ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты индивидуального задания для студентов электротехнических специальностей дневной и заочной форм обучения

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Могилёв 2009

УДК 517.33
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» января 2009 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель Ю. Т. Юденков

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

Методические указания содержат рекомендации, индивидуальные задания и образцы решения задач по разделу «Элементы операционного исчисления».

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнев

Технический редактор А. Т. Червинская

Компьютерная вёрстка И. А. Алексеюс

Подписано в печать 17.12.2009 . Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.4. Уч.-изд. л. 1.2. Тираж 99 экз. Заказ № 869.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

Содержание

Введение

Основателями операционного исчисления по праву считаются русские учёные М. Е. Ващенко-Захарченко и А. В. Летников. Именно в работах этих учёных впервые решены основные задачи метода, впоследствии названного ***операционным***. Операционное исчисление стало широко применяться после того, как английский инженер-электрик О. Хевисайд получил ряд важных результатов в электротехнических расчётах с применением этого символического метода.

Идея операционного метода заключается в следующем. Предположим, что нам требуется найти (получить) функцию f(t) действительного аргумента, которая содержится под знаками производных и(или) интегралов в некоторых уравнениях. Тогда для решения этой задачи требуется выполнить четыре последовательных шага:

1) от искомой функции f(t) переходят к функции F(p) – изображению (говорят: переходят из пространства оригиналов в пространство изображений);

2) над F(p) производят некоторые операции, которые соответствуют операциям над f(t); при этом операциям в пространстве оригиналов соответствуют **более простые** операции в пространстве изображений;

3) задачу в пространстве изображений решают относительно F(p);

4) от найденного изображения F(p) переходят к искомой функции f(t).

1 Теоретическая часть

1.1 Оригинал и изображение по Лапласу

Определение [1]. ***Оригиналом*** называется функция f(t), которая удовлетворяет требованиям:

– f(t) непрерывна вместе со всеми своими производными достаточно высокого порядка для всех $t \ge 0$, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода на каждом интервале конечной длины;

– f(t) = 0 при $t < 0$;

– f(t) возрастает не быстрее экспоненты (т. е. существуют $M > 0$ и $s_o \ge 0$ такие, что для всех t справедливо $|f(t)| < Me^{-s_0 t}$).

Число s_o называют показателем роста f(t). Для ограниченных функций его обычно берут равным нулю.

Пример 1. Функция h(t) = $\begin{cases} 0, \text{ если } t < 0, \\ 1, \text{ если } t \ge 0 \end{cases}$ будет оригиналом, т. к. удовлетворяет всем требования определения, $s_o = 0$. Эту функцию часто называют **единичной функцией Хевисайда**.

Пример 2. Функция f(t) = $\dfrac{1}{1+t^2}$ h(t)= $\begin{cases} 0, \text{ если } t < 0, \\ \dfrac{1}{1+t^2}, \text{ если } t \ge 0 \end{cases}$ будет оригиналом, т. к. удовлетворяет всем требования определения и $s_o = 0$.

Пример 3. Функция f(t) = tgt h(t) = $\begin{cases} 0, \text{ если } t < 0, \\ \mathrm{tg}t, \text{ если } t \ge 0 \end{cases}$ не будет оригиналом, т. к. не удовлетворяет первому требованию определения (функция терпит бесконечный разрыв 2-го рода в точках $(2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$).

Комментарий. В дальнейшем при записи f(t) везде будет отсутствовать множитель h(t). Тем не менее его присутствие предполагается по умолчанию, **если не оговорено иное**.

Определение. ***Изображением функции f(t) по Лапласу*** называется функция F(p) комплексного переменного p = s + iω, которая определена равенством $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}dt$.

Предполагается, что несобственный интеграл сходится. А это гарантируется, если f(t) оригинал (см. теорему существования). Функция F(p) является аналитической в области Re $p > s_o$, т. е. $s > s_o$.

Получение функции F(p) (вычисление интеграла) называют прямым преобразованием Лапласа и записывают результат так $f(t) \mapsto F(p)$ или так L(f(t)) = F(p).

Пример 4. Пользуясь определением, найдите изображение по Лапласу для функции f(t) = sin3t.

Решение

Данная функция будет оригиналом (наличие множителя h(t) предполагается, а требования определения оригинала выполнены). Вычислим

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \sin t\, e^{-pt}dt = \begin{bmatrix}\text{интегрируем по}\\ \text{частям или берём из}\\ \text{справочника}\end{bmatrix} = \lim_{b\to+\infty}(-\,p\sin 3t -$$

$$-\,3\cos 3t)\frac{e^{-pt}}{p^2+9}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty}[(-\,p\sin 3b - 3\cos 3b)\ \frac{e^{-pb}}{p^2+9} - (-\,p\sin 0 - 3\cos 0)\ \frac{e^{-p0}}{p^2+9}] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(-p\sin 3b - 3\cos 3b)}{e^{pb}(p^2+9)} + \frac{3}{p^2+9}\right] = \frac{3}{p^2+9} \text{ при } \operatorname{Re} p > 0.$$

Ответ: $\sin 3t \mapsto \dfrac{3}{p^2+9}$.

Комментарий:

– экспонента при указанных условиях растёт быстрее любой степенной функции, а тригонометрические функции ограничены. Поэтому первое слагаемое под знаком предела обращается в нуль;

– интересен тот факт, что изображением «нечётной» функции служит «чётная» функция. Здесь термины чёт-нечёт условны и НЕ совпадают с общепринятыми (см. определение оригинала).

Определённая таким образом функция F(p) обладает специфическими свойствами. Перечислим эти свойства без доказательств.

1 Поведение изображения на бесконечности: $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p = = s \to +\infty$. Это один из способов контроля найденного изображения.

2 Однородность. $L(\lambda f(t)) = \lambda F(p)$.

3 Аддитивность. $L(f_1(t) + f_2(t)) = F_1(p) + F_2(p)$.

4 Подобие. Если $L(f(t)) = F(p)$, то $L(f(\alpha t)) = \dfrac{1}{\alpha}\ F(\dfrac{p}{\alpha})$.

Пример 5. Зная табличное изображение для $\sin t \mapsto \dfrac{1}{p^2+1}$, легко найти изображение для sin3t. В самом деле, $L(\sin 3t) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{3}\right)^2+1} = \dfrac{3}{p^2+9}$,

т. е. $\sin 3t \mapsto \dfrac{3}{p^2+9}$, что и было найдено в примере 4.

Комментарий. Знание большого числа свойств позволяет более смело и эффективно осуществлять переход из пространства оригиналов в пространство изображений и контролировать правильность результатов.

5 Правило затухания (теорема смещения). Если $f(t) \mapsto F(p)$, то изображением для $e^{\alpha t} f(t)$ будет $F(p - \alpha)$ для всех p, для которых $\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re} \alpha$ (α – любое комплексное).

Комментарий. Появление экспоненты в качестве множителя перед функцией приводит к сдвигу в пространстве изображений.

6 Дифференцирование оригинала. Если $f'(t)$ оригинал и $f(t) \mapsto F(p)$, то изображением для $f'(t)$ будет $pF(p) - f(+0)$, где $f(+0)$ – правосторонний предел.

Комментарий:

– если $f(+0) = 0$ (обычная реальная ситуация в технике), то $f'(t) \mapsto pF(p)$. Это значит, что операция дифференцирования оригинала эквивалентна в пространстве изображений обычному умножению на комплексное число p;

– если учесть поведение изображения на бесконечности (свойство 1), то мы обнаружим, что изображение производной оригинала стремится к нулю ***медленнее***, чем изображение самой функции. Это оказывается удобным при исследовании физических систем на устойчивость;

– если распространить это свойство на производные высших порядков ($n > 1$), то получим обобщённую формулу для изображения производной порядка n: $f^{(n)}(t) \mapsto p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - p^{n-3} f''(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0)$.

7 Интегрирование оригинала. Если $f(t) \mapsto F(p)$, то $\int_0^t f(u)du \mapsto \frac{F(p)}{p}$.

Комментарий:

– это значит, что операция интегрирования оригинала эквивалентна в пространстве изображений обычному делению на комплексное число p;

– при исследовании физических систем на устойчивость к помехам это свойство указывает на улучшение устойчивости, т. к. изображение интеграла от функции ***быстрее*** стремится к нулю, чем сама функция.

8 Дифференцирование изображения. Если $f(t) \mapsto F(p)$, то $-tf(t) \mapsto F'_p(p)$.

Обобщение этого соотношения : $(-1)^n tf(t) \mapsto F^{(n)}{}_p(p)$.

9 Интегрирование изображения. Если $f(t) \mapsto F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал, то справедливо равенство $\frac{f(t)}{t} \mapsto \int_p^{\infty} F(u)du$.

10 Сдвиг в оригинале (теорема запаздывания). Если $f(t) \mapsto F(p)$, то $f(t - \tau) \mapsto e^{-p\tau} F(p)$ для любого $\tau > 0$.

11 Изображение периодической функции. Если $\phi(t)$ задана на $[0; T]$ и $\int_0^T e^{-pt}\phi(t)dt = \Phi(p)$, то T-периодическая функция $f(t)$, равная $\phi(t)$ на $[0; T]$, имеет изображение $\frac{\Phi(p)}{1-e^{-p}}$.

12 Свёртка функций. Свёрткой $f(t)\cdot\phi(t)$ функций $f(t)$ и $\phi(t)$ называется функция (любое из выражений) $\int\limits_0^t f(u)\phi(t-u)du \equiv \int\limits_0^t \phi(u)f(t-u)du$.

Говорят: результат **свёртывания** один и тот же при любом порядке свёртываемых функций.

Изображением свёртки $f(t)\cdot\phi(t)$ функций $f(t)$ и $\phi(t)$ будет произведение изображений свёртываемых функций, т. е. $f(t)\cdot\phi(t) \mapsto F(p)\Phi(p)$.

13 Формула Дюамеля.

$pF(p)\Phi(p) \mapsto f(0)\phi(t) + \int\limits_0^t f'(u)\phi(t-u)du$ или аналогичная ей $pF(p)\Phi(p) \mapsto \phi(0)f(t) + \int\limits_0^t \phi'(u)f(t-u)du$.

14 Предельные соотношения. Если $f(t) \mapsto F(p)$ и $f'(t)$ оригинал, то $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = \lim\limits_{t\to 0} f(t)$ – первое предельное соотношение и $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = \lim\limits_{t\to 0} f(t)$ – второе предельное соотношение.

Выше приведен основной математический аппарат для перехода из пространства оригиналов в пространство изображений.

Как ранее сказано во введении, на четвёртом шаге применения операционного исчисления следует восстановить искомую функцию по её изображению. Основной математический аппарат для перехода из пространства изображений в пространство оригиналов приведен ниже.

15 Прямое восстановление изображения по определению выполняют (если возможно) в равенстве $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp$ в предположении, что несобственный интеграл справа сходится.

Ввиду затруднений при вычислении такого рода интегралов способ практически не реализуем.

16 Поиск готовых ответов в таблице 1 соответствия $f(t) \mapsto F(p)$.

Таблица 1 – Простейшая таблица соответствия оригинал-изображение

Номер соответствия	Оригинал	Изображение	Номер соответствия	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$	5	$\cos\varpi t$	$\frac{p}{p^2+\varpi^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	6	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	7	$e^{\alpha t}\sin\varpi t$	$\frac{\varpi}{(p-\alpha)^2+\varpi^2}$
4	$\sin\varpi t$	$\frac{1}{p^2+\varpi^2}$	8	$e^{\alpha t}\cos\varpi t$	$\frac{\alpha}{(p-\alpha)^2+\varpi^2}$

Так как такая таблица может оказаться малоинформативной, то рассмотрим косвенные методы восстановления оригиналов.

17 Разложение изображения F(p) в степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(p)$ с последующим использованием свойств 2 и 3 и таблицы 1 $f(t) \mapsto F(p)$. При этом следует помнить, что степенной ряд для изображения F(p) должен быть **только главной частью** ряда Лорана (содержать только отрицательные степени переменного p).

18 Если изображение F(p) есть дробно-рациональная функция $\dfrac{\Phi_n(p)}{\Psi_m(p)}$ (правильная дробь m > n), то следует разложить дробь на простейшие и каждую простейшую дробь преобразовать к одному из табличных соответствий $f(t) \mapsto F(p)$, которые укажут для каждого слагаемого свой оригинал. Затем по свойствам 2 и 3 получают искомый оригинал f(t).

19 В некоторых случаях удобно использовать вычеты функции $F(p)e^{pt}$. Тогда оригинал можно восстановить из равенства $f(t) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{a_k}\left(F(p)e^{pt}\right)$, в котором $a_к$ – особые точки **типа полюс** функции F(p), $\operatorname*{Res}_{a_k}$ – это символ вычета, r – число таких вычетов.

2 Расчётно-графическая часть

2.1 Решение типового задания

Задача 1. Укажите, какие из функций будут оригиналами, какие не будут оригиналами, и по какой причине:

а) $f(t) = t^4 \cdot h(t)$; б) $f(t) = \ln t \cdot h(t)$; в) $f(t) = 2\operatorname{tg} t \cdot h(t-2)$.

Решение:

а) функция $t^4 \cdot h(t)$ будет оригиналом, т. к. она непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$ и растёт не быстрее экспоненты, что легко проверить, вычислив по правилу Лопиталя предел $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{t^4}{e^t} = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\left(t^4\right)'}{\left(e^t\right)'} = \ldots = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{e^t} = 0$;

б) функция $\ln t \cdot h(t)$ не будет оригиналом, т. к. она имеет бесконечный разрыв в точке t = 0, что легко проверить, вычислив $\lim\limits_{t\to+0} \ln t = -\infty$;

в) $f(t) = 2\operatorname{tg} t \cdot h(t-2)$ не будет оригиналом, т. к. имеет бесконечно много разрывов справа от точки t = 2.

Задача 2. Вычислите изображение функции f(t) = t:

а) по определению;

б) по свойству 7.

Решение:

а) имеем $L(t)= \int\limits_0^{+\infty} t\, e^{-pt}dt = \left[\begin{array}{c} \text{используем формулу из} \\ \text{справочника } \int xe^{ax}dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) \end{array} \right] =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{-pt}}{p^2}(-pt-1)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{-pb}}{p^2}(-pb-1)-\frac{e^{-p0}}{p^2}(-p0-1)\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{pb+1}{e^{pb}p^2}+\frac{1}{p^2}\right)=$$

$=\dfrac{1}{p^2}$, т. к. первое слагаемое под знаком предела стремится к нулю (см. задачу 1).

Задача 3. Задана функция $F(p) = \dfrac{1}{1+p^4}$ аргумента p. Выясните, может ли она быть изображением некоторого оригинала в некоторой области. Укажите эту область и восстановите оригинал по изображению двумя способами.

Решение

Так как свойство 1 выполняется, то можно утверждать, что F(p) – изображение. А так как эта функция аналитична на всей комплексной плоскости, кроме нулей знаменателя, то, решив уравнение $1 + p^4 = 0$, мы получим простые полюсы функции F(p): $p_к = \sqrt[4]{-1} = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4} + i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{4}$. Следовательно, F(p) будет изображением в области $\mathrm{Re}\, p = s > 1$. Это легко установить, расположив точки $p_к$ на комплексной плоскости в вершинах квадрата со стороной 1, вписанного в соответствующую окружность.

Восстановим изображение.

Первый способ. Сначала представим F(p) в виде $F(p) = \dfrac{1}{1+p^4} =$

$$=\frac{1}{p^4}\frac{1}{1+\dfrac{1}{p^4}} = \frac{1}{p^4}\left(1 - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^8} - \ldots\right) = \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^{12}} - \ldots$$

– степенного ряда, который сходится на всей комплексной плоскости за исключением точки p = 0. Теперь используем свойство 3 и табличные изображения для степенной функции и получим $f(t) = \dfrac{t^3}{3!} - \dfrac{t^7}{7!} + \dfrac{t^{11}}{11!} - \ldots$

Второй способ. Запишем найденные полюсы функции в несколько ином виде: $p_o = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $p_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$, $p_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i)$, $p_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$.

Воспользуемся основной теоремой о вычетах (см. свойство 19) и получим $f(t) = \operatorname*{Res}_{p_o}\left(\frac{e^{pt}}{1+p^4}\right) + \operatorname*{Res}_{p_1}\left(\frac{e^{pt}}{1+p^4}\right) + \operatorname*{Res}_{p_2}\left(\frac{e^{pt}}{1+p^4}\right) + \operatorname*{Res}_{p_3}\left(\frac{e^{pt}}{1+p^4}\right) =$

$$= \left.\frac{e^{pt}}{(1+p^4)'}\right|_{p=p_o} + \left.\frac{e^{pt}}{(1+p^4)'}\right|_{p=p_1} + \left.\frac{e^{pt}}{(1+p^4)'}\right|_{p=p_2} + \left.\frac{e^{pt}}{(1+p^4)'}\right|_{p=p_3} = \frac{1}{4}\left(\left.\frac{e^{pt}}{p^3}\right|_{p=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} +\right.$$

$$\left.+ \left.\frac{e^{pt}}{p^3}\right|_{p=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)} + \left.\frac{e^{pt}}{p^3}\right|_{p=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)} + \left.\frac{e^{pt}}{p^3}\right|_{p=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)t}}{(1+i)^3} + \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)t}}{(-1+i)^3} +\right.$$

$$\left.+ \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)t}}{(-1-i)^3} + \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)t}}{(1-i)^3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)t}}{2(1-i)} + \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)t}}{2(1+i)} + \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)t}}{2(1-i)} - \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)t}}{2(1+i)}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)t}}{1-i} - \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)t}}{1+i} + \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)t}}{1+i} + \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)t}}{1-i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(e^{it}(1+i) + e^{-it}(1-i)) +\right.$$

$$\left.+ e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}(e^{it}(1-i) + e^{-it}(1+i))\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(e^{it}(1+i) + e^{-it}(1-i)) + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}(e^{it}(1-i) +$$

$$+ e^{-it}(1+i))) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}((\sin t + i\cos t)(1+i) + (\sin t - i\cos t)(1-i)) + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}((\sin t +$$

$$+ i\cos t)(1-i) + (\sin t - i\cos t)(1+i))) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(\sin t + i\sin t + i\cos t - \cos t + \sin t -$$

$$- i\sin t + i\cos t + \cos t) + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}(\sin t - i\sin t + i\cos t + \cos t + \sin t + i\sin t - i\cos t + \cos t)) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(-2e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}e^{t} + 2e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}(\sin t + \cos t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e^{t(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)} + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}(\sin t + \cos t)).$$

Задача 4. Операторным методом решите задачу Коши для линейного дифференциального уравнения $\begin{cases} x'' + x' = t + e^{-t}, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

Решение

Пусть изображением искомой функции x(t) будет функция X(p). Тогда по свойству 6 получаем изображения для производных: $x'(t) \mapsto pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$ и $x''(t) \mapsto p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p + 1$.

Изображение для правой части дифференциального уравнения найдём по элементарной таблице 1 соответствия оригинал-изображение:

$t + e^t \mapsto \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p-1}$. Задача Коши принимает вид: $p^2X(p) - p + 1 + pX(p) - 1 = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p-1}$. Получено линейное алгебраическое уравнение с одним неизвестным – изображением X(p) искомого решения x(t) задачи Коши. Найдём $X(p) = \dfrac{p + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p-1}}{p(p+1)} = \dfrac{p^3(p-1) + p - 1 + p^2}{p^3(p^2-1)} = \dfrac{p^4 - p^3 + p^2 + p - 1}{p^3(p^2-1)}$. Контроль: получено изображение, которое удовлетворяет свойству 1. Можно утверждать, что процесс поиска изображения выполнен правильно.

Изображение имеет вид правильной дроби, знаменатель которой имеет действительные корни (нули) $p_1 = 0$ (кратности к = 3), $p_2 = 1$ и $p_3 = -1$ (оба кратности 1), т. е. простые нули. Воспользуемся разложением правильной дроби на простейшие. Имеем $\dfrac{p^4 - p^3 + p^2 + p - 1}{p^3(p^2-1)} = \dfrac{A_1}{p-1} + \dfrac{A_2}{p+1} + \dfrac{A_3}{p} + \dfrac{A_4}{p^2} + \dfrac{A_5}{p^3} = \dfrac{A_1p^3(p+1) + A_2p^3(p-1) + A_3p^2(p^2-1) + A_4p(p^2-1) + A_5(p^2-1)}{p^3(p^2-1)}$. Так как дроби равны и знаменатели их равны, то получаем $p^4 - p^3 + p^2 + p - 1 = A_1p^3(p+1) + A_2p^3(p-1) + A_3p^2(p^2-1) + A_4p(p^2-1) + A_5(p^2-1)$.

Для вычисления коэффициентов A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5) используем метод неопределённых коэффициентов:

а) вычислим это равенство при некоторых значениях p;

б) если этого окажется недостаточно, чтобы найти неизвестные коэффициенты, то приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p.

Положим, p = 0. Тогда получаем $-1 = -A_5$. Откуда $A_5 = 1$. Пусть p = 1, тогда получаем $1 = 2A_1$. Откуда $A_1 = 0{,}5$. Пусть p = –1, тогда получаем $1 = -2A_2$. Откуда $A_2 = -0{,}5$. Положим p = i. Тогда получим $1 + 2i = -iA_1(i+1) - iA_2(i-1) + 2A_3 - 2iA_4 - 2A_5$ или, записав правую часть равенства в виде комплексного числа, получим $-1 + 2i = (A_1 + A_2 + 2A_3 - 2A_5) + i(-A_1 + A_2 - 2A_4)$. Используем уже найденные значения $A_5 = 1$, $A_1 = 0{,}5$, $A_2 = -0{,}5$. Тогда получаем $-1 + 2i = (-2A_3 - 2) + i(-2A_4)$. Так как записано равенство двух комплексных чисел, то получаем $-2A_3 - 2 = -1$ и $-2A_4 = 2$. Откуда $A_3 = -0{,}5$ и $A_4 = -1$. Получаем разложение правильной дроби на простейшие: $\dfrac{p^4 - p^3 + p^2 + p - 1}{p^3(p^2-1)} = 0{,}5\dfrac{1}{p-1} - 0{,}5\dfrac{1}{p+1} - 0{,}5\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p^3}$.

Искомое решение x(t) найдём по элементарной таблице соответствия оригинал-изображение и свойствам 2 и 3: $x(t) = 0{,}5(e^t - e^{-t} - t - 2t^2 + t^3)$.

Задача 5. Операторным методом решите задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y, \; x(0) = 1, \\ y' = 6x + 4y, y(0) = -1. \end{cases}$$

Решение

Пусть изображениями искомых функций x(t) и y(t), которые образуют решение системы {x(t) , y(t)}, будут соответственно функции X(p) и У(p). Тогда по свойству 6 получаем изображения для производных: $x'(t) \mapsto pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$ и $y'(t) \mapsto pУ(p) - y(0) = pУ(p) + 1$. Система принимает вид: $\begin{cases} pX(p) - 1 = 7X(p) + 3Y(p), \\ pY(p) + 1 = 6X(p) + 4Y(p). \end{cases}$

Это система линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными X(p) и У(p). Решаем систему любым удобным методом (по Крамеру, по Гауссу, обращением матрицы и т. д.).

$$\begin{cases} (7 - p)X(p) + 3Y(p) = -1, \\ 6X(p) + (4 - p)Y(p) = 1. \end{cases}$$

Решим её по Крамеру. Определитель системы равен (7 – p)(4 – p) –18 = $= p^2 - 11p + 10 \neq 0$. Поэтому X(p) = $\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4-p \end{vmatrix}}{p^2 - 11p + 10} = \dfrac{p - 7}{p^2 - 11p + 10}$. Аналогично

У(p) = $\dfrac{\begin{vmatrix} 7-p & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{p^2 - 11p + 10} = \dfrac{-p + 13}{p^2 - 11p + 10}$.

Контроль: оба изображения удовлетворяют свойству 1.

Так как каждое изображение имеет вид правильной дроби, знаменатель которой имеет действительные корни (нули трёхчлена) $p_1 = 10$ и $p_2 = 1$, то воспользуемся разложением правильной дроби на простейшие. Имеем $\dfrac{p - 7}{p^2 - 11p + 10} = \dfrac{A}{p - 10} + \dfrac{B}{p - 1} = \dfrac{A(p - 1) + B(p - 10)}{(p - 1)(p - 10)}$. Так как дроби равны и знаменатели их равны, то получаем p – 7 = A(p – 1) + B(p – 10). Подставим в это равенство p = 1 и получим –6 = –9B, откуда B = $\dfrac{2}{3}$. Если же в равенство подставить p = 10, то получим 3 = 9A, откуда A = $\dfrac{1}{3}$. После этого получаем X(p) = $\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p - 10} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{p - 1}$. Теперь по свойствам 2 и 3 и элементарной таблице 1 соответствия оригинал-изображение получаем оригинал $x(t) = \frac{1}{3}e^{10t} + \frac{2}{3}e^{t}$.

По аналогичной схеме получим $y(t) = \frac{1}{3}e^{10t} - \frac{4}{3}e^{t}$. В самом деле, $\frac{-p+13}{p^2-11p+10} = \frac{A}{p-10} + \frac{B}{p-1} = \frac{A(p-1)+B(p-10)}{(p-1)(p-10)}$. Так как дроби равны и знаменатели их равны, то получаем $-p + 13 = A(p - 1) + B(p - 10)$. Подставим в это равенство $p = 1$ и получим $12 = -9B$, откуда $B = -\frac{4}{3}$. Если же в равенство подставить $p = 10$, то получим $3 = 9A$, откуда $A = \frac{1}{3}$. После этого получаем $У(p) = \frac{1}{3}\frac{1}{p-10} - \frac{4}{3}\frac{1}{p-1}$. Теперь по свойствам 2 и 3 и элементарной таблице 1 соответствия оригинал-изображение получаем оригинал $y(t) = \frac{1}{3}e^{10t} - \frac{4}{3}e^{t}$.

Ответ: решением данной задачи Коши будет $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^{10t} + \frac{2}{3}e^{t}, \\ y(t) = \frac{1}{3}e^{10t} - \frac{4}{3}e^{t}. \end{cases}$

3 **Варианты заданий для индивидуальной работы**

Задача 1. Укажите, какие из функций будут оригиналами, какие не будут оригиналами и по какой причине. Постройте схематические графики.

1 а) $f(t) = e^{(2+4i)i}\,h(t)$; б) $f(t) = \mathrm{tg}t \cdot h(t)$; в) $f(t) = \frac{1}{t-2}h(t-2)$.

2 а) $f(t) = e^{(2+4t)}\,h(t)$; б) $f(t) = t^2h(t)$; в) $f(t) = \ln t\, h(t-1)$.

3 а) $f(t) = \sin^2 t\, h(t)$; б) $f(t) = \frac{1}{\sin t}h(t-\pi)$; в) $f(t) = (t-5)^3\, h(t)$.

4 а) $f(t) = \sin(t-3)\,h(t)$; б) $f(t) = t^{-2}h(t-2)$; в) $f(t) = 10t^5\, h(t)$.

5 а) $f(t) = (t-3)^{-3}\,h(t)$; б) $f(t) = t^2h(t-1)$; в) $f(t) = -17t\, h(t)$.

6 а) $f(t) = \sqrt{t+7}\; h(t)$; б) $f(t) = 5^{-2+t}h(t-2)$; в) $f(t) = (t^2 + 2t + 1)\, h(t)$.

7 а) $f(t) = (t^2 - 3)\,h(t-3)$; б) $f(t) = \sqrt{t}\; h(t)$; в) $f(t) = \ln(t-1)h(t-1)$.

8 а) $f(t) = -t^3\, h(t)$; б) $f(t) = t^{-1}\cdot h(t-2)$; в) $f(t) = (t^3 - 3)h(t)$.

9 а) $f(t) = \cos(t)\,h(t-1)$; б) $f(t) = 2^{\frac{1}{t-1}}h(t-4)$; в) $f(t) = 10^{5t}\, h(t)$.

10 а) $f(t) = \frac{1}{t^2+1}\, h(t)$; б) $f(t) = t^t h(t)$; в) $f(t) = \frac{2^{5t}}{t}h(t-1)$.

11 а) $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\,h(t)$; б) $f(t) = t^{-1}h(t-1)$; в) $f(t) = 10\,h(t)$.

12 а) $f(t) = e^{t^2}\,h(t)$; б) $f(t) = \cos^2 t\cdot h(t)$; в) $f(t) = 2^{\frac{1}{t-1}}h(t)$.

Задача 2. Вычислите изображение функции.

1 Вычислите изображение функции $f(t) = t^2$: а) по определению; б) по свойству 8.

2 Зная $t \mapsto \dfrac{1}{p^2}$, вычислите изображение функции $f(t) = te^t$: а) по определению; б) по свойству 5.

3 Зная $t \mapsto \dfrac{1}{p^2}$, вычислите изображение функции $f(t) = 5$: а) по определению; б) по свойству 6.

4 Зная $e^t \mapsto \dfrac{1}{p-1}$, вычислите изображение функции $f(t) = e^{\pi t}$: а) по определению; б) по свойству 4.

5 Зная $\sin t \mapsto \dfrac{1}{1+p^2}$, вычислите изображение функции $f(t) = \cos t$: а) по свойству 6; б) по свойству 7.

6 Зная $\sin t \mapsto \dfrac{1}{1+p^2}$, вычислите изображение функции $f(t) = \sin 5t$: а) по свойству 4; б) по определению.

7 Зная $\cos t \mapsto \dfrac{p}{1+p^2}$, вычислите изображение функции $f(t) = \sin t$: а) по свойству 4; б) по определению.

8 Зная $\cos t \mapsto \dfrac{p}{1+p^2}$, вычислите изображение функции $f(t) = e^{\pi t}\cos t$: а) по свойству 5; б) по определению.

9 Найдите свёртку функций $f(t) = e^{3t}$ и $\phi(t) = t$ и её изображение.

10 Найдите изображение 4-периодической функции, заданной для всех t на отрезке [0; 4]выражением $f(t) = 0{,}5t - 1$.

11 Найдите свёртку функций $f(t) = \sin 2t$ и $\phi(t) = t - 1$ и её изображение.

12 Найдите свёртку функций $f(t) = \cos t$ и $\phi(t) = 2 - t$ и её изображение.

13 Найдите свёртку функций $f(t) = t^2 + 1$ и $\phi(t) = t - 1$ и её изображение.

14 Вычислите изображение функции $f(t) = \cos^2(t-1)$: а) по свойству 10; б) по определению.

15 Вычислите изображение функции $\int_0^t \cos\tau d\tau$: а) по свойству 7; б) по определению.

16 Вычислите изображение функции f(t) = 2sintcost: а) по свойству 4; б) по определению.

17 Вычислите изображение функции f(t) = $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\cos\tau d\tau$ двумя любыми способами.

18 Вычислите изображение функции f(t) = $\int\limits_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau$ двумя любыми способами.

19 Вычислите изображение функции f(t) = $\int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}\tau^2 d\tau$ двумя любыми способами.

20 Вычислите изображение функции f(t) = sin(t – 1)cost двумя любыми способами.

21 Вычислите изображение функции f(t) = sin(t – 1): а) по свойству 10; б) по определению.

Задача 3. Задана функция F(p) аргумента p. Выясните, может ли она быть изображением некоторого оригинала в некоторой области. Укажите эту область и восстановите оригинал по изображению двумя способами.

1 F(p) = $\frac{p}{p^2-2p+5}$.

2 F(p) = $\frac{1}{p^3-8}$.

3 F(p) = $\frac{1}{p(1+p^4)}$.

4 F(p) = $\frac{p}{p^2+4p+5}$.

5 F(p) = $\frac{1}{p^3-1}$.

6 F(p) = $\frac{1}{p(1+p^3)}$.

7 F(p) = $\frac{p}{p^2+4p+3}$.

8 F(p) = $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

9 F(p) = $\frac{p}{(1+p^2)^2}$.

10 $F(p) = \dfrac{1}{p + 2p^2 + p^3}$.

11 $F(p) = \dfrac{p}{p^3 - 8}$.

12 $F(p) = \dfrac{p}{(1 + 2p^2 + p^4)}$.

13 $F(p) = \dfrac{p}{p^4 - 2p^2 + 1}$.

14 $F(p) = \dfrac{p^2}{p^3 - 8}$.

15 $F(p) = \dfrac{1}{p^3(1 + p)}$.

Задача 4. Операторным методом решите задачу Коши для линейного дифференциального уравнения.

1 $\begin{cases} x'' + x' = 1, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x'' + 3x' = e^t, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x'' - 2x' = e^{2t}, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x''' + x' = 1, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$

6 $\begin{cases} x'' + 2x' = t\sin t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x'' + 2x' + x = \sin t, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x'' - 2x' + x = e^t, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$

9 $\begin{cases} x'' + x = 2\sin t, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

10 $\begin{cases} x''-2x'+x=t-\sin t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

11 $\begin{cases} x''+2x'+x=2\cos^2 t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

12 $\begin{cases} x''+4x=2\cos t\cos 3t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

13 $\begin{cases} x''-x'=te^{-t}, \\ x(0)=1,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

14 $\begin{cases} x''+x'=4\sin^2 t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=-1. \end{cases}$

15 $\begin{cases} x''-x'=t^2, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=1. \end{cases}$

16 $\begin{cases} x''+x=t\cos 2t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

17 $\begin{cases} x''+4x=\sin t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

18 $\begin{cases} x''+x=t\cos t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

19 $\begin{cases} x''+x'+x=te^{t}, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

20 $\begin{cases} x'''+x'=e^{2t}, \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0. \end{cases}$

21 $\begin{cases} x''-x=t\cos 2t, \\ x(0)=1,\ \ x'(0)=-1. \end{cases}$

22 $\begin{cases} x''+x=t+e^{t}, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

23 $\begin{cases} x''+4x=t-\sin t, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

24 $\begin{cases} x''+x=t-t^2, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

25 $\begin{cases} x''+x'+x=-t+e^{t}, \\ x(0)=0,\ \ x'(0)=0. \end{cases}$

26 $\begin{cases} x''' + x' = 2t + e^{2t}, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases}$

27 $\begin{cases} x'' - x = t - \cos 2t, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

28 $\begin{cases} x'' - x' = t + e^{-2t}, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \end{cases}$

29 $\begin{cases} x'' + x' = -3\cos^2 t, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1. \end{cases}$

30 $\begin{cases} x'' - x' = t^2 + e^{t}, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1. \end{cases}$

Задача 5. Операторным методом решите задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений.

1 $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^{t},\ x(0) = 0, \\ y' = x - y + z + e^{3t},\ y(0) = 0, \\ z' = x + y + z + 4,\ z(0) = 0. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = -y - z,\ x(0) = -1, \\ y' = -x - z,\ y(0) = 0, \\ z' = -x - y,\ z(0) = 1. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x' = y + z,\ x(0) = 0, \\ y' = 3x + z,\ y(0) = 1, \\ z' = 3x + y,\ z(0) = 1. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x' = 2x - y + z,\ x(0) = 1, \\ y' = x + z,\ y(0) = 1, \\ z' = -3x + y - 2z,\ z(0) = 0. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z,\ x(0) = 0, \\ y' = -2x + y - 2z,\ y(0) = 0, \\ z' = 5x + 2y + 7z,\ z(0) = 1. \end{cases}$

6 $\begin{cases} x' = -x + y + z + t,\ x(0) = 0, \\ y' = x - y + z + t^3,\ y(0) = 1, \\ z' = x + y + z + 4,\ z(0) = 0. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x' = 6x - 12y - z, & x(0) = 0, \\ y' = x - 3y - z, & y(0) = 1, \\ z' = -4x + 12y + 3z, & z(0) = 1. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x' = -x + y + z + 1, & x(0) = 1, \\ y' = x - y + z, & y(0) = 1, \\ z' = x + y + z - 2, & z(0) = 0. \end{cases}$

9 $\begin{cases} x' = x - y + z, & x(0) = 1, \\ y' = x + y - z, & y(0) = 1, \\ z' = 2x - y, & z(0) = 1. \end{cases}$

10 $\begin{cases} x' = -15x - 6y + 16z, & x(0) = 0, \\ y' = -15x - 7y + 18z, & y(0) = 0, \\ z' = -19x - 8y + 21z, & z(0) = 0. \end{cases}$

11 $\begin{cases} x' = -x + y + z + t, & x(0) = 0, \\ y' = x - y + z + 2t, & y(0) = 0, \\ z' = x + y + z - 1, & z(0) = 0. \end{cases}$

12 $\begin{cases} x' = -y - z + 2, & x(0) = -1, \\ y' = -x - z - 1, & y(0) = 0, \\ z' = -x - y, & z(0) = 1. \end{cases}$

13 $\begin{cases} x' = y + z + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 3x + z, & y(0) = 1, \\ z' = 3x + y, & z(0) = 1. \end{cases}$

14 $\begin{cases} x' = 2x - y + z, & x(0) = 1, \\ y' = x + z + 1, & y(0) = 1, \\ z' = -3x + y - 2z, & z(0) = 0. \end{cases}$

15 $\begin{cases} x' = -x - 2y - 4z, & x(0) = 0, \\ y' = -2x + y - z, & y(0) = 0, \\ z' = 5x + y + 7z, & z(0) = 1. \end{cases}$

16 $\begin{cases} x' = -2x + y + z + 1, & x(0) = 0, \\ y' = x - y + z + t, & y(0) = 1, \\ z' = x + y + z + 4, & z(0) = 0. \end{cases}$

17 $\begin{cases} x' = 6x - 2y - z, & x(0) = 0, \\ y' = x - 3y - z + 5, & y(0) = 1, \\ z' = -4x + 12y + 3z, & z(0) = 1. \end{cases}$

18 $\begin{cases} x' = x + y + z + 1, & x(0) = 1, \\ y' = x - y + z + t, & y(0) = 1, \\ z' = x + y + z - 2, & z(0) = 0. \end{cases}$

19 $\begin{cases} x' = x - y + z, & x(0) = 1, \\ y' = x + y - z, & y(0) = 1, \\ z' = 2x - y + 1, & z(0) = 1. \end{cases}$

20 $\begin{cases} x' = -15x - 6y + z, & x(0) = 0, \\ y' = -x - 7y + 18z, & y(0) = 1, \\ z' = -19x - 8y + z, & z(0) = 0. \end{cases}$

Решите интегральные уравнения

21 $\phi(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x - \tau)\phi(\tau)d\tau$.

22 $\phi(x) = x + 0{,}5\int\limits_0^x \sin(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$.

23 $\phi(x) = \cos x + \int\limits_0^x e^{x-\tau}\phi(\tau)d\tau$.

24 $\phi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x \cos(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$.

25 $\phi(x) = x + 2\int\limits_0^x ((x - \tau) - \sin(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$.

26 $\phi(x) = x + \int\limits_0^x \cos(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$.

27 $\phi(x) = e^x - 2\int\limits_0^x \cos(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$.

28 $\phi(x) = 1 + 0{,}5\int\limits_0^x \sin 2(x - \tau)\phi(\tau)d\tau$.

Список литературы

1 **Колобов, А. М.** Избранные главы высшей математики / А. М. Колобов. – Минск : Высш. шк., 1965. – Ч. 1. – 220 с.

2 **Краснов, М. Л.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 302 с.

3 **Ефимов, А. В.** Математический анализ (специальные разделы) / А. В. Ефимов. – М. : Высш. шк., 1980. – Ч. 1. – 278 с.