ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

РЯДЫ

Могилев 2018

УДК 571.52
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» января 2018 г., протокол № 5

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель Т. И. Червякова

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Ряды» предназначены для студентов, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам, дневной и заочной форм обучения. Изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения примеров, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная вёрстка Е. С. Лустенкова

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 105 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилёв.

Содержание

1 Числовые ряды и их признаки сходимости

1.1 Теоретическая часть

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1)$$

где $u_n \in \mathbb{R}$, называется ***числовым рядом***. Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются ***членами ряда***, число u_n – ***общим членом ряда***.

Суммы $S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \ldots,\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,\ \ldots$ называются ***частичными суммами***, а S_n – n-й ***частичной суммой ряда***.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (1) называется ***сходящимся***, а S – его ***суммой***. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд (1) называется ***расходящимся***.

Сумма $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$ называется n-м ***остатком ряда***.

Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = 0$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

К достаточным признакам сходимости относят следующие.

Признак сравнения. Если $0 < u_n \le v_n$ (для всех n или начиная с некоторого номера n), то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Предельный признак сравнения. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A\left(A = \mathrm{const},\ A > 0\right)$, то два ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ – расходится.

Признак Коши. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ – расходится.

Два последних признака не дают ответа о сходимости ряда в тех случаях, когда $l = 1$.

Интегральный признак Коши. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ таковы, что $u_n = f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, где $f(x)$ – непрерывная положительная монотонно убывающая на $[1;+\infty)$ функция, то ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

В качестве рядов для сравнения применяют следующие «эталонные» ряды:

1) ***геометрический ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n - \begin{cases} \text{сходится при } |q|<1; \\ \text{расходится при } |q|\geq 1; \end{cases}$$

2) ***обобщённый гармонический ряд*** или ***ряд Дирихле***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \begin{cases} \text{сходится при } \alpha>1; \\ \text{расходится при } \alpha\leq 1. \end{cases}$$

1.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Установить сходимость этого ряда и найти его сумму.

Решение

Запишем n-ю частичную сумму ряда и преобразуем её:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то данный ряд сходится и его сумма $S=1$.

Пример 2 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$.

Решение

Применим следствие из необходимого признака: если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1}=\frac{1}{5}\neq 0.$$

Значит, ряд расходится.

Пример 3 – Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,3^n}$.

Решение

Сравним n-й член ряда $u_n=\frac{1}{n\,3^n}$ с n-м членом ряда $v_n=\frac{1}{3^n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ является геометрическим рядом, у которого $q=\frac{1}{3}<1$, а значит, он сходится. Так как $\frac{1}{n\,3^n}<\frac{1}{3^n}\ (\forall n\geq 2)$, то по признаку сравнения данный ряд сходится.

Пример 4 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

Решение

Сравним n-й член ряда $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ с n-м членом гармонического ряда (расходящегося) $v_n=\frac{1}{n}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}>\frac{1}{n}\ (\forall n\geq 2)$, то по признаку сравнения данный ряд расходится.

Пример 5 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$.

Решение

Применим признак Даламбера.

$$u_n=\frac{n^2}{2^{n-1}};\qquad u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 6 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{6n-1}\right)^n$.

Решение

Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{6n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{6n-1}=\frac{1}{6}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 7 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\left(n^2+1\right)^2}$.

Решение

Пусть функция $f(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям интегрального признака Коши.

Найдём несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^b=-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится, а значит, данный ряд также сходится.

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Написать простейшую формулу n-го члена ряда:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$;

б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots$;

в) $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{4}+\frac{5}{8}+\ldots$;

г) $\frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{6}{9}+\frac{24}{16}+\ldots$.

2 Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{4}$.

3 Исследовать ряды на сходимость, применяя необходимый признак или признаки сравнения:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+1}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$;

м) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

н) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

о) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$;

п) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

р) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$;

с) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

т) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

у) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$;

ф) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(5\sqrt[3]{n}-1\right)}$;

х) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

ц) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$.

4 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(3n-1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\,3^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}$.

5 Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+\sqrt{n}+5}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{3}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{n}{3}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

6 Исследовать ряды на сходимость, применяя интегральный признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

7 Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+1}{4n^3-2}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-6n+13}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4+n^2}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(n+3)}{5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1.4 Домашнее задание

1 Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$ и найти его сумму.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

2 Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2+4\right)^2}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^{2n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

2 Знакопеременные ряды

2.1 Теоретическая часть

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$, составленный из абсолютных величин членов ряда, сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***; если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится – ***условно сходящимся***.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, но из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ не следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Ряд вида $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$ называется ***знакочередующимся***.

Признак Лейбница. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ таковы, что $u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится, причём его сумма $0<S\le u_1$.

Следствие. Остаток $r_n=(-1)^n\left(u_{n+1}-u_{n+2}+\ldots\right)$ всегда удовлетворяет условию $\left|r_n\right|\le u_{n+1}$.

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Решение

Так как модули членов данного знакочередующегося ряда монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=0$, то, согласно признаку Лейбница, ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. Сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=2\neq 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ расходится, следовательно, исходный ряд сходится условно.

Пример 2 – Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$-3+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{3}{5^2}+...+\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right)+\dots.$$

Решение

Данный ряд не является знакочередующимся, следовательно, нельзя применить признак Лейбница. Рассмотрим ряд из модулей его членов:

$$3+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{5^2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|(-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right|.$$

Сравним этот ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^2}$ (ряд Дирихле при $\alpha=2>1$).

$$\frac{1}{n^2}\left|(-1)^n - 2\sin\frac{\pi n}{2}\right| \le \frac{3}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, ряд из модулей сходится, а значит, исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Пример 3 – Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{3}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

Решение

Составим ряд из модулей членов исходного ряда:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots.$$

Этот ряд сходится, как ряд Дирихле (при $\alpha = 2 > 1$). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 4 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{3n^2 + n}$.

Решение

Имеем знакочередующийся ряд. Второе условие признака Лейбница здесь не выполняется:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 + n} = \frac{1}{3} \ne 0.$$

Так как необходимое условие сходимости ряда не выполняется, то данный ряд расходится.

Пример 5 – Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 2^n}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение

Данный ряд – знакочередующийся и сходящийся, поэтому величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит по модулю первого отброшенного члена (по следствию из признака Лейбница).

Нужное число членов n найдём путём подбора из неравенства $\frac{1}{n^2 2^n} < 10^{-3}$. При $n = 6$ неравенство выполняется. Значит, если отбросить в данном ряде все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена. Сумма ряда при этом будет

$$S \approx S_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800} = 0{,}449.$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n\, 2^{-n}$;

в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 - 9}$;

г) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n+5}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2 + 1}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n - \ln n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{8n}{7^n \cdot (2n-3)}$;

м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$;

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10n+1}$;

о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2 Сколько первых членов ряда достаточно взять, чтобы сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую, чем 10^{-6}:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Ответ: а) $n = 10^3$; б) $n = 10^6$.

2.4 Домашнее задание

1 Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n \ln^2 n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)3^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+2}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{10}}{e^n}$;

и) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln n}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$.

2 Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(0,7)^n}{(n-1)!}$, ограничившись его первыми тремя членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений.

Ответ: $S=0,38$; $\varepsilon=0,04$.

3 Функциональные и степенные ряды

3.1 Теоретическая часть

Пусть функции $u_i(x)\,(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$ определены в области D_x. Выражение вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называется ***функциональным рядом***.

Функциональный ряд называется ***сходящимся в точке*** $x=x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Множество значений x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда***. Обозначим её D_s, причём $D_s\subset D_x$.

Если $S(x)$ – сумма ряда, а $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ – n-я частичная сумма, то его n-й остаток будет

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots\ .$$

В области сходимости ряда $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, а $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Функциональный ряд называется ***мажорируемым*** в области D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\alpha_n > 0\right)$ такой, что $\forall x \in D$ справедливы неравенства $\left|u_k\left(x\right)\right| \le \alpha_k \left(k = 1, 2, \ldots\right)$.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые ***коэффициентами ряда***, x_0 – фиксированное число.

При $x_0 = 0$ имеем ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Теорема Абеля.

1 Если степенной ряд сходится при некотором значении $x = x_1 \ne 0$, то он абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_1|$.

2 Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_2$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_2|$.

Неотрицательное число R такое, что при всех $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при всех $|x| > R$ – расходится, называется ***радиусом сходимости ряда***.

Интервал $\left(-R; R\right)$ называется ***интервалом сходимости ряда***.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad \text{или} \qquad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

если указанные пределы существуют.

3.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение

Данный ряд является суммой геометрической прогрессии с $q = \ln x$. Такой ряд сходится, если $|q| = |\ln x| < 1$, т. е. при $-1 < \ln x < 1$. Поэтому областью сходимости исследуемого ряда является интервал $D_s : \frac{1}{e} < x < e$. Так как $D_x : x > 0$, то $D_s \subset D_x$.

Пример 2 – Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n \sqrt{n}}$.

Решение

$$a_n = \frac{2^n}{3^n\sqrt{n}}; \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

Найдём радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n 3^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^{n+1}3^n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Степенной ряд сходится в интервале $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

При $x = -\frac{3}{2}$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$. По признаку Лейбница он сходится.

При $x = \frac{3}{2}$ имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Данный ряд расходится, как ряд Дирихле (при $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Таким образом, область сходимости есть промежуток $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Пример 3 – Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение

Найдём радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Таким образом, ряд сходится на всей числовой прямой.

3.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\,2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{3^n\sqrt{(n+1)^3}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$;

е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3-1}}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{2^{n-1}\,3^n}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

м) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$;

н) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$;

о) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

Ответ: а) $-2\le x<2$; б) $-2<x<2$; в) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$; г) $-\frac{3}{4}\le x\le\frac{3}{4}$; д) $-6\le x<2$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $-6<x<6$; з) $-2<x<2$; и) $-\frac{\sqrt{3}}{5}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{5}$; к) $-2<x<2$; л) $-1<x<1$; м) $3<x<5$; н) $0<x<4$; о) $1\le x\le 3$.

3.4 Домашнее задание

1 Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{7^{n-1}x^n}{5^n\sqrt{n^2-1}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{5^n\sqrt{n^3-0,5}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^{n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\,4^n}$;

д) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,24^{n+1}}$.

Ответ: а) $-\frac{5}{7}\le x<\frac{5}{7}$; б) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{11}{2}$; в) $-\frac{1}{10}<x<\frac{1}{10}$; г) $-7<x<-3$; д) $1\le x<5$.

4 Разложение функций в степенные ряды

4.1 Теоретическая часть

Если функция $y=f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

с областью сходимости D_s, т. е. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \ \forall x \in D_s$, то этот ряд является её ***рядом Тейлора*** в точке x_0:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Частный случай ряда Тейлора при $x_0=0$ называется ***рядом Маклорена*** и имеет вид:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой δ-окрестности точки x_0 производные всех порядков, причём $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \ (M=const) \ \forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in(x_0-\delta;\, x_0+\delta)$, то функция $f(x)$ в этой окрестности разложима в ряд Тейлора.

При разложении многих функций в степенные ряды часто применяются основные (табличные) разложения:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \quad \forall x\in(-\infty;+\infty); \tag{2}$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \quad \forall x\in(-\infty;+\infty); \tag{3}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \quad \forall x\in(-\infty;+\infty); \tag{4}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad \forall x\in(-1;1); \tag{5}$$

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=$$

$$=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots \quad \forall x\in(-1;1); \tag{6}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad \forall x\in(-1;1]; \tag{7}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \forall x \in [-1; 1]. \qquad (8)$$

Разложения (2)–(8) позволяют существенно упростить процесс разложения функций в ряд Тейлора (Маклорена).

4.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Разложить по степеням разности $(x-1)$ функцию

$$y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2.$$

Решение

Воспользуемся формулой Тейлора при $x_0 = 1$. Вначале найдём следующие значения:

$$y(1) = 2;$$

$$y'(1) = \left(4x^3 - 6x + 2\right)\Big|_{x=1} = 0;$$

$$y''(1) = \left(12x^2 - 6\right)\Big|_{x=1} = 6;$$

$$y'''(1) = 24x\big|_{x=1} = 24;$$

$$y^{\mathrm{IV}}(1) = 24;$$

$$y^{\mathrm{V}}(1) = 0.$$

Таким образом, получаем

$$x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 =$$

$$= 2 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

Пример 2 – Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \cos x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

$$f(x)=\cos x;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right);\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f''(x)=-\cos x=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f'''(x)=\sin x=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=\cos x=\cos\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad f^{\mathrm{IV}}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\quad n=0,1,\ldots.$$

Таким образом, получаем

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n+\ldots\right).$$

Найдем область сходимости полученного ряда.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Значит, ряд сходится $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Пример 3 – Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x)=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$$

Решение

Разложим функцию на сумму простейших дробей.

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$$

Так как

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \left(|x|<1\right),$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n \quad \left(|2x|<1\right),$$

то

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2^{n+1}\right)x^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ сходится при $|x|<1$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$ – при $|x|<\frac{1}{2}$, то полученный ряд сходится к данной функции при $|x|<\frac{1}{2}$.

Пример 4 – Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin\frac{2x^4}{3}$.

Решение

Применим разложение (3), заменив x на $\frac{2x^4}{3}$. Получим

$$\sin\frac{2x^4}{3}=\frac{2x^4}{3}-\frac{2^3x^{12}}{3^3\cdot 3!}+\frac{2^5x^{20}}{3^5\cdot 5!}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{8n-4}}{3^{2n-1}(2n-1)!}.$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Разложить многочлен $f(x)=x^5-4x^4+2x^3+2x+1$ в ряд по степеням $(x+1)$.

2 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\frac{1}{x+1}$, используя ряд Маклорена.

3 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)$ и найти область сходимости полученного ряда:

а) $f(x)=e^{-x^2}$;

б) $f(x)=x\cos 2x$;

в) $f(x)=\cos^2 x$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

д) $f(x)=\ln(1-3x)$;

е) $f(x)=x\sin 2x$;

ж) $f(x)=x^3\operatorname{arctg} x^2$;

з) $f(x)=\sin^2 3x$.

4 Разложить функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора. Найти область сходимости полученного ряда к этой функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x_0=-2$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}, \quad x_0=1$;

в) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}, \quad x_0=1$.

Ответ: а) $-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{2^n}, -4<x<0$; б) $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}(x-1)^n, -1<x<3$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}, 0\le x\le 2$.

4.4 Домашнее задание

1 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x_0=3$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad x_0=2$.

2 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена:

а) $f(x)=\cos 5x$;

б) $f(x)=x^3\operatorname{arctg} x$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$.

5 Степенные ряды в приближённых вычислениях

5.1 Теоретическая часть

Приближённое вычисление логарифмов.

Для приближённого вычисления логарифмов удобна формула

$$\ln(N+1)=\ln N+\frac{2}{2N+1}+\frac{2}{3(2N+1)^3}+\frac{2}{5(2N+1)^5}+\ldots, \tag{9}$$

где N – натуральное число.

Приближённое вычисление корней.

Вычисление корней производится с помощью биномиального ряда:

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots(|x|<1). \tag{10}$$

Вычисление интегралов.

Так как степенные ряды сходятся равномерно на любом отрезке, лежащем внутри их интервалов сходимости, то с помощью разложений функций в степенные ряды можно находить неопределённые интегралы в виде степенных рядов и приближённо вычислять соответствующие определённые интегралы.

Приближённое решение дифференциальных уравнений.

В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение не удаётся, его решение удобно искать в виде степенного ряда. При решении задачи Коши вида

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{11}$$

используется ряд Тейлора $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а остальные производные находят путём последовательного дифференцирования уравнения (11) и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

5.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти приближённое значение $\ln 2$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$.

Решение

Полагая в формуле (9) $N=1$, имеем

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\ldots\right).$$

За приближённое значение $\ln 2$ принимаем сумму первых пяти членов разложения. Погрешность вычисления будет равна величине отброшенного остаточного члена:

$$r_n = 2\left(\frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \frac{1}{13\cdot 3^{13}} + \ldots\right) < \frac{2}{11\cdot 3^{11}}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{11\cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{44\cdot 3^9} < 0,000002.$$

Таким образом, имеем

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right) \approx$$

$$\approx 0,666667 + 0,024691 + 0,001646 + 0,000131 + 0,000011 = 0,693146;$$

$$\ln 2 = 0,69315 \pm 0,00001.$$

Пример 2 – Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение

$$\sqrt[3]{130} = \left(5^3 + 5\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1 + \frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5 + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!\cdot 5^3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!\cdot 5^5} + \ldots =$$

$$= 5 + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{3^2\cdot 5^3} + \frac{1}{3^4\cdot 5^4} - \ldots.$$

Начиная с четвёртого члена, отбрасываем все остальные члены, так как $\frac{1}{3^4\cdot 5^4} < 0,0001$. Поэтому

$$\sqrt[3]{130} = 5 + 0,0667 - 0,0009 = 5,0658.$$

Пример 3 – Вычислить $\int_0^1 \sin x^2\, dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение

Применим формулу (3), заменив в ней x на x^2:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots.$$

Данный ряд сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно почленно интегрировать. Следовательно,

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \ldots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} \approx 0,3333 - 0,0381 = 0,295.$$

Все члены разложения, начиная с третьего, отброшены, так как они меньше $\varepsilon = 10^{-3}$.

Пример 4 – Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, если $y(1) = 1$.

Решение

Из условия следует, что

$$y'(1) = 1 + 1 = 2.$$

Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy'; \quad y''(1) = 6;$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''; \quad y'''(1) = 22;$$

$$y^{\mathrm{IV}} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy'''; \quad y^{\mathrm{IV}}(1) = 116$$

и т. д.

Таким образом, получаем

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{6(x-1)^2}{2} + \frac{22(x-1)^3}{6} + \frac{116(x-1)^4}{24} + \ldots =$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \ldots.$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

1 С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}001$:

а) $\sqrt[3]{e}$;
б) $\sqrt[3]{10}$;
в) $\cos 10^\circ$;
г) $\sqrt[10]{1027}$;
д) $\ln\dfrac{3}{2}$.

Ответ: а) $1{,}396$; б) $2{,}154$; в) $0{,}985$; г) $2{,}001$; д) $0{,}406$.

2 Вычислить определённые интегралы с точностью $\varepsilon = 0{,}001$:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}\,dx$;
б) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$;
в) $\int\limits_1^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$;
г) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$.

Ответ: а) $0{,}508$; б) $0{,}764$; в) $4{,}855$; г) $0{,}245$.

3 Записать первые пять ненулевых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения:

а) $y' = e^y + xy$, $y(0) = 0$;
б) $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, $y(1) = 1$;
в) $y'' = x^2 y - y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.4 Домашнее задание

1 С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}001$:

а) $\sqrt[3]{70}$;
б) $\ln 5$;
в) $\sqrt[6]{738}$;
г) $\cos 2^\circ$.

Ответ: а) $4{,}121$; б) $1{,}609$; в) $3{,}006$; г) $0{,}999$.

2 Вычислить $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{\sin 2x}{x}\,dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Ответ: $0{,}946$.

3 Найти первых три ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 - y^3$, если $y(1) = 1$.

6 Ряды Фурье

6.1 Теоретическая часть

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$

называется ***рядом Фурье*** функции $f(x)$ с периодом $T=2\pi$.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T=2\pi$, кусочно-монотонная и ограниченная на $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности. В точках разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции слева и справа от точки разрыва.

Если $f(x)$ – чётная функция, то разложение принимает вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=0.$$

Если $f(x)$ – нечётная функция, то разложение принимает вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Для функции с любым периодом $T=2l$ разложение в ряд Фурье и формулы для коэффициентов Фурье будут следующими:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right);$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Если $f(x)$ – чётная функция, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l};$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=0.$$

Если $f(x)$ – нечётная функция, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l};$$

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

6.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\pi\le x<0;\\ x & \text{при} \quad 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Решение

Так как функция является кусочно-монотонной и ограниченной, то она разлагается в ряд Фурье. Найдём коэффициенты ряда.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx\,dx, \quad v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin nx\,dx, \quad v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Таким образом, получаем

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right).$$

Этот ряд сходится к заданной функции с $T = 2\pi$ при всех $x \neq (2n-1)\pi$. В точках $x = (2n-1)\pi$ сумма ряда $S = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$.

График функции изображён на рисунке 1.

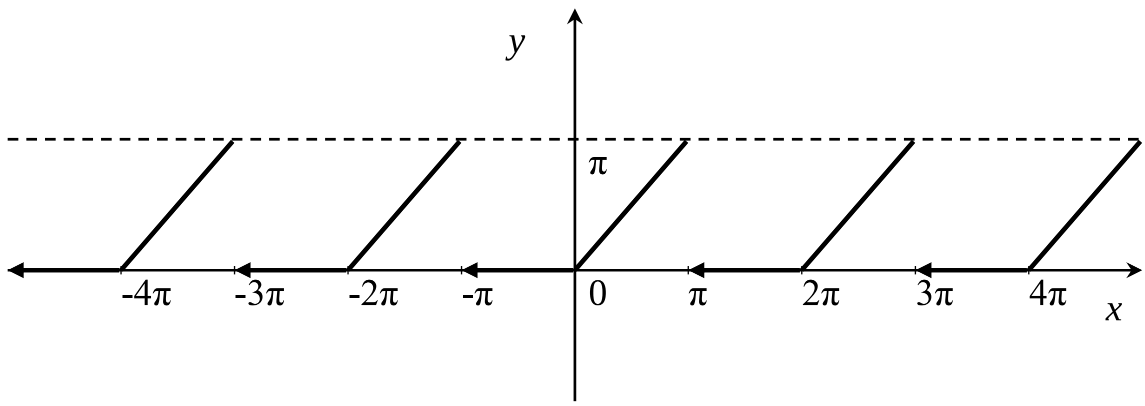

Рисунок 1

Пример 2 – Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, где $-\pi < x \le \pi$.

Решение

Период $T = 2\pi$, функция чётная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx\,dx, \quad v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при } n \text{ четном}; \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} \quad \text{при } n \text{ нечетном}; \end{cases}$$

$$b_n = 0.$$

Таким образом, получаем

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \ldots\right).$$

Пример 3 – Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \quad \text{при} -\pi < x < 0; \\ 0 \quad \text{при } x = \pi. \end{cases}$$

Решение

Функция нечётная, разрывная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

$$a_0 = a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \frac{x}{2}, \quad du = \frac{1}{2}dx \\ dv = \sin nx\,dx, \quad v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right] =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}\cos nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi+\frac{1}{2n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Таким образом, получаем

$$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx+\ldots.$$

Пример 4 – Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -2<x<0;\\ 2 & \text{при } 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение

Функция имеет период $T=4$, разрывная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\,dx=-\frac{1}{2}x\Big|_{-2}^{0}+x\Big|_0^2=-\frac{1}{2}(0+2)+2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^{-2}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^{2}=\frac{2}{\pi n}(\sin\pi n-\sin 0)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^{2}=\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n}\left((-1)^n-1\right).$$

Таким образом, получаем

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

График функции изображён на рисунке 2.

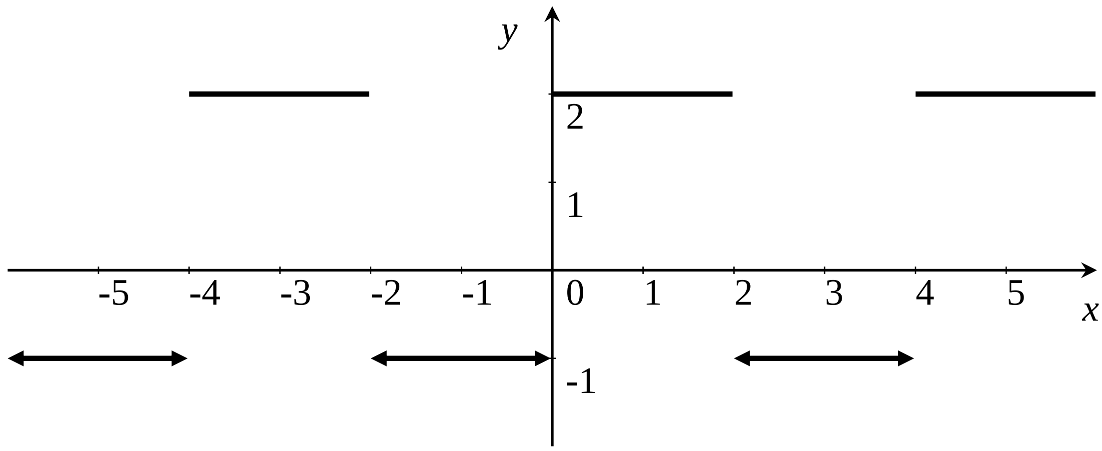

Рисунок 2

6.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$.

а) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\pi\le x<0;\\ x-1 & \text{при} \quad 0\le x<\pi;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{при} \quad -\pi\le x<0;\\ 0 & \text{при} \quad 0< x\le\pi;\end{cases}$

в) $f(x)=(x-1)^2$;

г) $f(x)=2-3x$;

д) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{при} \quad -\pi\le x\le 0;\\ \dfrac{1}{4}(\pi x-1) & \text{при} \quad 0< x\le\pi.\end{cases}$

Ответы:

а) $f(x)=\dfrac{\pi-2}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}+\dfrac{\pi-2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nx)}{2n}$;

б) $f(x)=\dfrac{3-\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}+\dfrac{2(\pi-3)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nx)}{2n}$;

в) $f(x)=\dfrac{\pi^2-3\pi+3}{3}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2-\pi}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2nx)}{(2n)^2}$;

г) $f(x)=2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$;

д) $f(x)=\dfrac{\pi^2}{16}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos((2n-1)x)}{2(2n-1)^2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{\pi}\right)\dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}+\dfrac{\pi\sin(2nx)}{8n}\right).$

2 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $2l$.

а) $f(x)=|x|$ на $(-1;1)$;

б) $f(x)=2x$ на $(-1;1)$;

в) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -3<x\le 0;\\ x & \text{при} \quad 0<x\le 3;\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при} \quad -4<x<0;\\ 1 & \text{при} \quad x=0;\\ 2 & \text{при} \quad 0<x<4;\end{cases}$

д) $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$ на полупериоде $[0;2]$.

Ответы: а) $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$;

б) $f(x)=1-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n\pi x)}{n}$;

в) $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}-\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{3}$;

г) $f(x)=2-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{4}}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\dfrac{n\pi x}{4}}{n}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{4}}{2n-1}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}$.

6.4 Домашнее задание

1 Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$.

а) $f(x)=\pi+x$;

б) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\pi\le x<0;\\ 4-2x & \text{при} \quad 0\le x\le \pi.\end{cases}$

Ответы: а) $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$;

б) $f(x)=\dfrac{4-\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left((2n-1)x\right)}{(2n-1)^2}+\dfrac{2(4-\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2n-1)x\right)}{2n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nx)}{2n}$.

2 Разложить функцию $f(x)=4x-3$ в ряд Фурье на промежутке $(-5;5)$.

Ответ: $f(x)=-3+\dfrac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{\pi nx}{5}$.

Список литературы

1 Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Москва : ОНИКС 21 век; Мир и образование, 2003.

2 Высшая математика. Общий курс : учебник / А. И. Яблонский [и др.] ; под общ. ред. С. А. Самаля. – 2-е изд., перераб. – Минск : Вышэйшая школа, 2000.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2009.

4 Индивидуальные задания по высшей математике. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / Под ред. А. П. Рябушко. – 2-е изд., перераб. – Минск : Вышэйшая школа, 2004.

5 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2009.

6 Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Федина – 6-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2007.

7 Сборник задач по курсу высшей математики : учебное пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – 3-е изд., перераб. – Москва : Высшая школа, 1973.

8 Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие для втузов. Ч. 2 : Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986.

9 **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2005.