1.8)$$

Для того чтобы система (1.8) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю. Таким образом число k должно удовлетворять уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.9)$$

Уравнение (1.9) называется ***характеристическим*** (или вековым). По основной теореме алгебры оно имеет три корня $k_1$, $k_2$, $k_3$. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение. Обозначим эти решения $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$; $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$. Тогда ненулевые решения системы (1.6) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & w_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & w_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & w_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами также будет решением системы

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3, \\ w &= C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3. \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Если корни $k_1$, $k_2$, $k_3$ различны, то решение (1.10) будет общим решением системы (1.6) в области

$$\{ -\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < x < +\infty,\ -\infty < w < +\infty \}.$$

Для случая кратных корней вопрос рассматривать не будем.

Если $y=u+iv$, $z=s+it$, $w=p+iq$ — комплексное решение системы (1.6), то действительные и мнимые части также составляют решения системы (1.6). В случае если $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ — корни характеристического уравнения, то найденные комплексные решения можно заменить действительными решениями, отделяя действительные и мнимые части составляющих их функций.

***Пример 5 :*** Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + z + w, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z + w, \\ \dfrac{dw}{dx} = y + z + w. \end{cases} \qquad (1.11)$$

Р е ш е н и е: Ищем решение системы (1.11) в виде $y=\alpha e^{kx}$, $z=\beta e^{kx}$, $w=\gamma e^{kx}$. Подставляя эти функции в уравнения, после сокращения на $e^{kx}$ ($e^{kx}\neq 0$), получаем:

$$\begin{cases} -(1+k)\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + (-1-k)\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + (1-k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (1+k)(4-k^2)=0.$$

Его корни $k_1=-1$, $k_2=-2$, $k_3=2$.

Подставляем $k_1=-1$ в систему (1.12) и получим:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Третье уравнение отбрасываем (оно следует из первых двух) и находим $\alpha=-\gamma$, $\beta=-\gamma$, где $\gamma$ — любое число. Задав $\gamma$ какое-нибудь конкретное значение, например $\gamma=-1$, находим решение системы (1.11):

$$y_1=e^{-x}, \quad z_1=e^{-x}, \quad w_1=e^{-x}.$$

Теперь подставим $k_2=-2$ в систему (1.12) и получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Решая систему из двух последних уравнений с тремя неизвестными, получаем $\beta=-\alpha$, $\gamma=0$, где $\alpha$ — любое число. Полагая $\alpha=1$, находим второе решение системы (1.11): $y_2=e^{-2x}$, $z_2=e^{-2x}$, $w_2=0$.

Подставляя $k_3=2$ в систему (1.12), получим:

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha - 3\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Отбрасывая третье уравнение, получаем $\beta = \frac{\gamma}{2}$, $\alpha = \frac{\gamma}{2}$, где $\gamma$ — любое число. Положив $\gamma=2$, находим $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=2$. Тогда третье решение системы будет иметь вид:

$$y_3 = e^{2x}, \quad z_3 = e^{2x}, \quad w_3 = 2e^{2x}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}, \\ z &= C_1 e^{-x} - C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}, \\ w &= -C_1 e^{-x} + 2C_3 e^{2x}, \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, C_3$ — произвольные постоянные.

***Пример 6 :*** Найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z, \end{cases} \qquad (1.13)$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1$, $z(0)=1$.

Р е ш е н и е: Ищем решение системы (1.13) в виде $y=\alpha e^{kx}$, $z=\beta e^{kx}$. При этом получаем:

$$\begin{cases} (1-k)\alpha - 2\beta = 0, \\ \alpha + (3-k)\beta = 0. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Корни $k_{1,2}=2\pm i$ — комплексно-сопряженные. Подставляя $k_1=2+i$ в систему (1.14), получим:

$$\begin{cases} (-1-i)\alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha + (1-i)\beta = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения (второе — следствие первого) находим $\beta = \frac{1+i}{2}\alpha$. Взяв $\alpha=2$, имеем $\beta=1+i$, т.е. первое решение системы (1.13) будет иметь вид:

$$y_1 = 2e^{(2+i)x}, \quad z_1 = (1+i)e^{(2+i)x}.$$

Подставляя $k_2=2-i$ в систему (1.14), получим:

$$\begin{cases}(-1+i)\alpha - \quad 2\beta = 0,\\ \quad\quad \alpha + (1+i)\beta = 0.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим $\beta = \frac{-1+i}{2}\alpha$. Взяв $\alpha=2$, получим $\beta=-1+i$. Тогда второе решение системы (1.13) будет иметь вид:

$$y_2=2e^{(2-i)x}, \quad z_2=(-1+i)e^{(2-i)x}.$$

Найдем действительные и мнимые части функций:

$$y_1= 2e^{(2+i)x} = 2e^{2x}(\cos x + i\sin x) = 2e^{2x}\cos x + 2i\, e^{2x}\sin x,$$
$$y_2= 2e^{(2-i)x} = 2e^{2x}(\cos x - i\sin x) = 2e^{2x}\cos x - 2i\, e^{2x}\sin x,$$
$$z_1= (1+i)\, e^{(2+i)x} = (1+i)\, e^{2x}(\cos x + i\sin x)= e^{2x}(\cos x - \sin x)+ie^{2x}(\cos x + \sin x),$$
$$z_2 = (-1+i)e^{(2-i)x} = (-1+i)e^{2x}(\cos x - i\sin x)= -e^{2x}(\cos x - \sin x)+ie^{2x}(\cos x+\sin x).$$

Действительные решения системы имеют вид:

$$\tilde{y}_1 = 2e^{2x}\cos x, \qquad \tilde{z}_1 = e^{2x}(\cos x - \sin x),$$
$$\tilde{y}_2 = 2e^{2x}\sin x, \qquad \tilde{z}_2 = e^{2x}(\cos x + \sin x).$$

Тогда общее решение системы запишется в виде:

$$y= e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x),$$
$$z= e^{2x}(C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)),$$

где $C_1, C_2$ — произвольные постоянные.

Теперь решим задачу Коши. Подставляя в общее решение системы вместо $x, y, z$ их начальные значения $0, -1, 1$, имеем:

$$\begin{cases}-1 = C_1 + 0\cdot C_2,\\ 1 = C_1 + C_2.\end{cases}$$

Отсюда получаем $C_1=-1$, $C_2=2$.

О т в е т: Искомое решение системы имеет вид:

$$y= e^{2x}(-\cos x + 2\sin x), \qquad z= e^{2x}(\cos x + 3\sin x).$$

## 1.4. Упражнения

Найти общие решения для следующих систем дифференциальных уравнений и там, где указано, выделить решения, удовлетворяющие начальным условиям:

**1.4.1** $\begin{cases} x'_t = y + e^t, \\ y'_t = x + 1. \end{cases}$

**1.4.2** $\begin{cases} x'_t = x - 2y - z, \\ y'_t = y - x + z, \\ z'_t = x - z. \end{cases}$

**1.4.3** $\begin{cases} x'_t = -5x - 8y, \\ y'_t = -3x - 3y. \end{cases}$

**1.4.4** $\begin{cases} x'_t = -x - 5y, \\ y'_t = -7x - 3y. \end{cases}$

**1.4.5** $\begin{cases} y'_x = 4y - z, \\ z'_x = y + 2z. \end{cases}$

**1.4.6** $\begin{cases} x'_t = y - 7x, \\ y'_t + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

**1.4.7** $\begin{cases} y'_x = 1 - \dfrac{1}{z}, \\ z'_x = \dfrac{1}{y - x}. \end{cases}$

**1.4.8** $\begin{cases} x'_t = 4x - y, \\ y'_t = x + 2y. \end{cases}$

**1.4.9** $\begin{cases} x'_t = x + 4y, \\ y'_t = x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

**1.4.10** $\begin{cases} x''(t) + 6x + 7y = 0, \\ y''(t) + 3x + 2y = 2t, \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=1,\ x'(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

## 2 Индивидуальные задания

Решить системы дифференциальных уравнений:

**2.1** а) $\begin{cases} y'_x = \dfrac{y}{x}, \\ z'_x = y + z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 3x + 2y, \\ y'_t = x + 2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x - y + z, \\ y'_t = x + 2y - z, \\ z'_t = x - y + 2z; \end{cases}$

**2.2** а) $\begin{cases} x'_t = y + 2e^t, \\ y'_t = x + t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 3y, \\ y'_t = x - 2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 3x - y + z, \\ y'_t = -x + 5y - z, \\ z'_t = x - y + 3z; \end{cases}$

**2.3** а) $\begin{cases} x'_t = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ y'_t = x - 2y - 3e^{-2t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -2x - y, \\ y'_t = -x - 2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x - y - z, \\ y'_t = 12x - 4y - 12z, \\ z'_t = -4x + y + 5z; \end{cases}$

**2.4** а) $\begin{cases} x'_t = -y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ y'_t = x + \mathrm{tg} t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'_x = y - 2z, \\ z'_x = y + 4z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 7x, \\ y'_t = -2x + 6y - 3z, \\ z'_t = -2y + 5z; \end{cases}$

**2.5** а) $\begin{cases} x'_t = 2x - y, \\ y'_t = y - 2x + 18t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 2x + y, \\ y'_t = 3x + 4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x + 2y + z, \\ y'_t = 2x + 2y + z, \\ z'_t = x + y + 3z; \end{cases}$

**2.6** а) $\begin{cases} x'_t = 2y - x, \\ y'_t = 4y - 3x + e^{3t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 2x + y, \\ y'_t = 3y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x - y + 3z, \\ y'_t = x + 2z, \\ z'_t = x - y + z; \end{cases}$

**2.7** а) $\begin{cases} x'_t = 2y - 3x, \\ y'_t = y - 2x + t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 3x - 2y, \\ y'_t = 2x - 2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 3x + 12y - 4z, \\ y'_t = -x - 3y - z, \\ z'_t = -x - 12y + 6z; \end{cases}$

**2.8** а) $\begin{cases} y'_x = y - 2z, \\ z'_x = y + 4z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -y, \\ y'_t = 3x + 4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t - -3x + 4y - 2z, \\ y'_t = x + z, \\ z'_t = 6x - 6y + 5z; \end{cases}$

**2.9** а) $\begin{cases} x'_t = y - \cos t, \\ y'_t = -x + \sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = y + x, \\ y'_t = -8x - 5y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x, \\ y'_t = -2x + 2y - 3z, \\ z'_t = -2y + 3z; \end{cases}$

**2:10** а) $\begin{cases} y'_x = \dfrac{y^2}{z}, \\ z'_x = \dfrac{1}{2}y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 3x - y, \\ y'_t = 2x + y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + 2y - 2z, \\ y'_t = x + 3z, \\ z'_t = x + 3y; \end{cases}$

**2.11** а) $\begin{cases} x'_t = 2y - x + 1, \\ y'_t = 3y - 2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = x - 3y, \\ y'_t = -5x - y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 4x - 2y, \\ y'_t = 8x - 4y - 8z, \\ z'_t = -2x + y + 6z; \end{cases}$

**2.12** а) $\begin{cases} x'_t = 4x - 3y + \sin t, \\ y'_t = 2x - y + 2\cos t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = x + 2y, \\ y'_t = 2x + y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x - 2y - z, \\ y'_t = x + z, \\ z'_t = 6x - 6y + 5z; \end{cases}$

**2.13** а) $\begin{cases} x'_t = 2x + 3y + 5t, \\ y'_t = 3x + 2y + 8e^{t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = x - 2y, \\ y'_t = 3x - 4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = -x + 2z, \\ y'_t = 2x - 3y + 2z, \\ z'_t = -3x + 3y - 6z; \end{cases}$

**2.14** а) $\begin{cases} x'_t = 2x + 4y - 8, \\ y'_t = 3x + 6y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 3x + 2y, \\ y'_t = 4x + y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + 2y + z, \\ y'_t = 3y + z, \\ z'_t = x + 3z; \end{cases}$

**2.15** а) $\begin{cases} x'_t = 2x - 4y, \\ y'_t = x - 3y + 3e^t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -x, \\ y'_t = -2x + 3y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x + z, \\ y'_t = 2y + z, \\ z'_t = 4x + 2y + z; \end{cases}$

**2.16** а) $\begin{cases} x'_t = 4x + y - 36t, \\ y'_t = y - 2x - 2e^t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = x + y, \\ y'_t = -4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x + 3z, \\ y'_t = x + y + 3z, \\ z'_t = x - y; \end{cases}$

**2.17** а) $\begin{cases} x'_t = 5x - 5y + 2e^t, \\ y'_t = x + y + 5e^{-t}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'_x = 2z - y, \\ z'_x = 3y - 2z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 3x + y - z, \\ y'_t = x + y + 3z, \\ z'_t = 3x + y + 3z; \end{cases}$

**2.18** а) $\begin{cases} x'_t = y + e^t, \\ y'_t = x - e^t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = x - y, \\ y'_t = 2x + 4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x + 2y, \\ y'_t = 2x + 2z, \\ z'_t = x + 2y + z; \end{cases}$

**2.19** а) $\begin{cases} y'_x = y + z, \\ z'_x = -10y - z + x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 2x + y, \\ y'_t = 3x + 4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + 2z, \\ y'_t = -2x + 3y + 2 \\ z'_t = 3x - 2y + 2z \end{cases}$

**2.20** а) $\begin{cases} x'_t = x - 3y, \\ y'_t = 3x + y + t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = x + 2y, \\ y'_t = 4x - y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + 3y, \\ y'_t = x + 3y - z, \\ z'_t = -x + 3y + 2z \end{cases}$

**2.21** а) $\begin{cases} x'_t = -x + y, \\ y'_t = x - 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -\dfrac{x}{t}, \\ y'_t = \dfrac{t^2 + x^2}{ty}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 3x - y + z, \\ y'_t = x + y + z, \\ z'_t = 4x - y + 4z; \end{cases}$

**2.22** а) $\begin{cases} x'_t = -6x - 7y, \\ y'_t = 4x + 5y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -x + 2y, \\ y'_t = -2x - 5y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + y + z, \\ y'_t = 2y + z, \\ z'_t = x + 5y + 3z; \end{cases}$

**2.23** а) $\begin{cases} x'_t = x - 2y, \\ y'_t = x + y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -6x - 5y, \\ y'_t = -2x - 5y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + y + z, \\ y'_t = 2x + y, \\ z'_t = 10x + 3y + 2z; \end{cases}$

**2.24** а) $\begin{cases} x'_t = 3x + 5y, \\ y'_t = -x + y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -y, \\ y'_t = x - 2y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 4x + 3y + 5z, \\ y'_t = x + 3y + 3z, \\ z'_t = x + 6z; \end{cases}$

**2.25** а) $\begin{cases} x'_t = -x + 2y, \\ y'_t = -2x - 5y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = y - 5\cos t, \\ y'_t = 2x + y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x + y + 2z, \\ y'_t = x + 3y + 5z, \\ z'_t = y + 4z; \end{cases}$

**2.26** а) $\begin{cases} x'_t = -2x - 5y, \\ y'_t = -3x - 4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = -2x + y, \\ y'_t = -x - 4y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x - 3z, \\ y'_t = 2x + 2y + 6z, \\ z'_t = 4x + 2y - 3z; \end{cases}$

**2.27** а) $\begin{cases} x'_t = -2x + y, \\ y'_t = -x - 4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 2x - y, \\ y'_t = -x + 2y + 5e^t \sin t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + 2y - z, \\ y'_t = 2x + 5y, \\ z'_t = x + 4y + 3z; \end{cases}$

**2.28** а) $\begin{cases} x'_t = x + y, \\ y'_t = 2x + 4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 2x + y + 2e^t, \\ y'_t = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x - y, \\ y'_t = 6x - 6y + z, \\ z'_t = 4x - y - 2z; \end{cases}$

**2.29** а) $\begin{cases} x'_t = x + y, \\ y'_t = -5x + 3y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'_x = z - y, \\ z'_x = y + 4z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = 2x + 4y - z, \\ y'_t = 2x - y - 2z, \\ z'_t = 2y + z; \end{cases}$

**2.30** а) $\begin{cases} x'_t = 2x + 3y, \\ y'_t = 3x + 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_t = 2x + 4y - 8, \\ y'_t = 3x + 6y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_t = x + 2z, \\ y'_t = x - y + z, \\ z'_t = -8x + y - 7z. \end{cases}$