ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты индивидуальных заданий для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Могилёв 2011

УДК 517
ББК 22.1я 73
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» марта 2011 г., протокол № 10

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель Д. В. Роголев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. В. Марченко

В методических указаниях изложены варианты индивидуальных заданий по теме «Функции нескольких переменных» и даны решения типовых задач с необходимыми теоретическими сведениями. Предназначаются для студентов дневной и заочной форм обучения всех специальностей.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная вёрстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 21.09.2011. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1,4 . Уч.-изд. л. 1,3 . Тираж 156 экз. Заказ № 632.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилёв, пр. Мира, 43

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский
университет», 2011

1 Решение типового варианта

1.1 Найти область определения функции $z=\sqrt{16-x^2-y^2}-\ln(x-y)$.

Решение

Областью определения данной функции будет являться следующее множество точек плоскости:

$$D(z)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 16-x^2-y^2\geq 0,\, x-y>0\right\}.$$

Рассмотрим первое неравенство. Запишем его в виде $x^2+y^2\leq 16$. Это неравенство определяет область, лежащую внутри окружности радиуса 4 и центром в начале координат. Так как неравенство не строгое, то сама окружность принадлежит этой области. Рассмотрим второе неравенство. Запишем его в виде $y<x$. Это неравенство определяет область, лежащую ниже прямой $y=x$. Так как неравенство строгое, то сама прямая не принадлежит этой области. Пересечение двух полученных областей и будет задавать область определения рассматриваемой функции z (рисунок 1).

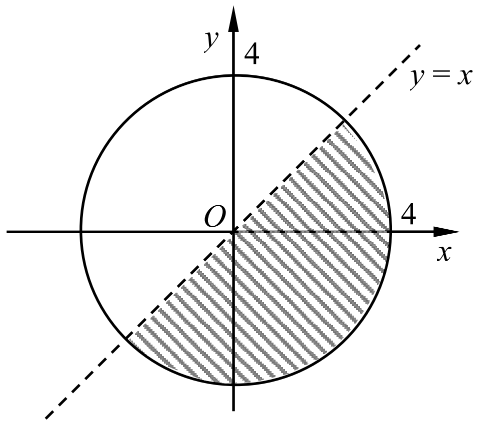

Рисунок 1

1.2 Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\cos\left(x^2-y^2\right)$.

Решение

Частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ будем находить как производную функции $z=z(x,y)$ по переменной x в предположении, что y является постоянной. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\cos\left(x^2-y^2\right)\right)_x'=-\sin\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)_x'=-2x\sin\left(x^2-y^2\right).$$

Аналогично находим *частную производную* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\cos\left(x^2-y^2\right)\right)_y'=-\sin\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)_y'=2y\sin\left(x^2-y^2\right).$$

Полный дифференциал dz функции $z=z\left(x,y\right)$ находится по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \tag{1}$$

Подставляя в (1) найденные частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, получаем

$$dz=-2x\sin\left(x^2-y^2\right)dx+2y\sin\left(x^2-y^2\right)dy.$$

1.3 Найти производные:

1) сложной функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, где $\begin{cases}x=\sin^2 t,\\ y=\cos^2 t;\end{cases}$

2) функции $x^2y+y^2z+xz^2-5=0$, заданной неявно.

Решение

1 Если функция нескольких переменных имеет вид $z=z\left(x,y\right)$, где $\begin{cases}x=x\left(t\right),\\ y=y\left(t\right),\end{cases}$ то производная $\dfrac{dz}{dt}$ находится по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t=\sin 2t,\quad \frac{dy}{dt}=2\cos t\left(-\sin t\right)=-\sin 2t.$$

Применяя формулу (2), получим

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\sin 2t+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\left(-\sin 2t\right)=-\frac{\left(x+y\right)\sin 2t}{x^2+y^2}=$$

$$=-\frac{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\sin 2t}{\sin^4 t+\cos^4 t}=-\frac{\sin 2t}{\sin^4 t+\cos^4 t}.$$

2 Если функция двух переменных $z=f\left(x,y\right)$ задана в неявном виде уравнением $F\left(x,y,z\right)=0$, причём $F'_z\left(x,y,z\right)\neq 0$, то частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ находятся по формулам:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x\left(x,y,z\right)}{F'_z\left(x,y,z\right)},\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y\left(x,y,z\right)}{F'_z\left(x,y,z\right)}.\end{cases}\qquad (3)$$

Имеем

$$F'_x\left(x,y,z\right)=2xy+z^2,\quad F'_y\left(x,y,z\right)=x^2+2yz,\quad F'_z\left(x,y,z\right)=y^2+2xz.$$

Применяя формулы (3), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z^2+2xy}{y^2+2xz},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2+2yz}{y^2+2xz}.$$

1.4 Найти дифференциал второго порядка для функции $z=\frac{xy}{x-y}$.

Решение

Дифференциалом второго порядка функции $z=f\left(x,y\right)$ называют дифференциал от дифференциала первого порядка и вычисляют по формуле

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,\qquad (4)$$

где $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – *частные производные второго порядка*.

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(x-y)-xy}{(x-y)^2}=-\frac{y^2}{(x-y)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(x-y)+xy}{(x-y)^2}=\frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Частные производные второго порядка определяются как частные производные от частных производных первого порядка. Имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)'_x=\frac{y^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2y^2}{(x-y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)'_y=-\frac{2y\cdot(x-y)^2+y^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)'_y=\frac{x^2\cdot 2(x-y)}{(x-y)^4}=\frac{2x^2}{(x-y)^3}.$$

Применяя формулы (4), получим

$$d^2z=\frac{2y^2}{(x-y)^3}dx^2-\frac{4xy}{(x-y)^3}dxdy+\frac{2x^2}{(x-y)^3}dy^2=\frac{2(y^2dx^2-2xydxdy+x^2dy^2)}{(x-y)^3}.$$

1.5 Найти производную функции $u=x^2-\operatorname{arcctg}(y+z)$ в точке $A(2;1;1)$ по направлению к точке $B(2;4;-3)$. Найти также наибольшее из значений производных по всем направлениям в точке $A(2;1;1)$.

Решение

Производная функции $u=u(x,y,z)$ *по направлению* $\vec{\ell}$ находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (5)$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы направления $\vec{\ell}$.

Найдём значения направляющих косинусов направления $\vec{\ell}$. В нашем случае $\vec{\ell}=\overrightarrow{AB}=(0;\ 3;-4)$. Так как $|\vec{\ell}|=5$, то

$$\cos\alpha=\frac{\ell_x}{|\vec{\ell}|}=0,\quad \cos\beta=\frac{\ell_y}{|\vec{\ell}|}=\frac{3}{5},\quad \cos\gamma=\frac{\ell_z}{|\vec{\ell}|}=-\frac{4}{5}.$$

Далее найдём частные производные и их значения в точке A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(y+z\right)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+\left(y+z\right)^2};$$

$$\frac{\partial u\left(2;1;1\right)}{\partial x}=4,\quad \frac{\partial u\left(2;1;1\right)}{\partial y}=\frac{1}{5},\quad \frac{\partial u\left(2;1;1\right)}{\partial z}=\frac{1}{5}.$$

Таким образом, подставляя в (5) найденные значения, имеем

$$\frac{\partial u\left(2;1;1\right)}{\partial \ell}=4\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{25}.$$

Градиентом функции $u=u\left(x,y,z\right)$ называется вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{6}$$

Этот вектор указывает на направление максимального роста функции в заданной точке, причём $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\right|$ есть наибольшее значение производной по всем направлениям в указанной точке. Следовательно,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\left(2;1;1\right)=4\vec{i}+\frac{1}{5}\vec{j}+\frac{1}{5}\vec{k},\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u\left(2;1;1\right)\right|=\frac{\sqrt{402}}{5}.$$

Таким образом, $\max\limits_{\{\ell\}}\dfrac{\partial u}{\partial \ell}=\dfrac{\sqrt{402}}{5}$.

1.6 Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке $P_0\left(1;2;3\right)$.

Решение

Поверхность задана неявно уравнением вида $F\left(x,y,z\right)=0$. В этом случае уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $P_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ имеют вид:

$$F'_x\left(x_0;y_0;z_0\right)\left(x-x_0\right)+F'_y\left(x_0;y_0;z_0\right)\left(y-y_0\right)+F'_z\left(x_0;y_0;z_0\right)\left(z-z_0\right)=0, \tag{7}$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x\left(x_0;y_0;z_0\right)}=\frac{y-y_0}{F'_y\left(x_0;y_0;z_0\right)}=\frac{z-z_0}{F'_z\left(x_0;y_0;z_0\right)} \tag{8}$$

соответственно.

Обозначив через $F\left(x,y,z\right)$ левую часть уравнения поверхности, найдём частные производные и их значения в точке P_0:

$$F'_x(x,y,z)=2x+y-2z, \qquad F'_x(1;2;3)=-2;$$

$$F'_y(x,y,z)=4y+x+z, \qquad F'_y(1;2;3)=12;$$

$$F'_z(x,y,z)=-6z+y-2x, \qquad F'_y(1;2;3)=-18.$$

Далее по формулам (7) и (8) имеем

$$-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0,$$

$x-6y+9z-16=0$ – уравнение касательной плоскости;

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18},$$

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z-3}{9}$ – уравнение нормали.

1.7 Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+6xy+y^2-3x-6y$.

Решение

Исследование функции на экстремум начинают с определения критических точек функции. Для этого применяют *необходимые условия экстремума*: если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ достигает экстремума в точке $(x_0;y_0)$, то её частные производные первого порядка в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}=0. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $(x_0;y_0)$ – критическая точка функции $z=f(x,y)$. Обозначим

$$A=\frac{\partial^2 z(x_0;y_0)}{\partial x^2}, \quad B=\frac{\partial^2 z(x_0;y_0)}{\partial x\partial y}, \quad C=\frac{\partial^2 z(x_0;y_0)}{\partial y^2}.$$

Составляем дискриминант $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2$. Тогда справедливы следующие *достаточные условия экстремума*:

– если $\Delta<0$, то $(x_0;y_0)$ не является точкой экстремума;

– если $\Delta>0$ и $A<0$, то $(x_0;y_0)$ является точкой максимума;

– если $\Delta>0$ и $A>0$, то $(x_0;y_0)$ является точкой минимума;

– если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 2y - 6.$$

Применяя необходимые условия (9), находим критические точки:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y - 3 = 0, \\ 6x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 2y - 1 = 0, \\ 3x + y - 3 = 0, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ y = 3 - 3x, \end{cases}$$

$x^2 - 6x + 5 = 0$, $D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 16$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, тогда $y_1 = -12$, $y_2 = 0$.

Получили две критические точки: $M_1\left(5;-12\right)$, $M_2\left(1;0\right)$.

Проверим достаточные условия экстремума. Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Вычисляем значения частных производных второго порядка и составляем дискриминант Δ для каждой из критических точек.

Для точки $M_1\left(5;-12\right)$: $A = 30$, $B = 6$, $C = 2$, $\Delta = 30 \cdot 2 - 6^2 = 24$. Так как $\Delta > 0$ и $A = 30 > 0$, то точка M_1 является точкой локального минимума.

$$z_{\min} = z\left(5;-12\right) = 5^3 + 6 \cdot 5 \cdot (-12) + (-12)^2 - 3 \cdot 5 - 6 \cdot (-12) = -34.$$

Для точки $M_2\left(1;0\right)$: $A = 6$, $B = 6$, $C = 2$, $\Delta = 6 \cdot 2 - 6^2 = -24 < 0$, следовательно, точка M_2 не является точкой экстремума.

1.8 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

Решение

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, необходимо:

– найти критические точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

– найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

– из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Построим область D (рисунок 2).

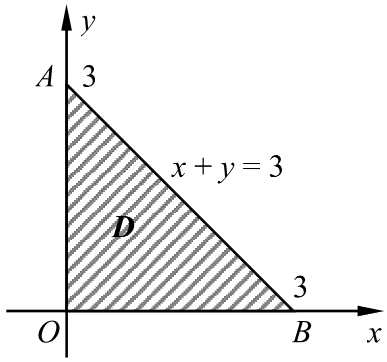

Рисунок 2

Найдём критические точки функции, используя условия (9). Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y + 1.$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -y, \\ -2y - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{8}, \\ y = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Получили критическую точку $M\left(-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$. Так как $M \notin D$, то исключаем её из дальнейшего рассмотрения. Других критических точек нет. Исследуем функцию на границах области D.

Рассмотрим сторону OA:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -3y^2 + y, \ \ y \in [0;3];$$

$$z' = -6y + 1, \quad -6y + 1 = 0, \quad y = \frac{1}{6} \in [0;3];$$

$$z(0) = 0, \quad z\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}, \quad z(3) = -24.$$

Рассмотрим сторону OB:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = x^2, \ \ x \in [0;3];$$

$$z' = 2x, \quad 2x = 0, \quad x = 0 \in [0;3];$$

$$z(0) = 0, \quad z(3) = 9.$$

Рассмотрим сторону AB:

$$y = 3 - x \ \Rightarrow \ z = x^2 + 2x(3 - x) - 3(3 - x)^2 + 3 - x = -4x^2 + 23x - 24, \ x \in [0;3];$$

$$z' = -8x + 23, \quad -8x + 23 = 0, \quad x = \frac{23}{8} \in [0;3];$$

$$z(0) = -24, \quad z\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{245}{8}, \quad z(3) = 9.$$

Выбирая из всех найденных значений наибольшее и наименьшее, получаем

$$\max_D z = \max\left\{0; \frac{1}{12}; -24; 9; \frac{245}{8}\right\} = z\left(\frac{23}{8}; \frac{1}{8}\right) = \frac{245}{8},$$

$$\min_D z = \min\left\{0; \frac{1}{12}; -24; 9; \frac{245}{8}\right\} = z(0;3) = -24.$$

1.9 Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $2x + 3y - 5 = 0$.

Решение

Экстремум функции $z = z(x, y)$, достигаемый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$, называется *условным экстремумом функции*. Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ в этом случае называется *уравнением связи*.

Отыскание условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*:

$$L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{10}$$

где λ – неопределённый постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Из этой системы можно найти неизвестные x, y и λ.

Функция Лагранжа (10) для нашей задачи будет следующей:

$$L = xy + \lambda(2x + 3y - 5).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda.$$

Необходимые условия экстремума (11) примут вид:

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = -2\lambda, \\ x = -3\lambda, \\ -6\lambda - 6\lambda - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{5}{12}, \\ x = \dfrac{5}{4}, \\ y = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа для найденных значений x, y, λ при условии, что $dx^2 + dy^2 \neq 0$:

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2.$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0.$$

Отсюда получаем $d^2 L = 2dxdy$. Выражаем x из уравнения связи и находим его дифференциал:

$$2x + 3y - 5 = 0, \; x = -\frac{3}{2} y + \frac{5}{2}, \; dx = -\frac{3}{2} dy.$$

Тогда дифференциал второго порядка функции Лагранжа равен $d^2 L = -3dy^2$.

Так как $d^2 L < 0$, то в точке $\mathrm{M}\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ функция имеет условный максимум.

$$z_{\max} = z\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}.$$

2 Варианты заданий

2.1 Найти область определения функции.

2.1.1 $z=\sqrt{\ln(1-x^2-y^2)}$;

2.1.2 $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$;

2.1.3 $z=\sqrt{xy}$;

2.1.4 $z=1-\sqrt{-(x-y)^2}$;

2.1.5 $z=2^{x\sqrt{y^2-2y}}$;

2.1.6 $z=\ln(x^2+y)$;

2.1.7 $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$;

2.1.8 $z=\ln xy$;

2.1.9 $z=\sqrt{\ln(1-x^2-y^2)}$;

2.1.10 $z=\ln(4+4x-y^2)$;

2.1.11 $z=\sqrt{x+y}\ln(y^2-x^2)$;

2.1.12 $z=\sqrt{y^2-4x}$;

2.1.13 $z=\ln(y^2-4x+8)$;

2.1.14 $z=x+\arccos\dfrac{1}{x+y}$;

2.1.15 $z=x+\arcsin y$;

2.1.16 $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$;

2.1.17 $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$;

2.1.18 $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-4}{6-x^2-y^2}}$;

2.1.19 $z=\ln(x+y)$;

2.1.20 $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;

2.1.21 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

2.1.22 $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;

2.1.23 $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$;

2.1.24 $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$;

2.1.25 $z=\sqrt{1+x-y^2}+\sqrt{1-x-y^2}$;

2.1.26 $z=e^{\frac{x}{4-x^2-y^2}}$;

2.1.27 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

2.1.28 $z=\arcsin(2x-y)$;

2.1.29 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}}$;

2.1.30 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2x^2}}$.

2.2 Составить полный дифференциал функции.

2.2.1 $z = \frac{y}{x} + xy$;

2.2.2 $z = \frac{x-y}{x+y}$;

2.2.3 $z = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

2.2.4 $z = \operatorname{arcctg}\left(xy^2\right)$;

2.2.5 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

2.2.6 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

2.2.7 $z = \sin\frac{x+y}{x-y}$;

2.2.8 $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

2.2.9 $z = \arccos\left(x - y^2\right)$;

2.2.10 $z = \ln(x^2 + y^2)$;

2.2.11 $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$;

2.2.12 $z = \cos\left(x - \sqrt{xy}\right)$;

2.2.13 $z = \ln(x + \ln y)$;

2.2.14 $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$;

2.2.15 $z = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$;

2.2.16 $z = \ln(3x^2 + 5y^2)$;

2.2.17 $z = \sin\sqrt{x^3 y}$;

2.2.18 $z = \frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$;

2.2.19 $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

2.2.20 $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

2.2.21 $z = \arcsin\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

2.2.22 $z = \frac{x+3y}{y-3x}$;

2.2.23 $z = \arcsin\frac{x+y}{x-y}$;

2.2.24 $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$;

2.2.25 $z = \frac{\cos x^2}{xy}$;

2.2.26 $z = \ln(3x^2 - y^2)$;

2.2.27 $z = \frac{x}{3y - 2x}$;

2.2.28 $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$;

2.2.29 $z = \ln(5x + 3y)$;

2.2.30 $z = \arcsin\left(2x^3 y\right)$.

2.3 Найти производные: а) сложной функции; б) функции, заданной неявно.

2.3.1 а) $z=\dfrac{x^2}{y+1},\ x=1-2t,\ y=\operatorname{arctg} t$;

б) $x^3+y^3+z^3=3xyz+4$;

2.3.2 а) $z=e^{x-2y},\ x=\sin t,\ y=t^3$;

б) $xy+2=x^2+y^2+z^2$;

2.3.3 а) $z=x^2\ln y,\ x=\cos t,\ y=\sin^2 t$;

б) $3x-2y+z=xz+5$;

2.3.4 а) $z=x^2+y^2+xy,\ x=\operatorname{tg} t,\ y=e^t$;

б) $e^z=-x-2y-z$;

2.3.5 а) $z=\ln\left(e^x+e^y\right),\ x=t^2,\ y=t^3$;

б) $x^2+y^2+z^2=z+4$;

2.3.6 а) $z=\arcsin\left(x-y\right),\ x=3t,\ y=\operatorname{ctg} t$;

б) $z^3+3xyz=-3y+7$;

2.3.7 а) $z=\operatorname{arctg}\left(xy\right),\ x=t+3,\ y=e^t$;

б) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=5$;

2.3.8 а) $z=x^2y-y^2x,\ x=\ln t,\ y=e^{-t}$;

б) $e^{z-1}+1=\cos x\cos y$;

2.3.9 а) $z=\operatorname{tg}\left(3t+2x^2-y\right),\ x=\dfrac{1}{t},\ y=\sqrt{t}$;

б) $x^2+y^2+z^2=6x$;

2.3.10 а) $z=\dfrac{y^2}{x},\ x=1-2t,\ y=1+\operatorname{arctg} t$;

б) $xyz=z^2-1$;

2.3.11 а) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{y},\ x=3t^2,\ y=\sqrt{t^2+1}$;

б) $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=2$;

2.3.12 а) $z=e^{xy}\ln\left(x+y\right),\ x=2t^2,\ y=1-t^2$;

б) $5-2xz=x^2+y^2+z^2$;

2.3.13 а) $z=e^{2x^2-2y^2},\ x=\cos t,\ y=\sin t$;

б) $x\cos y+y\cos z+z\cos x=10$;

2.3.14 а) $z=\ln\frac{x}{\sqrt{y}}$, $x=3t^2$, $y=t^2+1$;

б) $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z=4$;

2.3.15 а) $z=x^y$, $x=\sin t$, $y=2t$;

б) $x^2+2y^2+z^2=4x+2y-2z$;

2.3.16 а) $z=\ln\left(e^{-x}+e^{-2y}\right)$, $x=t^2$, $y=\frac{t^3}{3}$;

б) $x+y+z+3=xyz$;

2.3.17 а) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{2-xy}$, $x=\operatorname{tg}t$, $y=-\operatorname{ctg}t$;

б) $2xz=x^2+y^2+z^2$;

2.3.18 а) $z=\frac{x}{y}$, $x=e^{3t}$, $y=\ln t$;

б) $e^z-xyz-x=1$;

2.3.19 а) $u=x^2y^3$, $x=\operatorname{tg}t$, $y=\ln\left(t^2+1\right)$;

б) $3xyz+2y=x^3+2y^3+z^3$;

2.3.20 а) $z=\arcsin\frac{2x}{y}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$;

б) $x^2-2xy-3y^2+6x-2y=20+8z-z^2$;

2.3.21 а) $z=y^{\ln x}$, $x=t^2-1$, $y=e^t$;

б) $x^2+y^2+z^2=y-z+3$;

2.3.22 а) $z=e^{x+2y}$, $x=\cos t$, $y=t^2$;

б) $-2xy+yz+4x+3y+z=x^2+y^2+z^2$;

2.3.23 а) $z=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$, $x=\sin 2t$, $y=\operatorname{tg}^2 t$;

б) $x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y=12$;

2.3.24 а) $z=x^2+yx+y^2$, $y=\ln t$, $x=\arcsin t$;

б) $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3$;

2.3.25 а) $z=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$, $x=e^{-2t}$, $y=e^{3t}-1$;

б) $x^2+2y^2+3z^2=9$;

2.3.26 а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$

б) $2xy+2xz+2yz=x^2+y^2+z^2$;

2.3.27 а) $z=x^2\left(y+2\right), x=\ln\left(t^2+t+1\right), y=e^{-t}$;

б) $x^3+3xyz=z^3+27$;

2.3.28 а) $z=\arccos\frac{2y}{x}, x=\sin t, y=\cos t$;

б) $\ln z=x+2y-z+\ln 3$;

2.3.29 а) $z=\arcsin\left(x-y\right), x=\operatorname{arctg} t, y=4t^3+t$;

б) $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z=6$;

2.3.30 а) $z=\operatorname{arctg}\left(2x^2-y\right), x=t^3, y=\sqrt{t}$;

б) $z^2=xy-z+x^2-4$.

2.4 Составить дифференциал второго порядка функции.

2.4.1 $z=\sin^2(3x-4y)$;

2.4.2 $z=e^{\frac{x}{y^2}}$;

2.4.3 $z=\frac{e^{xy}}{x}$;

2.4.4 $z=\frac{x^2}{\sqrt{x+y}}$;

2.4.5 $z=e^{\frac{y}{x}}$;

2.4.6 $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$;

2.4.7 $z=xe^{\frac{y}{x}}$;

2.4.8 $z=(2x+y)\ln(x-y^2)$;

2.4.9 $z=\ln\left(x^2+y^2+2x\right)$;

2.4.10 $z=\frac{y}{(x^2+y^2)^5}$;

2.4.11 $z=\ln\left(xy\right)+\frac{x}{y}$;

2.4.12 $z=\sqrt{2y^2-x^2}$;

2.4.13 $z=x^y$;

2.4.14 $z=\ln(x^2+xy+y^2)$;

2.4.15 $z=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$;

2.4.16 $z=e^{-x-3y}\sin(x+3y)$;

2.4.17 $z=\ln(x^2+e^{-y})$;

2.4.18 $z=\cos y+\frac{\sin y}{x}$;

2.4.19 $z=\frac{1}{xy}-3xy(x-y)$;

2.4.20 $z=\frac{y^2}{3x}+\sin(xy)$;

2.4.21 $z=\frac{y^2}{x^2}-4\frac{x^2}{y^2}+y^4$;

2.4.22 $z=e^x(\cos y+x\sin y)$;

2.4.23 $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.4.24 $z=\ln\left(x+y^2\right)$;

2.4.25 $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

2.4.26 $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

2.4.27 $z=\dfrac{\sin(x+y)}{x}$;

2.4.28 $z=1+\dfrac{\cos x^2}{y}$;

2.4.29 $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2.4.30 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

2.5 Найти производную функции $u=u\left(x,y,z\right)$ в точке A по направлению к точке B. Найти также наибольшее из значений производных по всем направлениям в точке A.

2.5.1 $u=3z+\ln\left(x^2+y^2\right)$, $A\left(1;1;1\right)$, $B\left(4;5;1\right)$;

2.5.2 $u=xy^2-y\sqrt{z}$, $A\left(1;-2;1\right)$, $B\left(5;-2;4\right)$;

2.5.3 $u=\ln\left(4-3x^2\right)+yz^2$, $A\left(1;-1;2\right)$, $B\left(1;2;6\right)$;

2.5.4 $u=x\ln\left(2-y^2\right)+5\operatorname{arctg} z$, $A\left(1;1;2\right)$, $B\left(5;-2;2\right)$;

2.5.5 $u=y\ln x-2\operatorname{arcctg} z$, $A\left(1;2;-1\right)$, $B\left(4;2;-5\right)$;

2.5.6 $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$, $A\left(1;-2;0\right)$, $B\left(1;-5;4\right)$;

2.5.7 $u=x^2yz+3\ln\left(z-1\right)$, $A\left(1;1;2\right)$, $B\left(-3;-2;2\right)$;

2.5.8 $u=y^2-4\sqrt{x+z}$, $A\left(3;-1;1\right)$, $B\left(0;-1;-3\right)$;

2.5.9 $u=\sqrt{16y}+\dfrac{1}{z+x}$, $A\left(2;4;-1\right)$, $B\left(2;1;-5\right)$;

2.5.10 $u=2\sqrt{xz}+\sqrt{4-y^2}$, $A\left(1;0;1\right)$, $B\left(5;3;1\right)$;

2.5.11 $u=4\sqrt{x^2+y}+2\operatorname{arctg} z$, $A\left(-1;3;1\right)$, $B\left(2;3;5\right)$;

2.5.12 $u=z^2+2\operatorname{arcctg}\left(x-y\right)$, $A\left(1;2;-1\right)$, $B\left(1;6;2\right)$;

2.5.13 $u=\ln\left(x^2+y^2\right)+xyz$, $A\left(1;-1;2\right)$, $B\left(-3;2;2\right)$;

2.5.14 $u=xy+\dfrac{x}{z}$, $A\left(-1;2;1\right)$, $B\left(-4;2;5\right)$;

2.5.15 $u=xz-2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $A\left(1;1;1\right)$, $B\left(1;4;-3\right)$;

2.5.16 $u=x\sqrt{y}+\left(z+y\right)\sqrt{x}$, $A\left(4;1;3\right)$, $B\left(1;-3;3\right)$;

2.5.17 $u=y^2z^3+\arcsin x$, $A\left(0;1;-1\right)$, $B\left(-4;1;-4\right)$;

2.5.18 $u=\ln\left(1+y^2\right)+zy\sqrt{x}$, $A\left(1;-1;-2\right)$, $B\left(1;-5;-5\right)$;

2.5.19 $u=3\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\sqrt{2z-1}$, $A\left(-1;1;1\right)$, $B\left(2;5;1\right)$;

2.5.20 $u=-2y+\ln\left(x^2+z^2\right)$, $A\left(1;-1;1\right)$, $B\left(5;-1;4\right)$;

2.5.21 $u=4\sqrt{x+z^2}-y^3$, $A\left(3;-1;1\right)$, $B\left(3;2;5\right)$;

2.5.22 $u=x^2-y^3-2\sqrt{z}$, $A\left(1;-1;1\right)$, $B\left(5;-4;1\right)$;

2.5.23 $u=\dfrac{4y}{z}-\sqrt{x^2+y^2}$, $A\left(0;3;2\right)$, $B\left(3;3;-2\right)$;

2.5.24 $u=2\sqrt{xy}-\ln\left(10-z^2\right)$, $A\left(2;2;-3\right)$, $B\left(2;-1;1\right)$;

2.5.25 $u=\dfrac{4}{z}+\ln\left(3x+y^2\right)$, $A\left(1;0;-2\right)$, $B\left(-3;-3;-2\right)$;

2.5.26 $u=xz^2\sqrt{y}+\operatorname{arctg} y$, $A\left(-1;1;1\right)$, $B\left(-4;1;-3\right)$;

2.5.27 $u=\arccos x+6\sqrt{y+z}$, $A\left(0;4;5\right)$, $B\left(0;1;1\right)$;

2.5.28 $u=\cos\left(2x+3y\right)+2\sqrt{xyz}$, $A\left(3;-2;-6\right)$, $B\left(7;1;-6\right)$;

2.5.29 $u=\ln z+\sin\left(2x+y\right)$, $A\left(2;-4;-1\right)$, $B\left(5;-4;3\right)$;

2.5.30 $u=\operatorname{tg}\left(x+2\right)-8\sqrt{yz}$, $A\left(-2;4;1\right)$, $B\left(-2;8;4\right)$.

2.6 Составить уравнения касательной плоскости и нормали к данной поверхности в точке $P_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$.

2.6.1 $x^2+z^2-4y^2+2xy=0$, $P_0(-2;1;2)$;

2.6.2 $2x^2+y^2-z=0$, $P_0(1;-1;3)$;

2.6.3 $4xy^2z-x^3y-x^2z+4y=0$, $P_0(2;-1;1)$;

2.6.4 $x^2+y^2+z^2-xy-3z-1=0$, $P_0(1;2;1)$;

2.6.5 $x^3y+4xyz+y^2z-x-3=0$, $P_0(1;4;0)$;

2.6.6 $yz-x^2+2xy+1=0$, $P_0(3;-2;2)$;

2.6.7 $xyz+x^2+y^2z-y^2+1=0$, $P_0(-1;2;1)$;

2.6.8 $x^2y^2+xyz^2+y^2z-2x=0$, $P_0(2;-1;0)$;

2.6.9 $x^2z+xy^2+3xz+y-4=0$, $P_0(-4;0;1)$;

2.6.10 $2xy^2-xyz+yz+4xy=0$, $P_0(2;-3;4)$;

2.6.11 $2xyz+xy^2+y^2z-x=0$, $P_0(4;-2;-1)$;

2.6.12 $x^2yz+y^2z+2y-x-1=0$, $P_0(1;-2;1)$;

2.6.13 $x^2z+2xy^2+2yz+y+1=0$, $P_0(2;-1;2)$;

2.6.14 $2xy^2-x^2z+2yz+2y+4=0$, $P_0(-1;1;-2)$;

2.6.15 $3x^2y+2xz-yz+x+1=0$, $P_0(1;-2;1)$;

2.6.16 $x^2+y^2+z^2+6y+4z-8=0$, $P_0(-1;1;2)$;

2.6.17 $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$, $P_0(1;2;-1)$;

2.6.18 $3x^4-4y^3z+4xyz^2-4xz^3+1=0$, $P_0(1;1;1)$;

2.6.19 $2x^2-y^2+z^2-4z+y-13=0$, $P_0(2;1;-1)$;

2.6.20 $x^2+z^2-5yz+3y-46=0$, $P_0(1;2;-3)$;

2.6.21 $x^2+2y^2+3z^2-21=0$, $P_0(\sqrt{3};0;6)$;

2.6.22 $x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z-2=0$, $P_0(1;1;1)$;

2.6.23 $x^2+y^2-z^2-2xz+2x-z=0$, $P_0(1;1;1)$;

2.6.24 $z-x^2-y^2+2xy-2x+y=0$, $P_0(-1;-1;-1)$;

2.6.25 $z-y^2+x^2-2xy+3y=0$, $P_0(1;-1;1)$;

2.6.26 $x^2y^2+x^2yz-xyz-xz^2+8=0$, $P_0(2;1;3)$;

2.6.27 $x^2z-xyz-y^2-x-3=0$, $P_0(-2;3;4/5)$;

2.6.28 $x^2+y^2+z^2-36=0$, $P_0(1;3;2)$;

2.6.29 $xyz^3-x^3yz-y^5-5=0$, $P_0(1;1;2)$;

2.6.30 $x^2+y^2-z^2+10z-25=0$, $P_0(4;3;0)$.

2.7 Исследовать функцию на экстремум.

2.7.1 $z=x^2+8y^3-4xy+1$;

2.7.2 $z=x^3+12xy+3y^2+6$;

2.7.3 $z=3-2x^3-6xy-y^2$;

2.7.4 $z=x^2+3xy+y^3-x$;

2.7.5 $z=3x+64-x^2-xy-y^2$;

2.7.6 $z=6xy-2x^3-3y^2+5$;

2.7.7 $z=2x^3-2xy+4x^2+y^2$;

2.7.8 $z=2x^2-4xy+y^3-4x+8$;

2.7.9 $z=2x^2+2y^3-12xy$;

2.7.10 $z=2x^2+6xy+y^3-2x-3y$;

2.7.11 $z=x^3+4xy+2y^2+4y$;

2.7.12 $z=x^3+y^2-2xy+1$;

2.7.13 $z=x^3+2xy+y^2+y$;

2.7.14 $z=x^2+2xy+y^3+x$;

2.7.15 $z=2x^2+2xy+y^3+4x$;

2.7.16 $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$;

2.7.17 $z = x^3 + 3xy + 3y^2 + 4$;
2.7.18 $z = x^2 - xy + y^3 + 2x - 2y$;
2.7.19 $z = x^3 + 4xy + 2y^2 + 4y$;
2.7.20 $z = 6xy - 3x^2 - 2y^3 + 10$;
2.7.21 $z = x^3 + xy + y^2 + 2y$;
2.7.22 $z = 2x^3 + 4xy + 2y^2 + 2y$;
2.7.23 $z = x^3 + y^2 - 3xy$;
2.7.24 $z = x^2 + y^3 - 6xy - 20$;
2.7.25 $z = x^2 + y^3 + 6xy + 2$;
2.7.26 $z = x^3 - x^2 - 4xy - 2y^2$;
2.7.27 $z = x^3 + y^2 - 3x + 4y + 8$;
2.7.28 $z = 3x^2 + y^3 + 12x - 12y + 5$;
2.7.29 $z = 2x^2 + 4xy + 4y^3$;
2.7.30 $z = x^3 - 6xy + y^2 - 3x + 6y + 7$.

2.8 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в области D, ограниченной заданными линиями.

2.8.1 $z = x^2 + 2y^2 - x - y, \quad D: x = 0, y = 0, x + y = 3$;
2.8.2 $z = -2y^2 + 2x^2 + x, \quad D: x = -1, x = 2, y = -1, y = 1$;
2.8.3 $z = -x^2 - xy + y^2 + 2x, \quad D: x = 1, y = 0, x - y = 0$;
2.8.4 $z = x^2 + 2xy + 2y^2 - y, \quad D: x = -1, x = 1, y = 0, y = 2$;
2.8.5 $z = 2y^2 - xy + x - y, \quad D: x = 2, y = 0, x + y = 5$;
2.8.6 $z = x^2 + xy - 2x, \quad D: x = -1, x = 1, y = 0, y = 3$;
2.8.7 $z = -3xy + y^2 + 5x^2, \quad D: x = -1, y = -1, x + y = 1$;
2.8.8 $z = 5x^2 - xy - y^2 + 3y, \quad D: x = 0, x = 1, y = 1, y = 3$;
2.8.9 $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x, \quad D: x = 0, y = 0, x + y = -3$;
2.8.10 $z = xy - 2x - y, \quad D: x = 0, x = 3, y = 1, y = 4$;
2.8.11 $z = x^2 + y - xy, \quad D: x = 0, y = 4, y - x = 0$;
2.8.12 $z = y^2 + xy - y, \quad D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$;
2.8.13 $z = xy - x - 2y, \quad D: x = 5, y = 0, y - x = 0$;
2.8.14 $z = 2x + y + yx, \quad D: x = -2, x = 1, y = 0, y = -3$;
2.8.15 $z = 4x^2 + 4xy - y^2 - 8x, \quad D: x = 0, y = 2, y - x = -1$;
2.8.16 $z = xy + x^2, \quad D: x = -1, x = 1, y = -2, y = 1$;

2.8.17 $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y, \quad D: x = 0,\ y = 0,\ y - x = -5$;
2.8.18 $z = xy - 3x - 2y, \quad D: x = 1,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 4$;
2.8.19 $z = x^2 + xy + 3x + y, \quad D: x = 0,\ y = 0,\ y + x = -3$;
2.8.20 $z = xy + x^2 + y^2, \quad D: x = -2,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 1$;
2.8.21 $z = x^2 + xy - y, \quad D: x = 2,\ y = -3,\ y - x = -2$;
2.8.22 $z = x^2 + 3xy - 6x, \quad D: x = -1,\ x = 3,\ y = 1,\ y = 2$;
2.8.23 $z = y^2 + xy - 2x, \quad D: x = -3,\ y = 1,\ y - x = 7$;
2.8.24 $z = -2x^2 + y^2 + 4y, \quad D: x = -1,\ x = 1,\ y = -4,\ y = -1$;
2.8.25 $z = x^2 + xy - 2y + x, \quad D: x = 0,\ y = -6,\ y + x = 0$;
2.8.26 $z = -2y^2 + x^2 + 4x, \quad D: x = -3,\ x = -1,\ y = -1,\ y = 2$;
2.8.27 $z = x^2 - 2xy - y, \quad D: x = 1,\ y = 0,\ y + x = -2$;
2.8.28 $z = x^2 + y^2, \quad D: x = -1,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 1$;
2.8.29 $z = 4y - 2xy + y^2, \quad D: x = 3,\ y = -1,\ y - x = 0$;
2.8.30 $z = x^2 - y^2 + 6y, \quad D: x = -2,\ x = 1,\ y = 2,\ y = 5$.

2.9 Найти экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии, что её аргументы удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$.

2.9.1 $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10$;
2.9.2 $z = -\frac{10}{13}x - \frac{15}{13}y + \frac{105}{13}, \quad \varphi = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8$;
2.9.3 $z = -\frac{20}{17}x - \frac{5}{17}y + \frac{195}{17}, \quad \varphi = x^2 + y^2 + 10x - 4y + 12$;
2.9.4 $z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{17}{2}, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10$;
2.9.5 $z = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{57}{5}, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16$;
2.9.6 $z = -\frac{5}{26}x - \frac{25}{26}y + \frac{145}{13}, \quad \varphi = x^2 + y^2 + 4x + 12y + 14$;
2.9.7 $z = -\frac{25}{29}x - \frac{10}{29}y + \frac{275}{29}, \quad \varphi = x^2 + y^2 + 8x - 6y - 4$;
2.9.8 $z = -\frac{25}{34}x - \frac{15}{34}y + \frac{190}{17}, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 12x + 8y + 18$;
2.9.9 $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad \varphi = x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10$;

2.9.10 $z=-\frac{10}{13}x-\frac{15}{13}y+\frac{105}{13},\quad \varphi=x^2+y^2-2x+4y-8;$

2.9.11 $z=-\frac{20}{17}x-\frac{5}{17}y+\frac{195}{17},\quad \varphi=x^2+y^2+10x+4y+12;$

2.9.12 $z=-x-\frac{1}{2}y+\frac{17}{2},\quad \varphi=x^2+y^2-6x-2y-10;$

2.9.13 $z=-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+\frac{57}{5},\quad \varphi=x^2+y^2+10x-8y+16;$

2.9.14 $z=-\frac{5}{26}x-\frac{25}{26}y+\frac{145}{13},\quad \varphi=x^2+y^2-4x+12y+14;$

2.9.15 $z=-\frac{25}{29}x-\frac{10}{29}y+\frac{275}{29},\quad \varphi=x^2+y^2+8x+6y-4;$

2.9.16 $z=-\frac{25}{34}x-\frac{15}{34}y+\frac{190}{17},\quad \varphi=x^2+y^2-12x-8y+18;$

2.9.17 $z=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+12,\quad \varphi=x^2+y^2-4x+8y+10;$

2.9.18 $z=-\frac{10}{13}x-\frac{15}{13}y+\frac{105}{13},\quad \varphi=x^2+y^2+2x-4y-8;$

2.9.19 $z=-\frac{20}{17}x-\frac{5}{17}y+\frac{195}{17},\quad \varphi=x^2+y^2-10x-4y+12;$

2.9.20 $z=-x-\frac{1}{2}y+\frac{17}{2},\quad \varphi=x^2+y^2+6x+2y-10;$

2.9.21 $z=-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+\frac{57}{5},\quad \varphi=x^2+y^2-10x+8y+16;$

2.9.22 $z=-\frac{5}{26}x-\frac{25}{26}y+\frac{145}{13},\quad \varphi=x^2+y^2+4x-12y+14;$

2.9.23 $z=-\frac{25}{29}x-\frac{10}{29}y+\frac{275}{29},\quad \varphi=x^2+y^2-8x-6y-4;$

2.9.24 $z=-\frac{25}{34}x-\frac{15}{34}y+\frac{190}{17},\quad \varphi=x^2+y^2+12x+8y+18;$

2.9.25 $z=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+12,\quad \varphi=x^2+y^2+4x+8y+10;$

2.9.26 $z=-\frac{10}{13}x-\frac{15}{13}y+\frac{105}{13},\quad \varphi=x^2+y^2-2x-4y-8;$

2.9.27 $z=-\frac{20}{17}x-\frac{5}{17}y+\frac{195}{17},\quad \varphi=x^2+y^2-10x+4y+12;$

2.9.28 $z=-x-\frac{1}{2}y+\frac{17}{2},\quad \varphi=x^2+y^2+6x-2y-10;$

2.9.29 $z = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{57}{5}$, $\varphi = x^2 + y^2 + 10x + 8y + 16$;

2.9.30 $z = -\frac{5}{26}x - \frac{25}{26}y + \frac{145}{13}$, $\varphi = x^2 + y^2 - 4x - 12y + 14$.

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика : учебник для студентов вузов в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 2. – 448 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 1. – 383 с.

3 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. :Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

5 Руководство к решению задач по высшей математике / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1. – 349 с.

6 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

7 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 464 с.

8 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачёв. – 7-е изд. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с.