ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

***Методические указания и варианты
индивидуальных заданий по теме
«Основные понятия теории функций комплексной переменной»
для студентов дневной и заочной форм обучения
электротехнических специальностей***

Могилев 2009

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» января 2009 г., протокол № 5

Составители: В. Г. Замураев;
В. И. Мармазеев;
Т. Ю. Орлова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов дневной и заочной форм обучения электротехнических специальностей.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 1.10.2009. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.86. Уч.-изд. л. 1.8. Тираж 99 экз. Заказ № 657.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

Содержание

1 Элементы теории аналитических функций

1.1 Функции комплексного переменного

Множество точек D комплексной плоскости называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству. Связное открытое множество точек комплексной плоскости называется *областью*. Область D называется *односвязной*, если любая непрерывная замкнутая самонепересекающаяся кривая, проведенная в D, ограничивает некоторую область G, целиком принадлежащую D. В простых случаях можно задавать область в комплексной плоскости, накладывая некоторые ограничения на комплексную переменную.

Пример 1. Записать с помощью неравенств область, которая является внутренностью эллипса с фокусами в точках $1+i$, $3+i$ и большой полуосью, равной 3.

Решение

Заметим, что точка z является внутренней точкой эллипса тогда, и только тогда, когда сумма расстояний от неё до фокусов будет меньше большой оси. Следовательно, наша область может быть записана в виде неравенства $\left|z-(1+i)\right|+\left|z-(3+i)\right|<6$.

Говорят, что в области D определена функция w комплексного переменного z, если каждому значению комплексной переменной $z=x+iy\in D$ по определённому правилу поставлено в соответствие значение переменной $w=u+iv$, и символически записывают $f(z)=w=u(x,y)+iv(x,y)$, где $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$, $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$. С геометрической точки зрения функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение области D плоскости (z) на некоторое множество G плоскости (w). При этом говорят, что w – образ точки z, а точка z – прообраз точки w при отображении, осуществляемом функцией $w=f(z)$.

Пример 2. При отображении, осуществляемом функцией $w=z^2$, найти образы прямых $x=2$, $y=1$.

Решение

Выделим действительную и мнимую части функции w: $w=(x+iy)^2=x^2-y^2+i\cdot 2y$, т. е. $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Когда точка z пробегает в плоскости (z) прямую $x=2$, то её образ w в плоскости (w) пробегает линию $u=4-y^2$, $v=4y$ $(-\infty<y<+\infty)$ или, исключая параметр y,

$u = 4 - \frac{v^2}{16}$. Это уравнение определяет в плоскости (w) параболу. Аналогично прямая $y = 1$ перейдёт при нашем отображении в параболу $u = \frac{v^2}{4} - 1$ (рисунок 1).

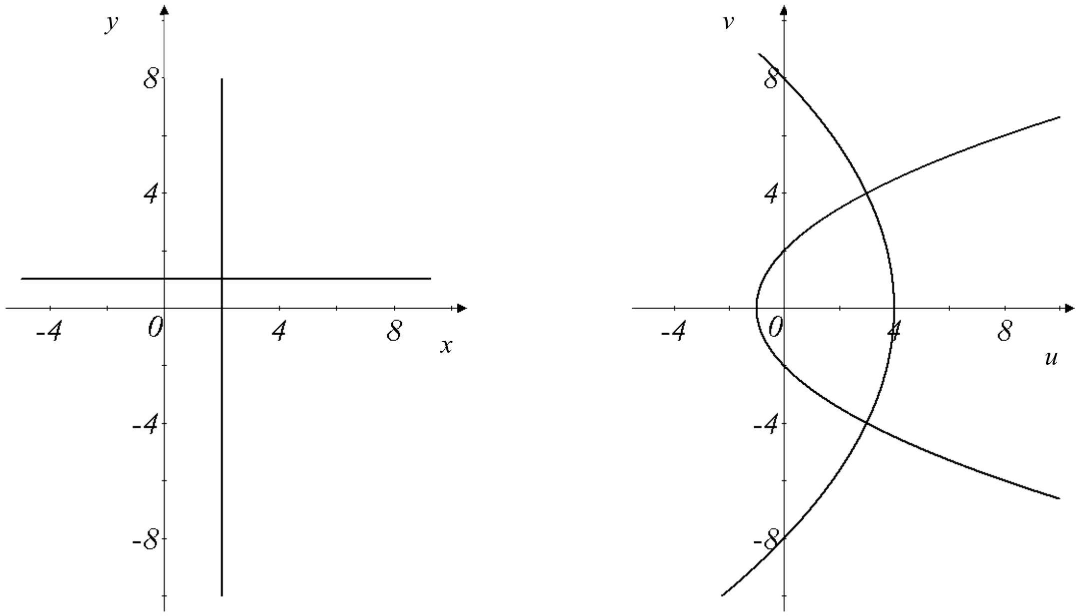

Рисунок 1

1.2 Аналитические функции

Если $w = f(z)$ – однозначная функция, заданная в области D, то её *производной* в точке $z \in D$ называется предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dw}{dz},$$

когда Δz любым образом стремится к нулю.

Однозначная в области D функция $w = f(z)$, имеющая непрерывную производную в любой точке области, называется *аналитической функцией* на этой области. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в области D плоскости (z), необходимо и достаточно, чтобы частные производные первого порядка функций u и v были непрерывны в D и выполнялись *условия Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Функции u и v называются сопряжёнными друг к другу на D. При выполнении условий (1) производная $f'(z)$ может быть записана в виде

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2)$$

Пример 3. Найти область аналитичности функции $f(z)=e^{2z}$ и вычислить $f'(z)$.

Решение

Имеем $f(z)=e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$, т. е.

$$u(x,y)=e^{2x}\cos 2y,\ v(x,y)=e^{2x}\sin 2y.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y;\ \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y.$$

Значит, условия (1) выполняются во всей плоскости, и по формуле (2) имеем

$$f'(z)=\left(e^{2z}\right)'=2e^{2x}\cos 2y+i\cdot 2e^{2x}\sin 2y=2e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)=2e^{2z}.$$

Действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. справедливы равенства:

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\ \Delta v\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Аналитическая в области D функция определяется с точностью до постоянной заданием своей действительной или мнимой части. Например, если $u(x,y)$ – действительная часть аналитической в области D функции $f(z)$, то

$$v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u'_y dx+u'_x dy, \qquad (3)$$

где (x_0,y_0) – фиксированная точка в области D, рассматриваемой как область определения вещественной функции двух переменных, а путь интегрирования целиком лежит в области D.

Пример 4. Проверить, что функция $u = x^2 - y^2 - 5x + y + 2$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и найти $f(z)$.

Решение

Так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, то $u(x,y)$ – гармоническая на всей плоскости функция. Следовательно, по формуле (3) имеем

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (2y-1)dx + (2x-5)dy.$$

Если в качестве пути интегрирования взять ломаную со звеньями, параллельными осям координат, то

$$v(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} (2y_0 - 1)dx + \int\limits_{y_0}^{y} (2x-5)dy = (2y_0 - 1)(x - x_0) + (2x-5)(y - y_0) =$$

$$= 2xy - x - 5y + 5y_0 + x_0 - 2x_0 y_0;$$

$$v(x,y) = 2xy - x - 5y + C.$$

$$f(z) = x^2 - y^2 - 5x + y + 2 + i(2xy - x - 5y + C) =$$

$$= (x^2 - 2ixy - y^2) - 5(x + iy) + (-ix + y) + 2 + Ci = z^2 - 5z - iz + 2 + Ci;$$

$$f(z) = z^2 - 5z - iz + 2 + Ci.$$

1.3 Конформные отображения

Если аналитическая в области D функция $f(z)$ *однолистна* в этой области, т. е. для любых $z_1 \neq z_2$ из D $f(z_1) \neq f(z_2)$, то она называется *регулярной* в этой области.

Отображение, задаваемое регулярной в области D функцией, обладает следующими свойствами:

1) всякую область $Q \subset D$ отображение $f(z)$ переводит в область Q' на плоскости (w), причём граница области Q переходит в границу области Q' с сохранением направления обхода. Последнее означает, что если точка z пробегает границу так, что Q остаётся слева, то точка $f(z)$ пробегает границу области Q' так, что Q' тоже остаётся слева;

2) всякая гладкая кривая γ из области D отображается в гладкую

кривую γ' в области D';

3) пусть $f'(z_0)\neq 0$ для $z_0\in D$, тогда $\left|f'(z_0)\right|$ геометрически равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $f(z)$;

4) аргумент производной $\varphi=\arg f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой кривой, проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную в точке $w_0=f(z_0)$ к образу γ' этой кривой при отображении $w=f(z)$.

Отображение, обладающее свойствами 3 и 4, называется *конформным* в точке z_0. Следовательно, регулярная функция, производная которой не обращается в нуль, осуществляет конформное отображение. Более того, отображение области D, задаваемое функцией $w=f(z)$ тогда, и только тогда, является конформным во всех точках области, когда $f(z)$ – регулярная в данной области функция и $f'(z)\neq 0$ всюду в D.

Пример 5. Найти область конформности отображения $w=z^2$ в прямоугольнике $Q=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 2, 0\le y\le 1\right\}$ и найти образ Q при этом отображении.

Решение

Так как $\left(z^2\right)'=2z$, то $w=z^2$ аналитична всюду на Q. Пусть $z_1\neq z_2$, а $z_1^2=z_2^2$ из Q. Тогда $z_1^2-z_2^2=0$, т. е. $(z_1-z_2)(z_1+z_2)=0$ или $z_1=-z_2$, что невозможно для области Q. Следовательно, функция $w=z^2$ регулярна всюду на Q.

Так как $\left(z^2\right)'=2z=0$ только для $z=0$, то конформность нашего отображения нарушается только в точке $z=0$.

Найдём теперь образ границы множества Q при отображении, задаваемом функцией $w=z^2$. Согласно примеру 2 $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$. Когда точка z пробегает прямые $x=2$ $(0\le y\le 1)$ и $y=1$ $(0\le x\le 2)$, то образ $w=z^2$ пробегает параболы $u=4-\dfrac{v^2}{16}$ $(0\le v\le 4)$, $u=\dfrac{v^2}{4}-1$ $(0\le v\le 4)$ (рисунок 2). А когда точка z пробегает прямые $x=0$ $(0\le y\le 1)$ и $y=0$ $(0\le x\le 2)$, то её образ $w=z^2$ пробегает прямую $v=0$ $(-1\le u\le 2)$. Учитывая направление обхода границы множества Q и её образа при нашем отображении, заключим, что кривосторонний треугольник ABC на плоскости w является искомым образом треугольника Q.

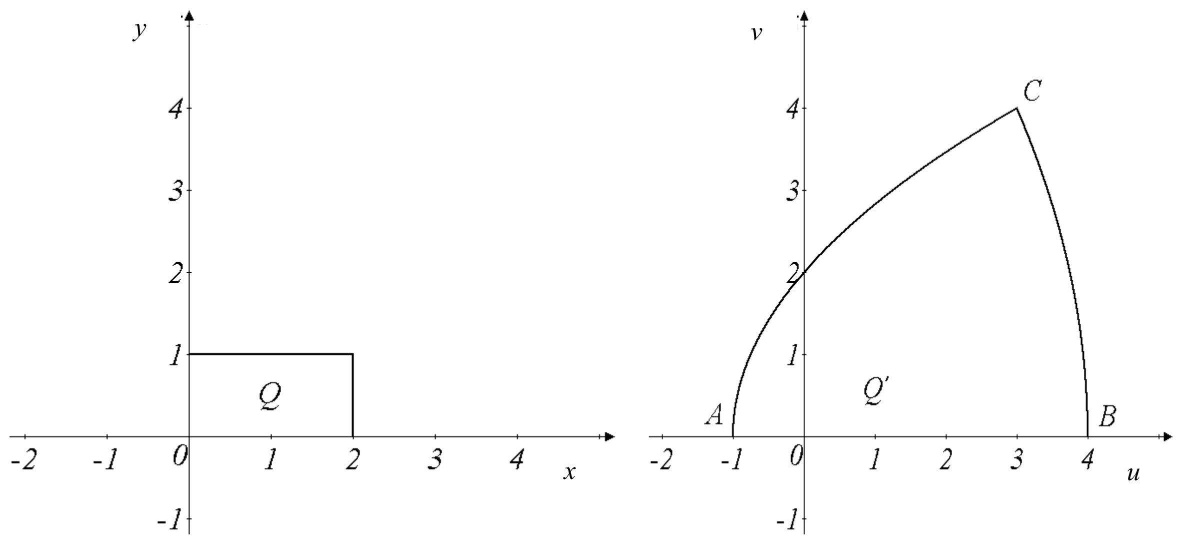

Рисунок 2

Замечание – Так как конформность рассмотренного отображения нарушена в точке $z=0$, то теперь ясно, почему прямые $x=0$ и $y=0$ ортогональны, а их образы – нет.

Примером отображения, конформного во всей комплексной плоскости *z*, является отображение, осуществляемое линейной функцией $w=az+b$ ($a\neq 0$). В самом деле $w'=a\neq 0$ всюду на плоскости *z*. Указанное отображение представляет собой композицию растяжения $w_1=|a|\cdot z$, поворота $w_2=e^{i\arg a}\cdot w_1$ и параллельного переноса $w_3=w_2+b$.

Пример 6. Построить линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$ в плоскости *z* на треугольник с вершинами 0, 1, i в плоскости *w*.

Решение

Для удобства совместим плоскости *z* и *w*. Заметим, что треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$ подобен треугольнику с вершинами 0, 1, i, причём коэффициент подобия $k=\sqrt{2}$. Совершим последовательные преобразования: а) $w_1=e^{3\pi i/4}\cdot z$ – поворот вокруг начала координат на угол $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ против часовой стрелки; б) $w_2=\sqrt{2}\cdot w_1$ – гомотетия (сжатие) с коэффициентом $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; в) $w_3=w_2+1$ – параллельный перенос на вектор, изображающий число 1 (рисунок 3). В результате треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$ отображается на треугольник с вершинами 0, 1, i, а осуществляющая это отображение целая линейная функция имеет вид:

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4} \cdot z + 1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 1 = \left(-1 + i\right)z + 1 \cdot$$

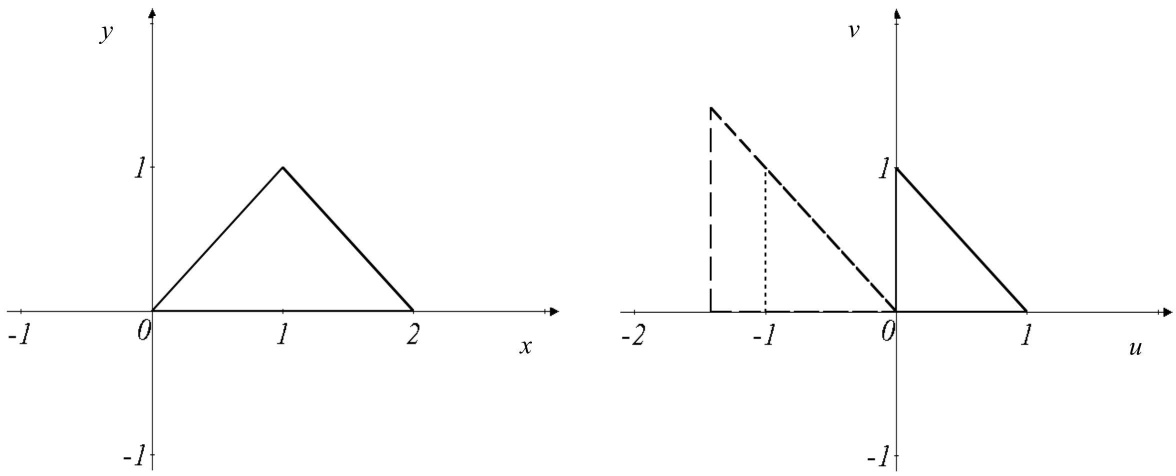

Рисунок 3

Другим важным примером конформного отображения расширенной плоскости $\left(z\right)$ является отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. При этом бесконечно удалённая точка $z = \infty$ отображается в точку $w = \dfrac{a}{c}$, а точка $z = -\dfrac{d}{c}$ переходит в бесконечно удалённую точку $w = \infty$. Дробно-линейное отображение обладает следующими свойствами:

1) каждая прямая и каждая окружность плоскости z отображаются в прямую или окружность плоскости w;

2) дробно-линейное отображение однозначно определяется заданием образов трёх точек $z_1 \mapsto w_1$, $z_2 \mapsto w_2$, $z_3 \mapsto w_3$:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \tag{4}$$

причём, если одна из точек z_1, z_2, z_3 либо w_1, w_2, w_3 является бесконечно удалённой, то в формуле (4) все отношения, содержащие эту точку, следует заменить единицей.

Пример 7. Найти дробно-линейное отображение, преобразующее окружность C_1, проходящую через точки 0, 1, i в окружность C_2, проходящую через точки $-i$, 0, 1, и переводящее точки 0, 1, i соответственно в точки $-i$, 0, 1. Выяснить, во что преобразуется круг, ограниченный окружностью C_1.

Решение

Используя формулу (4), имеем

$$\frac{w+i}{w-1}\cdot\frac{-1}{i}=\frac{z}{z-i}\cdot\frac{1-i}{1},$$

откуда $w=\dfrac{iz-i}{(2i-1)z+1}$. Так как направление обхода окружности C_1 при нашем отображении меняется на противоположное (рисунок 4), то круг, ограниченный окружностью C_1, переходит во внешность круга, ограниченного окружностью C_2.

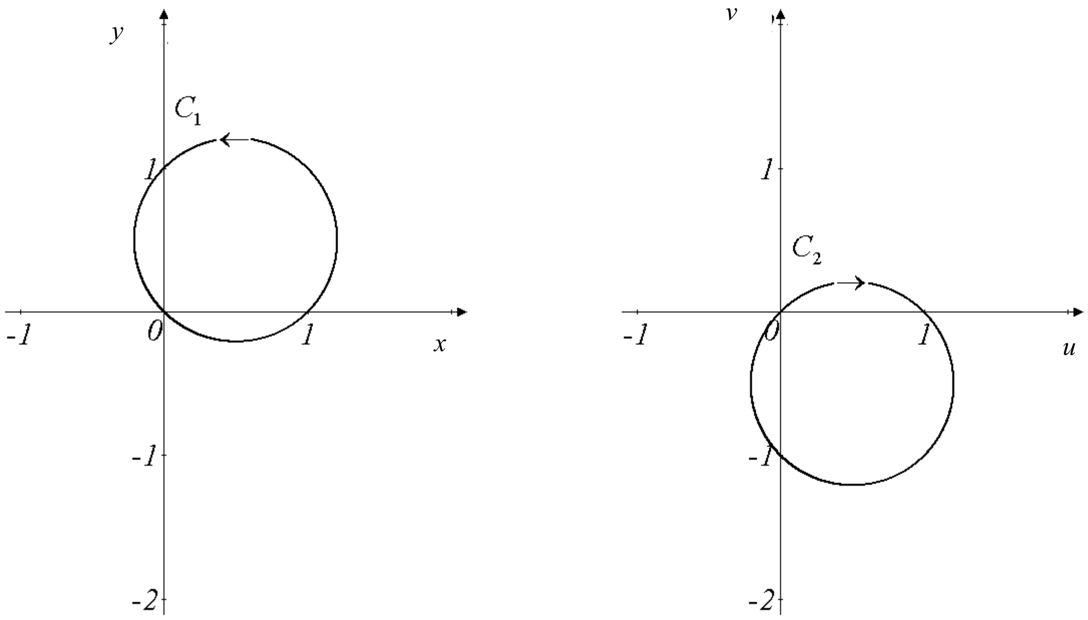

Рисунок 4

Пример 8. Найти образ окружности $|z-2i|=1$ при дробно-линейном отображении, заданном функцией $w=\dfrac{iz-(2+3i)}{z-(1+2i)}$.

Решение

Заметим, что точка $z=1+2i$, которая переводится нашим отображением в бесконечно удалённую точку $w=\infty$, лежит на данной окружности. Следовательно, по свойству 1 дробно-линейного отображения образом нашей окружности будет прямая. Для построения этой прямой достаточно указать две точки, через которые она проходит, а ими являются образы двух любых точек, лежащих на окружности. Например, $w(i)=3$, $w(3i)=4+7i$.

1.4 Интегрирование

Пусть однозначная функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена и непрерывна в области *D*, а С – кусочно-гладкая ориентированная кривая, лежащая в *D*. Интеграл от функции *f*(*z*) вдоль кривой *C* можно определить через обычные криволинейные интегралы следующим образом:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy. \quad (5)$$

Если кривая *C* задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и начальная и конечная дуги *C* соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big) z'(t)\,dt, \quad (6)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_C \left(1 + i - 2\overline{z}\right)dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$: 1) по прямой; 2) по параболе $y = x^2$.

Решение

Перепишем подынтегральную функцию в виде

$$1 + i - 2\overline{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y),$$

здесь $u(x,y) = 1 - 2x$, $v(x,y) = 1 + 2y$. Применяя формулу (5), получим

$$\int_C \left(1 + i - 2\overline{z}\right)dz = \int_C (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i\int_C (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy.$$

1 Уравнение прямой, проходящей через точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$, будет $y = x$, $0 \le x \le 1$, значит, $dy = dx$. Поэтому

$$\int_C \left(1 + i - 2\overline{z}\right)dz = \int_0^1 \big((1 - 2x) - (1 + 2x)\big)dx + i\int_0^1 \big((1 + 2x) + (1 - 2x)\big)dx = 2(-1 + i).$$

2 Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$ ($0 \le x \le 1$), следовательно,

$$\int_C \left(1 + i - 2\overline{z}\right)dz = \int_0^1 \left(1 - 2x - \left(1 + 2x^2\right)2x\right)dx + i\int_0^1 \left(1 + 2x^2 + (1 - 2x)2x\right)dx = -2 + \frac{4}{3}i.$$

Если $f(z)$ – аналитическая в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае $\int\limits_C f(z)dz = 0$, если C – любой замкнутый кусочно-гладкий контур в области D.

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром C, и непрерывной на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} \ (z_0 \in D). \tag{7}$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}dz$, если: 1) C – окружность $|z-2| = 1$; 2) C – окружность $|z-2| = 3$.

Решение

1 Внутри круга, ограниченного окружностью $|z-2| = 1$, и на самой окружности подынтегральная функция аналитическая, поэтому $\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}dz = 0$.

2 Внутри круга, ограниченного окружностью $|z-2| = 3$, находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz,$$

функция $\frac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области и на её границе. Поэтому согласно формуле (7) имеем

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}dz = 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = -\frac{i\pi}{3}.$$

1.5 Степенные ряды

Пусть задан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$ в комплексной области. Область сходимости такого ряда есть круг с центром в точке z_0. Радиус круга сходимости степенного ряда определяется по формулам:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_n\right|}{\left|c_{n+1}\right|},\ c_n\neq 0; \tag{8}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}},\ c_n\neq 0. \tag{9}$$

Если функция $f\left(z\right)$ – однозначная и аналитическая в точке $z=z_0$ и её окрестности, то она разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n,$$

где $c_n=\dfrac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}$. Обычно, если это возможно, для нахождения коэффициентов c_n используют готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций. Например,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+\left(-1\right)^n z^n+\ldots\ (R=1). \tag{10}$$

Пример 11. Разложить по степеням $z-3$ функцию $f\left(z\right)=\dfrac{1}{3-2z}$ и определить радиус сходимости полученного ряда.

Решение

Преобразуем данную функцию:

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}\left(z-3\right)}.$$

Заменяя в разложении (10) z на $\frac{2}{3}\left(z-3\right)$, получаем

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(z-3\right)^n.$$

Радиус сходимости определяем по формуле (9): $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}}=\dfrac{3}{2}$.

1.6 Вычеты и их применение

Если функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в кольце $0\le r<|z-z_0|<R$, то она разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \qquad (11)$$

Здесь коэффициенты c_n находятся по формуле $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $n\in Z$, где γ – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца. При разложении функции в ряд Лорана так же, как и при разложении в ряд Тейлора, если возможно, используют готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

Пример 12. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ в кольце $1<|z|<2$.

Решение

Так как функция $f(z)$ имеет особыми точками только $z_1=-2$ и $z_2=1$, то в данном кольце она аналитична. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \qquad (12)$$

Так как $1<|z|<2$, то $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$ и $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$. Следовательно, можно воспользоваться разложением (10), откуда получаем $\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n$, $\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$.

Подставляя полученные выражения в (12), имеем

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична и однозначна всюду в некоторой окрестности этой точки, кроме самой точки $z = z_0$. Следовательно, функция разлагается в ряд Лорана (11). Точка z_0 называется *устранимой особой точкой*, если в разложении (11) $c_{-n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Особая точка z_0 называется *полюсом* порядка n, если в разложении (11) $c_{-n} \neq 0$, $c_{-(n+1)} = c_{-(n+2)} = \ldots = 0$. Если $n = 1$, то полюс в точке z_0 называется *простым*. Если же в разложении (11) бесконечно много коэффициентов $c_{-n} \neq 0$, то изолированная особая точка z_0 называется *существенно особой точкой*.

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана этой функции.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz,$$

где C – произвольный замкнутый контур, охватывающий точку z_0, внутри которого функция регулярна.

Вычет функции в устранимой точке равен нулю. Если z_0 – полюс порядка n, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-z_0)^n f(z)\Big).$$

В частности, если z_0 – простой полюс, а $f(z)$ представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в точке z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, но $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением изолированных особых точек z_1, z_2, …, z_n, лежащих в этой области, то для любого простого замкнутого контура $C \subset D$, охватывающего точки z_1, z_2, …, z_n,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{dz}{z\left(z-1\right)^3}$.

Решение

В круге $|z| \le 2$ подынтегральная функция имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 0$. Ясно, что точка $z_1 = 1$ есть полюс порядка 3, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z\left(z-1\right)^3} = \lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{2}{z^3} = 2 .$$

Точка $z_2 = 0$ – простой полюс, следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z\left(z-1\right)^3} = \left.\frac{1}{\left(z-1\right)^3}\right|_{z=0} = -1 .$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z\left(z-1\right)^3} = 2\pi i\left(2-1\right) = 2\pi i .$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.

Решение

В круге $|z| \le 1$ подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z = 0$. Так как

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = z^2 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{z} + \ldots,$$

то $z = 0$ – существенно особая точка и $\operatorname*{Res}_{z=0} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = \dfrac{1}{24}$. Следовательно,

$$\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{24} = \frac{i\pi}{12} .$$

2 Теоретические вопросы и задачи

2.1 Теоретические вопросы

1 В чём состоит геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной?

2 Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке, условия Коши – Римана.

3 Можно ли представить дробно-линейное отображение как суперпозицию линейных отображений и инверсий? Если да, то каким образом?

4 В чём заключается сущность теоремы Коши для интеграла от функции, аналитичной в замкнутой односвязной и многосвязной областях, по контуру C?

5 Что называется существенно особой точкой и какова характерная особенность поведения функции в окрестности этой точки?

6 Что называется вычетом функции в изолированной особой точке и в чём сущность основной теоремы о вычетах?

2.2 Теоретические задачи

1 Записать условия, при которых три точки комплексной плоскости z_1, z_2 и z_3 лежат на прямой линии.

2 Выполнить графически инверсию прямой относительно окружности, когда прямая касается окружности.

3 Вычислить $\int\limits_C (z - z_0)^m \, dz$, где $m \in \mathbb{Z}$, если путём интегрирования C служат: а) окружность с центром в точке z_0 и радиусом R; б) эллипс с центром в точке z_0 и осями, параллельными осям координат; в) периметр квадрата с центром в точке z_0 и сторонами, параллельными осям координат.

4 Какое существенное различие имеется между поведением действительной функции $y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \; x \neq 0, \\ 0, \; x = 0 \end{cases}$ и поведением функции комплексной переменной $w = e^{-1/z^2}$ в окрестности точки $z = 0$?

5 Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют в точке $z = a$ полюсы порядка m и n соответственно. Что можно сказать о характере точки $z = a$ для функций:

а) $f(z) \cdot \varphi(z)$; *б*) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$; *в*) $f(z) + \varphi(z)$?

3 Варианты заданий

Вариант 1

1 При помощи функции $w = z^3$ отобразить на плоскость w линию $y = x$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = f(z) = u + iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w = f(z)$, если $u = 3x^2y - y^3$, $v = 3xy^2 - x^3$, $z_0 = -1 + i$.

3 На какую область в плоскости w отображает функция $w = iz + 1$ треугольник, ограниченный линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ в круг $|w - i| < 3$ так, чтобы точки $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_3 = 1$ границы $|z| = 1$ перешли соответственно в точки $w_1 = -3 + i$, $w_2 = 4i$, $w_3 = 3 + i$ границы $|w - i| = 3$.

5 Вычислить $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz$, где путь C – прямолинейный отрезок, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = 2 + i$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z} dz$.

Вариант 2

1 На какую область отображает функция $w = z^2$ квадрат, заданный в плоскости z неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = f(z) = u + iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w = f(z)$, если $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $v = e^x(x\sin y + y\cos y)$, $z_0 = -1 + i\pi$.

3 На какую область в плоскости w отображает функция $w = 3z - 1$ треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(-2;0)$, $C(0;-2)$?

4 Найти линейное отображение с неподвижной точкой $1 - i$, переводящее точку $2 - i$ в точку i.

5 Вычислить $\int\limits_C |z| dz$, где путь C – это: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точку $A(-1;0)$ с точкой $B(1;0)$; б) верхняя половина окружно-

сти $|z|=1$ от точки $A(-1;0)$ до точки $B(1;0)$.

6 Разложить в ряд Тейлора функцию e^z по степеням $2z-1$ и найти радиус сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{z^2+1}{(2z+3)^2\cdot z^2}dz$, где C – эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

Вариант 3

1 При помощи функции $w=2z+1$ найти образ окружности $x^2+y^2=1$ на плоскости w.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=f(z)=u+iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w=f(z)$, если $u=x^3-3xy^2+x^2-y^2$, $v=3x^2y-y^3+2xy$, $z_0=\frac{2}{3}i$.

3 Найти линейное отображение с неподвижной точкой $1+2i$, переводящее точку i в точку $-i$.

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z-1|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w<1$ так, чтобы точки $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=2$ границы $|z-1|=1$перешли соответственно в точки $w_1=1+i$, $w_2=1$, $w_3=1-i$ границы $\operatorname{Re} w=1$.

5 Вычислить $\int\limits_C \frac{1}{z}dz$, где путь C – окружность $|z|=1$ с положительным направлением обхода.

6 Разложить в ряд Тейлора функцию $\ln(2-z)$ по степеням z и найти радиус сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=3} \frac{1}{z^3+4z}dz$.

Вариант 4

1 При помощи функции $w=z^2$ отобразить на плоскость w прямые $x=2$, $y=1$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=f(z)=u+iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w=f(z)$, если $u=e^{1+y}\cos x$, $v=-e^{1+y}\sin x$, $z_0=\frac{\pi}{2}+i$.

3 На какую область в плоскости w отображает функция $w=2z-1$ треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z|<1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы точки $z_1=-1$, $z_2=1$, $z_3=-i$ границы $|z|=1$ перешли соответственно в точки $w_1=0$, $w_2=1$, $w_3=\infty$ границы $\operatorname{Im} w=0$.

5 Вычислить $\int_C \frac{1}{\sqrt{z}}dz$, где путь C – верхняя полуокружность $|z|=1$ с направлением обхода от точки $A(1;0)$ до точки $B(-1;0)$ ($\sqrt{z}$ взять из общей формулы при $k=0$).

6 Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot(z+1)^n}$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$.

Вариант 5

1 При помощи функции $w=-z^2$ отобразить на плоскость w прямую $x+y=1$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=f(z)=u+iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w=f(z)$, если $u=2xy-2x$, $v=y^2-2y-x^2+1$, $z_0=1$.

3 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z-2i|<1$ в круг $|w|<2$ так, чтобы точки $z_1=i$, $z_2=1+2i$, $z_3=3i$ границы $|z-2i|=1$ перешли соответственно в точки $w_1=2$, $w_2=2i$, $w_3=-2i$ границы $|w|=2$.

4 Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i на подобный ему треугольник в плоскости w с вершинами в точках 0, 2, $1+i$.

5 Вычислить интегралы: а) $\int_1^{1+i} z^2dz$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}+i}\sin z dz$.

6 Разложить в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{3z+1}$ по степеням $z+2$ и найти радиус сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int_{|z|=3}\frac{dz}{z^5-z^3}$.

Вариант 6

1 При помощи функции $w = iz + 1$ найти образы осей координат на плоскости w.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = f(z) = u + iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w = f(z)$, если $u = e^{1-2x}\cos 2y$, $v = -e^{1-2x}\sin 2y$, $z_0 = \dfrac{\pi}{3}i$.

3 В какие линии преобразуется семейство окружностей $x^2 + y^2 = by$, где $b = const$, функцией $w = \dfrac{1}{z}$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ в круг $|w| < 1$ так, чтобы точки $z_1 = -i$, $z_2 = 0$, $z_3 = i$ границы $\operatorname{Re} z = 0$ перешли соответственно в точки $w_1 = -1$, $w_2 = i$, $w_3 = 1$ границы $|w| = 1$.

5 Вычислить $\int\limits_C \dfrac{z}{\overline{z}}dz$, где путь C – граница области $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Im} z \ge 0$ с положительным направлением обхода.

6 Разложить в ряд Тейлора функцию $\sin(2z + 1)$ по степеням $z + 1$ и найти радиус сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где C – окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Вариант 7

1 Начертить в комплексной плоскости линию, точки которой удовлетворяют уравнению $\operatorname{Im} z^2 = 2$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = f(z) = u + iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w = f(z)$, если $u = x^3 - 3xy^2 + 3x$, $v = 3x^2y - y^3 + 3y - 1$, $z_0 = e^{i - \frac{\pi}{4}}$.

3 Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i в плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами в точках 0, 4, $2 + 2i$ в плоскости w.

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, чтобы точки $z_1 = \infty$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ границы $\operatorname{Im} z = 0$ перешли соответственно в точки $w_1 = 0$, $w_2 = -i$, $w_3 = \infty$

границы $\operatorname{Re} w = 0$.

5 Вычислить $\int\limits_C \bar{z} dz$, где путь C – это: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = 1 + i$; б) ломанная, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{-n}}{(z - 2 - i)^n}$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{tgz}{z-1} dz$, где C – ромб с вершинами в точках $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -i$.

Вариант 8

1 Начертить в комплексной плоскости линию, точки которой удовлетворяют уравнению $|z+1| + |z-2| = 5$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = f(z) = u + iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w = f(z)$, если $u = e^{1+2y} \cos 2x$, $v = -e^{1+2y} \sin 2x$, $z_0 = \frac{\pi}{6}$.

3 В какие линии в плоскости w отобразит функция $w = z^2$ прямые $x = 1$ и $y = 2$, лежащие в плоскости z?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы точки $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ границы $|z| = 1$ перешли соответственно в точки $w_1 = \infty$, $w_2 = -1$, $w_3 = 2$ границы $\operatorname{Im} w = 0$.

5 Вычислить $\int\limits_0^{2+i} \operatorname{Re} z dz$, если путём интегрирования служат: а) прямолинейный отрезок $z = (2+i)t$, $(0 \le t \le 1)$; б) ломанная, первое звено которой есть прямолинейный отрезок $[0;2]$, а второе – отрезок $[2;2+i]$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{1}{(z+1)^2 (z^2+9)} dz$, где C – окружность $|z+1| = 2$.

Вариант 9

1 Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $2<\left|z-1+2i\right|<4$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=f\left(z\right)=u+iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w=f\left(z\right)$, если $u=x^2+2x-y^2$, $v=2xy+2y$, $z_0=i$.

3 Найти линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках $1+i$, $1+3i$, $3+i$ в плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами в точках 0, 1, i в плоскости w.

4 Для отображения $w=\dfrac{1}{z}$ найти образ пучка прямых $y=kx$.

5 Вычислить $\int\limits_{-1}^{1}\left|z\right|dz$, если путём интегрирования служат: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точку $z_1=-1$ с точкой $z_2=1$; б) верхняя половина окружности радиуса один; *в*) нижняя половина этой окружности.

6 Разложить в ряд Тейлора функцию $\cos^2\dfrac{iz}{2}$ по степеням z и найти радиус сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2-9\right)}dz$.

Вариант 10

1 Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\left|z-1\right|+\left|z-3\right|<3$.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=f\left(z\right)=u+iv$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в заданной точке z_0 при отображении $w=f\left(z\right)$, если $u=e^{-1-y}\cos x$, $v=e^{-1-y}\sin x$, $z_0=\pi-i$.

3 В какие линии на плоскости w преобразуются оси координат плоскости z функцией $w=iz-2$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $\left|z\right|<1$ в круг $\left|w-1\right|<1$ так, чтобы точки $z_1=-1$, $z_2=i$, $z_3=1$ границы $\left|z\right|=1$ перешли соответственно в точки $w_1=0$, $w_2=2$, $w_3=i+1$ границы $\left|w-1\right|=1$.

5 Вычислить $\int\limits_C (z+2\overline{z})dz$, где путь интегрирования C – дуга окружности $|z|=2$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^n (iz)^{-n}$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C z \sin\frac{1}{z^2} dz$, где C – прямоугольник с вершинами в точках $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = 1-2i$, $z_4 = -1-2i$.

Вариант 11

1 Функция $w = z^2$ отображает прямую $x = 2$ плоскости z на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = z^3$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0 = 1+i$.

3 Найти и построить образ параболы $y = x^2$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

4 Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках -4, 0, $-6i$ в плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами в точках $1+i$, $4+i$, $4+3i$ в плоскости w.

5 Вычислить $\int\limits_C (z+5)\cos z dz$, где путь интегрирования C – произвольная линия, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 2i$.

6 Разложить в ряд Тейлора функцию $\sin^2 z$ по степеням z и найти радиус сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^3 (z^2+4)^2} dz$.

Вариант 12

1 Функция $w = z^2$ отображает прямую $y = 1$ плоскости z на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = \frac{1}{z}$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0 = -i$.

3 Найти линейное отображение с неподвижной точкой $z_1 = 1-i$, переводящее точку $z_2 = -\frac{i}{2}$ в точку $w = 2$.

4 Найти и построить область плоскости w, на которую дробно-линейная функция $w=\dfrac{1}{z-2}$ отображает верхний полукруг $|z-1|<1$ плоскости z.

5 Вычислить $\int\limits_C z\cdot\bar{z}dz$, где путь интегрирования C – дуга окружности $|z|=1$, $0\le\arg z\le\pi$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n\cdot 2^n\cdot\ln n}$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=4}\dfrac{z}{\sin z}dz$.

Вариант 13

1 Функция $w=z^2$ отображает гиперболу $xy=1$ плоскости z на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=\sin z$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0=\dfrac{\pi}{2}$.

3 Найти образ окружности $x^2+y^2=1$ при отображении $w=2z+1$.

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Im}w>0$ так, чтобы точки $z_1=-1$, $z_2=1$, $z_3=i$ границы $|z|=1$ перешли соответственно в точки $w_1=\infty$, $w_2=0$, $w_3=1$ границы $\operatorname{Im}w=0$.

5 Вычислить $\int\limits_C\left(2-3z+z^2\right)dz$, где путь интегрирования C – произвольная линия, соединяющая точки $z_1=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ и $z_2=2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z+1-i}{n+i}\right)^n$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z+2|=1}\dfrac{tgz}{z+2}dz$.

Вариант 14

1 Функция $w=z^2$ отображает окружность $x^2+y^2=4$ на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=\cos z$ и найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0=\pi$.

3 В какие линии плоскости w преобразуются оси координат плоскости z функцией $w = iz + 1$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы точки $z_1 = \infty$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ границы $\operatorname{Im} z = 0$ перешли соответственно в точки $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ границы $\operatorname{Im} w = 0$.

5 Вычислить $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz$, где путь интегрирования C – это: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точку $z_1 = 3$ с точкой $z_2 = -3$; б) полуокружность $|z| = 3$, $0 \le \arg z \le \pi$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^n}{z^n}$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1} z \cdot e^{\frac{1}{z}} dz$.

Вариант 15

1 Функция $w = \dfrac{1}{z}$ отображает прямую $y = x$ плоскости z на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Доказать, что функция $w = z^2 + 5z - 7$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

3 Найти образ прямой $x + y = 1$ при отображении $w = z^2$.

4 Найти линейное отображение с неподвижной точкой $z_1 = 1 - i$, переводящее точку $z_2 = 5i$ в точку $w = -1 + i$.

5 Вычислить $\int\limits_C (2z + 1)\bar{z} dz$, где путь интегрирования C – окружность $|z| = 1$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $\dfrac{1}{z(z-1)}$ по степеням $z - 1$ и найти область сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1/2} \dfrac{e^z}{z \cdot (z+1)^2} dz$.

Вариант 16

1 Функция $w=\dfrac{1}{z}$ отображает окружность $x^2+y^2=R^2$ на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Восстановить аналитическую функцию $w=f(z)$ по её действительной части $\operatorname{Re} f(z)=3x^2y-y^3$.

3 В какие линии плоскости w преобразуются оси координат плоскости z функцией $w=iz-2$?

4 Найти дробно-линейную функцию по следующим условиям: точки $\dfrac{1}{2}$ и 2 неподвижны, а точка $\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{4}i$ переходит в ∞.

5 Вычислить $\int\limits_C z^2dz$, где путь интегрирования C – это: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=1+i$; б) ломанная, соединяющая точки $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $\sin\dfrac{1}{z-2}$ по степеням $z-2$ и найти область сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{z}{\cos z}dz$, где C – прямоугольник с вершинами в точках $z_1=-i$, $z_2=2-i$, $z_3=2+i$, $z_4=i$.

Вариант 17

1 Функция $w=\dfrac{1}{z}$ отображает прямую $y=4$ плоскости z на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Восстановить аналитическую функцию $w=f(z)$ по её мнимой части $\operatorname{Im} f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^2$.

3 Показать, что угол между прямыми $y=1$ и $y=x-1$ не изменится при отображении $w=(1+i)z+1-i$.

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z<3$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>-1$ так, чтобы точки $z_1=3i$, $z_2=3i-2$, $z_3=3i+1$ границы $\operatorname{Im} z=3$ перешли соответственно в точки $w_1=-i$, $w_2=-i+1$, $w_3=-i+6$ границы $\operatorname{Im} w=-1$.

5 Вычислить $\int\limits_C \bar{z}dz$, где путь интегрирования C – это: а) прямолинейный отрезок, соединяющий точку $z_1=0$ с точкой $z_2=1+i$; б) дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

6 Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{\left(z+2i\right)^n}$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z-1|=1}\left(z-1\right)\cdot\sin\frac{1}{z-1}dz$.

Вариант 18

1 Функция $w=\frac{1}{z}$ отображает линию $y=x-1$ плоскости z на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Восстановить аналитическую функцию $w=f\left(z\right)$ по её действительной части $\operatorname{Re}f\left(z\right)=x^2-y^2+xy$.

3 На какую область в плоскости (w) отображает функция $w=2z+3$ прямоугольник плоскости z с вершинами в точках $A\left(0;0\right)$, $B\left(-1;0\right)$, $C\left(-1;1\right)$, $D\left(0;1\right)$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Re}z>0$ в круг $\left|w\right|<1$ так, чтобы точки $z_1=-i$, $z_2=0$, $z_3=i$ границы $\operatorname{Re}z=0$ перешли соответственно в точки $w_1=-1$, $w_2=i$, $w_3=1$ границы $\left|w\right|=1$.

5 Объясните, почему можно утверждать, что $\int\limits_C\frac{dz}{z^2+3}$ равен нулю, когда C – окружность $\left|z\right|=1$, но это неверно, когда C – окружность $\left|z\right|=3$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $z^2e^{\frac{1}{z}}$ по степеням z и найти область сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z-2|=1/2}\frac{z}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)^2}dz$.

Вариант 19

1 Функция $w=z^2$ отображает линию $x=a$, где $a=const$, на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Указать точки плоскости, в которых нарушена конформность отображения $w=z^5+5z$.

3 На какую область в плоскости (w) отображает функция $w=2z-1$ прямоугольник с вершинами в точках $\left(0;0\right)$, $\left(1;0\right)$, $\left(1;1\right)$, $\left(0;1\right)$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $\left|z\right|<1$ в круг $\left|w-i\right|<3$ так, чтобы точки $z_1=-1$, $z_2=i$, $z_3=1$ границы $\left|z\right|=1$ перешли соответственно в точки $w_1=-3+i$, $w_2=4i$, $w_3=3+i$ границы $\left|w-i\right|=3$.

5 Объясните, почему можно утверждать, что $\int\limits_0^z \frac{dz}{z^2-9}$ не зависит от пути интегрирования в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, но этого нельзя утверждать для левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $\frac{1-\cos z}{z^2}$ по степеням z и найти область сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z-2\right)}dz$.

Вариант 20

1 Функция $w = z^2$ отображает линию $y = b$, где $b = const$, на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Указать точки плоскости, в которых нарушена конформность отображения $w = \frac{1}{7}z^7 + 64z$.

3 Показать, что угол между прямыми $y = x$ и $y = 0$ не изменится при отображении $w = zi + 1 + i$.

4 На какую область в плоскости w отобразит функция $w = \frac{1-z}{1+z}i$ верхний полукруг $|z| < 1$; $\operatorname{Im} z > 0$?

5 Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{z-1+3i}$, где путь интегрирования C – это: а) окружность $|z| = 2$; б) окружность $|z-1| = 6$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $\frac{1}{z}\sin^2\frac{2}{z}$ по степеням z и найти область сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z\left(z+2\right)\left(z+4\right)}$.

Вариант 21

1 Функция $w = z^2$ отображает линию $y = kx$, где $k = const$, на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Указать точки плоскости, в которых нарушена конформность отображения $w = \frac{1}{3}z^3 - \left(1+i\right)z^2 - z + 2i$.

3 На какую область в плоскости w отображает функция $w = 2z - 1$ треугольник с вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы точки $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ границы $\operatorname{Im} z = 0$ перешли соответственно в точки $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$ границы $|w| = 1$.

5 Вычислить $\int\limits_C \bar{z} dz$, где C – замкнутый контур $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $\dfrac{e^z - 1}{z}$ по степеням z и найти область сходимости ряда.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{z^2}{z-a} dz$, где C – окружность $|z| = R$, $R > |a|$.

Вариант 22

1 Функция $w = \dfrac{z}{z-i}$ отображает прямую $y = x$ на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w = \dfrac{1}{z}$ в области $D = \{ z \in \mathbb{C} | z \ne 0 \}$ и найти производную этой функции.

3 На какую область в плоскости (w) отображает функция $w = iz + 1$ треугольник, ограниченный линиями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$?

4 Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы точки $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$ границы $\operatorname{Im} z = 0$ перешли соответственно в точки $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ границы $\operatorname{Im} w = 0$.

5 Вычислить $\int\limits_C \dfrac{1}{z-4} dz$, где C – эллипс $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в кольце $2 < |z| < 3$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_C \dfrac{z}{(z-a)(z-b)} dz$, где C – окружность $|z| = R$, $R > |a|$, $R > |b|$, $a \ne b$.

Вариант 23

1 Функция $w=\dfrac{z}{z-i}$ отображает прямую $y=x+1$ на плоскость w. Найти соответствующий образ.

2 Проверить выполнимость условий Коши-Римана для функции $w=z^2-2iz$ на комплексной плоскости и найти её производную.

3 Найти и построить образ параболы $y=x^2$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$.

4 Найти линейное отображение с неподвижной точкой $z_1=1-i$, переводящее точку $z_2=2-i$ в точку $w=i$.

5 Вычислить $\int\limits_C \dfrac{1}{z-(1+i)}dz$, где C – окружность $|z-(1+i)|=1$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в кольце $3<|z|<\infty$.

7 С помощью вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{z}{(z-i)(z-3)}dz$.

Список литературы

1 **Пантелеев, А. В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие для вузов / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – 2-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 445 с.

2 Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов. – 2-е изд. / В. А. Болтов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М. : Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1986. – 368 с.

3 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 576 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2005. – Ч. 2. – 256 с.

5 Функции комплексного переменного. Задачи и упражнения / М. Л. Краснов [и др.]. – М. : Наука, 1981.