МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

***Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов всех специальностей
и всех направлений подготовки
дневной и заочной форм обучения***

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

Могилев 2021

УДК 517
ББК 22.1
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» « 27» мая 2021 г., протокол № 9

Составитель А. М. Бутома

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по изучению темы «Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл», достаточное количество примеров с подробными решениями, примеры для самостоятельного решения.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Неопределенный интеграл…………………………………………………….. 4
1.1 Понятия первообразной и неопределенного интеграла……………. 4
1.2 Непосредственное интегрирование………………………………….. 7
1.3 Метод подведения под знак дифференциала……………………….. 9
1.4 Метод подстановки…………………………………………………… 12
1.5 Интегрирование по частям…………………………………………… 14
1.6 Интегрирование рациональных дробей…………………………... 17
1.7 Интегрирование некоторых тригонометрических выражений……. 25
1.8 Интегрирование некоторых иррациональных функций…………… 30
1.9 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции…….. 36
Список литературы……………………………………………………….. 37

1 Неопределенный интеграл

1.1 Понятия первообразной и неопределенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X (на отрезке, в конечном или бесконечном интервале или полуинтервале).

Функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$ в промежутке X, если $F(x)$ дифференцируема в этом промежутке и для любого $x \in X$ значение производной $F'(x)$ совпадает со значением функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X .$$

Теорема. Любая непрерывная в промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ в этом промежутке.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на множестве X, то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т. е. $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ в некотором промежутке называют неопределенным интегралом от этой функции в данном промежутке и обозначают $\int f(x)dx$.

При этом символ $\int$ называют знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а x – переменной интегрирования.

Нахождение неопределенного интеграла данной функции называется интегрированием.

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке, то правомерна запись

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная величина, называемая постоянной интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

Пусть для функции $f(x)$, определенной в некотором промежутке X, в этом промежутке существуют первообразная $F(x)$ и неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.

1 Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x),$$

или, что то же самое, дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx\,.$$

2 Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C\,.$$

3 Постоянный множитель a $(a \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx\,.$$

4 Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx\,.$$

5 Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C\,.$$

6 Инвариантность формул интегрирования. Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(u)du = F(u) + C\,,$$

где $u = u(x)$ – дифференцируемая функция.

Таблица интегралов

1 $\int 0\, dx = C$.

2 $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1:$

а) $\int dx = x + C$; б) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$; в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$.

3 $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$:

а) $\int e^x\, dx = e^x + C$.

4 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

5 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

6 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

7 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$.

8 $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$.

9 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C_1$, $a \neq 0$:

а) $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C$.

10 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1$, $a \neq 0$:

а) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$.

11 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$, $a \neq 0$ («высокий» логарифм).

12 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$ («длинный» логарифм).

13 $\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$.

14 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

15 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

16 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

1.2 Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применении свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием.*

Примеры

1 $\int 2^x\left(1+3x^2 2^{-x}\right)dx=\int\left(2^x+3x^2\right)dx=\int 2^x dx+\int 3x^2 dx=\frac{2^x}{\ln 2}+x^3+C$.

2 $\int\frac{\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx=\int\left(1+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx=\int dx+3\cdot\int\frac{dx}{\cos^2 x}=x+3\mathrm{tg}x+C$.

3 $\int\frac{x^2-8}{x^2-9}dx=\int\frac{x^2-9+1}{x^2-9}dx=\int\left(1+\frac{1}{x^2-9}\right)dx=\int dx+\int\frac{dx}{x^2-3^2}=x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$.

4 $\int\frac{\sqrt{x}-2x^3}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx-\int\frac{2x^3}{x^2}dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx-2\int xdx=-\frac{2}{\sqrt{x}}+x^2+C$.

5 $\int\mathrm{ctg}^2 xdx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-\mathrm{ctg}x-x+C$.

Упражнения

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$.

2 $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

3 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

4 $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

5 $\int 3^x 5^x\,dx$.

6 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

7 $\int\frac{x-2}{x^3}dx$.

8 $\int\frac{10x^8-3}{x^4}dx$.

9 $\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$.

10 $\int\left(2^x+3^x\right)^2 dx$.

11 $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

12 $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

13 $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$.

14 $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$.

15 $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

16 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx$.

17 $\int (x^2-1)(\sqrt{x}+4)dx$.

18 $\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}$.

19 $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$

20 $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

21 $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$.

22 $\int \frac{4\sqrt{1-x^2}+3x^2}{x^2-1}dx$.

23 $\int \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}dx$.

24 $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Домашнее задание

1 $\int (2x^8-5x^5-1)dx$. Ответ: $\frac{2}{9}x^9-\frac{5}{6}x^6-x+C$.

2 $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$. Ответ: $4\ln|x|-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$.

3 $\int \left(\frac{5}{x}-\frac{10}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{3}{x^2+7}\right)dx$. Ответ: $5\ln|x|-40\sqrt[4]{x}-\frac{3\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{7}}{7}+C$.

4 $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$. Ответ: $3\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$ $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$.

5 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$. Ответ: $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$.

6 $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$. Ответ: $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$.

7 $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. Ответ: $x+\cos x+C$.

8 $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}x^2+2x+C$.

9 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$.

10 $\int \frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx$. Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{5}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$.

11 $\int \frac{x^2+2}{1+x^2}dx$. Ответ: $x+\mathrm{arctg}x+C$.

12 $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx$. Ответ: $-\frac{2}{x}+\mathrm{arctg}x+C$.

13 $\int \frac{xe^x-x}{x}dx$. Ответ: e^x-x+C.

14 $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx$. Ответ: $-2\cos x+C$.

15 $\int \frac{2x\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx$. Ответ: $x^2-\mathrm{ctg}x+C$.

1.3 Метод подведения под знак дифференциала

Свойство инвариантности неопределенного интеграла позволяет свести нахождение неопределенного интеграла от функции $g(x)$ к следующей процедуре: выделить в ней в качестве сомножителей производную $u'(x)$ некоторого промежуточного аргумента u и функцию $f(u)$ этого аргумента, т. е. представить $g(x)$ в виде $f(u)\cdot u'(x)$, а затем найти первообразную $F(u)$ функции $f(u)$:

$$\int g(x)dx=\int f(u(x))\cdot u'(x)dx=\int f(u(x))\cdot du(x)=F(u(x))+C. \qquad (1)$$

Процедура нахождения неопределенного интеграла при помощи (1) носит название интегрирования подведением под знак дифференциала (производную $u'(x)$ «подводят» под знак дифференциала: $u'(x)dx=du(x)$).

Примеры

1 $\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\int e^{-3x}(-3x)'dx=-\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x)=e^{-3x}+C$.

2 $\int 3x^2\cos(x^3+1)dx=\int \cos(x^3+1)\cdot d(x^3+1)=\sin(x^3+1)+C$.

3 $\int \frac{y^2}{\sqrt{y^6+6}}dy=\frac{1}{3}\int \frac{dy^3}{\sqrt{(y^3)^2+6}}=\frac{1}{3}\ln\left|y^3+\sqrt{y^6+6}\right|+C$.

4 Вывод табличного интеграла 11

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\int \frac{(x+a)-(x-a)}{2a(x^2-a^2)}dx=\frac{1}{2a}\int \frac{d(x-a)}{x-a}-\frac{1}{2a}\int \frac{d(x+a)}{x+a}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

При нахождении неопределенного интеграла использовали тот факт, что добавление к переменной x постоянного числа a не изменяет дифференциал dx, т. е. $d(x+a)=dx$.

$$\mathbf{5}\ \int\frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C=\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C.$$

При нахождении неопределенного интеграла использовали выделение полного квадрата в квадратном трехчлене

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c.$$

Упражнения

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int\cos x\cdot d(\cos x)$.

2 $\int\frac{dx}{x+2}$.

3 $\int\frac{dx}{3x-1}$.

4 $\int\frac{dx}{(2x-3)^5}$.

5 $\int\sqrt{8-2x}\,dx$.

6 $\int(3+x)^{15}\,dx$.

7 $\int\sin(2x-3)\,dx$.

8 $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

9 $\int\frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}\,dx$.

10 $\int\frac{x}{x^4+1}\,dx$.

11 $\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

12 $\int\sin^3 x\cos x\,dx$.

13 $\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$.

14 $\int\operatorname{ctg}(3x)\,dx$.

15 $\int\frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}$.

16 $\int\frac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}\,dx$.

17 $\int\frac{dx}{\arcsin^6 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

18 $\int e^{x^2} x\,dx$.

19 $\int \frac{4\cdot \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx$.

20 $\int \cos^{-2}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx.$

21 $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

22 $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$.

23 $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$.

24 $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$.

25 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

26 $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$.

27 $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$.

28 $\int x\cdot \operatorname{ctg}\left(x^2+1\right)dx$.

29 $\int \sin^3(6x)\cdot\cos(6x)dx$.

30 $\int \frac{x+\arccos^2(3x)}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

31 $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$.

32 $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

33 $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$.

34 $\int \frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx$.

35 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)\left(\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}-7\right)}$.

Домашнее задание

1 $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$. Ответ: $\ln\left|x^2-3x+8\right|+C$.

2 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$. Ответ: $x+\ln(1+x^2)+C$.

3 $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$. Ответ: $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

4 $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Ответ: $\operatorname{arctg}\left(x+2\right)+C$.

5 $\int \frac{x^3dx}{x^8-4}$. Ответ: $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right|+C$.

6 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$. Ответ: $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$.

7 $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$. Ответ: $-\frac{1}{2\ln^2 x}+C$.

8 $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$. Ответ: $\ln\left|2+\ln x\right|+C$.

9 $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $-\frac{1}{\arcsin x}+C$.

10 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$. Ответ: $-\sqrt{1+2\cos x}+C$.

11 $\int \operatorname{tg}(3x+4)dx$. Ответ: $-\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+4)\right|+C$.

12 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$. Ответ: $\cos\frac{1}{x}+C$.

13 $\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}$. Ответ: $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+C$.

14 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$. Ответ: $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\operatorname{ctg} x)^3}+C$.

15 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$. Ответ: $\ln\left|\ln(\ln x)\right|+C$.

1.4 Метод подстановки

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, *где функция* $f(x)$ *определена на некотором множестве X. Введем новую переменную формулой* $x=\varphi(t): T\to X$, *где функция* $\varphi(t)$ *дифференцируема на некотором множестве T и осуществляет взаимно однозначное отображение T на X, т. е. имеет обратную функцию* $t=\varphi^{-1}(x): X\to T$.

Справедливо равенство

$$\int f(x)dx=\begin{bmatrix} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt \end{bmatrix}=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Таким образом, вычисление $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, который может оказаться проще исходного, и последующей подстановке $t=\varphi^{-1}(x)$.

Примеры

1 $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x-3}=t,\\ x=t^2+3,\quad dx=2tdt\end{bmatrix}=\int\left(t^2+3\right)\cdot t\cdot 2tdt=2\int\left(t^4+3t^2\right)dt=$

$$=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C=\frac{2}{5}(x-3)^2\sqrt{x-3}+2(x-3)\sqrt{x-3}+C.$$

2 $\int\frac{dx}{e^x+1}=\begin{bmatrix}e^x=t,\\ x=\ln t,\, dx=\frac{1}{t}dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t\cdot(t+1)}=\int\frac{1+t-t}{t\cdot(t+1)}dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t+1}=$

$$=\ln|t|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C.$$

3 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\begin{bmatrix}x=t^2,\\ dx=2tdt\end{bmatrix}=\int\frac{2tdt}{t^2+t}=2\int\frac{tdt}{t(t+1)}=2\int\frac{dt}{t+1}=$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=2\ln|t+1|+C=2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C.$$

4 $\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx=\int\frac{6x+5}{(x+2)^2+5}dx=\begin{bmatrix}x+2=t,\\ x=t-2,\quad dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{6t-7}{t^2+5}dt=$

$$=3\int\frac{2t}{t^2+5}dt-7\int\frac{dt}{t^2+5}=3\int\frac{dt^2}{t^2+5}-7\int\frac{dt}{t^2+5}=3\ln\left(t^2+5\right)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=3\ln\left(x^2+4x+9\right)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

Упражнения

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int x(1-x)^{10}dx$. Ответ: $\frac{1}{12}(1-x)^{12}-\frac{1}{11}(1-x)^{11}+C$.

2 $\int\frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}$. Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x+1}}{2}+C$.

3 $\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2+2}+C$.

4 $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$. Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$.

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. Ответ: $x-2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)+C$.

6 $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$. Ответ: $\frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2}+C$.

7 $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx$. Ответ: $C-\frac{1+55x^2}{6600}\left(1-5x^2\right)^{11}$.

8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Ответ: $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

9 $\int \frac{x+2}{1+\sqrt{1+x}}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-1-x+4\sqrt{1+x}-4\ln\left|\sqrt{1+x}+1\right|+C$.

10 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. Ответ: $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)+C$.

Домашнее задание

1 $\int \frac{xdx}{(3-x)^7}$. Ответ: $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C$.

2 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$. Ответ: $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$.

3 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+C$.

4 $\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$. Ответ: $\frac{1}{97\cdot(1-x)^{97}}-\frac{1}{49\cdot(1-x)^{98}}+\frac{1}{99\cdot(1-x)^{99}}+C$.

5 $\int \frac{\ln(2x)}{x\cdot\ln(4x)}dx$. Ответ: $\ln x-\ln 2\cdot\ln\left|\ln x+2\ln 2\right|+C$.

1.5 Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на множестве X, и кроме того, на этом множестве существует интеграл $\int vdu$, *то на нем существует и интеграл* $\int udv$, *причем*

$$\int udv = uv-\int vdu. \tag{3}$$

Формула (3) называется *формулой интегрирования по частям.* Ее используют в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)dx$ можно представить в виде udv таким образом, что интеграл, полученный в правой части формулы (3), может оказаться проще исходного интеграла. При этом за u удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании.

Замечание – Большая часть интегралов, берущихся по формуле (3), может быть разбита на три группы.

К первой группе относятся интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\mathrm{arctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arcctg} x$. Для вычисления интегралов первой группы следует применить формулу (3), полагая в ней за $u(x)$ одну из этих указанных функций. В случае, когда подынтегральная функция содержит в качестве множителя $\ln^m x$, $\mathrm{arctg}^m x$, $\arcsin^m x$, $\arccos^m x$, $\mathrm{arcctg}^m x$, формулу интегрирования по частям придется применять m раз.

Ко второй группе относятся интегралы вида: $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Для вычисления интегралов второй группы формулу (3) следует применить n раз, причем в качестве $u(x)$ каждый раз выбирают многочлен $P_n(x)$ соответствующей степени. После каждого интегрирования по частям эта степень будет понижаться на единицу.

К третьей группе относятся интегралы вида: $\int e^{\alpha x}\cos bx\,dx$, $\int e^{\alpha x}\sin bx\,dx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int \cos(\ln x)dx$.

Конечно, указанные группы не исчерпывают всех интегралов, которые можно вычислить по формуле (3). Например, методом интегрирования по частям можно найти интегралы: $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$, $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Примеры

1 $$\int\arcsin x dx=\left[\begin{matrix} u=\arcsin x, & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right]=x\cdot\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\cdot\arcsin x+\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}}=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

2 $$\int x\ln x dx=\left[\begin{matrix} u=\ln x; & du=\dfrac{dx}{x}; \\ dv=xdx; & v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right]=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx==\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$$

3 $\int x^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x^2; & du = 2xdx; \\ dv = \sin x dx; & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} =$

$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix} =$

$= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x dx\right) = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \cos x) + C$.

Упражнения

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \ln x dx$. Ответ: $x \cdot (\ln x - 1) + C$.

2 $\int x \cdot \ln(6x) dx$. Ответ: $\frac{x^2}{4}(2\ln(6x) - 1) + C$.

3 $\int x \cdot \cos(2x) dx$. Ответ: $\frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$.

4 $\int \mathrm{arctg} x\, dx$. Ответ: $x \cdot \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$.

5 $\int x \cdot e^{-2x} dx$. Ответ: $C - \frac{1}{2} e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

6 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. Ответ: $C - \frac{1}{x}(\ln x + 1)$.

7 $\int \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1} \cdot dx$. Ответ: $x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

8 $\int \left(x^2 + 4x - 5\right)\cos x dx$. Ответ: $\left(x^2 + 4x - 3\right)\sin x + 2(x+2)\cos x + C$.

9 $\int x \sin x \cos x dx$. Ответ: $C - \frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$.

10 $\int \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$. Ответ: $x \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1 + x^2} + C$.

11 $\int e^x \cos x dx$. Ответ: $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$.

12 $\int x^3 e^{x^2} dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) \cdot e^{x^2} + C$.

13 $\int \frac{x e^x dx}{(1+x)^2}$. Ответ: $\frac{e^x}{1+x} + C$.

14 $\int \sqrt{1 + x^2} dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right) + C$.

15 $\int x \cdot \cos\sqrt{x} dx$. Ответ: $2 \cdot (3x - 6)\cos\sqrt{x} + 2(x - 6) \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x} + C$.

Домашнее задание

1 $\int x\cdot 2^{-x}dx$. Ответ: $C-\dfrac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$.

2 $\int x\cdot\sin(5x)dx$. Ответ: $C-\dfrac{1}{5}x\cdot\cos(5x)+\dfrac{1}{25}\sin(5x)$.

3 $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(x^2\mathrm{arctg}x-x+\mathrm{arctg}x\right)+C$.

4 $\int x^2\ln x dx$. Ответ: $\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}+C$.

5 $\int\sin(\ln x)dx$. Ответ: $\dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$.

6 $\int\arcsin^2 x dx$. Ответ: $x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x+2x+C$.

7 $\int x\ln^2 x dx$. Ответ: $\dfrac{x^2}{2}\ln^2 x-\dfrac{x^2\ln x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+C$.

8 $\int\dfrac{x}{\sin^2 x}dx$. Ответ: $C-x\cdot\mathrm{ctg}x+\ln|\sin x|$.

9 $\int\dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$. Ответ: $-\dfrac{x}{\sin x}+\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$.

10 $\int e^x\sin x dx$. Ответ: $\dfrac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x)+C\right)$.

1.6 Интегрирование рациональных дробей

Интегрирование произвольной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{b_m x^m+\ldots+b_1x+b_0}{a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0}$ с действительными коэффициентами в общем случае производится следующим образом.

Если $m\ge n$, т. е. исходная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ неправильная, то следует предварительно выделить из этой дроби целую часть делением числителя на знаменатель «уголком», т. е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{m-n}+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степеней $m-n\ge 0$ и r соответственно, причем $r<n$.

Для того чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m<n$, следует предварительно разложить ее на сумму простей-

ших дробей.

Среди правильных рациональных дробей выделяют четыре типа, которые относят к простейшим рациональным дробям:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$; III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

где a, p, q, A, M, N – действительные числа; $k>1$ – целое и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней $\left(p^2-4q<0\right)$.

Интегралы от простейших дробей:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C;$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \left[\begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t, \\ x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt \end{array}\right] = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{M}{2}\ln\left|t^2+q-\frac{p^2}{4}\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{4q-p^2}} +$$

$$+ C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Интеграл четвертого типа $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$ подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k},$$

где $a^2 = q-\dfrac{p^2}{4}$.

Первый интеграл находится подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\cdot d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Находят второй интеграл:

$$I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2 + a^2 - t^2}{\left(t^2 + a^2\right)^k}dt = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} - \int \frac{t^2}{\left(t^2 + a^2\right)^k}dt\right).$$

К последнему интегралу применяют интегрирование по частям.
Пусть

$$u = t, \quad dv = \frac{t \cdot dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}, \quad du = dt, \quad v = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{\left(t^2 + a^2\right)^k} = \frac{1}{2(1-k)\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}}.$$

Тогда

$$\int \frac{t^2}{\left(t^2 + a^2\right)^k}dt = \frac{t}{2(1-k)\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} =$$

$$= \frac{t}{2(1-k)\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}.$$

Итак,

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \frac{t}{2(1-t)\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}\right),$$

т. е.

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)\left(t^2 + a^2\right)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл I_k для любого целого числа $k > 1$.

Если многочлен $Q(x)$ правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ раскладывается на множители вида

$$Q(x) = (x-a)\ldots(x-b)^k \ldots\left(x^2 + p_1x + q_1\right)\ldots\left(x^2 + p_2x + q_2\right)^m,$$

где $\left(x^2 + p_1x + q_1\right)$ и $\left(x^2 + p_2x + q_2\right)$ не имеют действительных корней, то правильная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\ldots+$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^m}.$$

Примеры

1 Найти неопределенный интеграл $\int\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx$.

Решение

Раскладывают правильную дробь $\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Приводят дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравнивают числители левой и правой частей. Получают

$$x^2+2=A\left(x^2+2x+1\right)+B_1\left(x^2-x-2\right)+B_2(x-2).$$

Рассмотрим несколько способов нахождения коэффициентов A,B_1,B_2.

Способ 1. Метод сравнения коэффициентов.

Из тождественного равенства многочленов приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях правой и левой частей равенства:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1=A+B_1 \\ x^1 & 0=2A-B_1+B_2 \\ x^0 & 2=A-2B_1-2B_2 \end{array}\Rightarrow\begin{cases} A=\dfrac{2}{3}, \\ B_1=\dfrac{1}{3}, \\ B_2=-1. \end{cases}$$

Способ 2. Метод частных значений.

Подставляют произвольные значения x в равенство, получают:

$$\begin{array}{r|c}
x=-1 & 3=-3B_2 \\
x=2 & 6=9A \\
x=0 & 2=A-2B_1-2B_2
\end{array}
\Rightarrow
\begin{cases}
B_2=-1, \\
A=\dfrac{2}{3}, \\
B_1=\dfrac{1}{3}.
\end{cases}$$

Способ 3. Комбинированный метод.

В данном примере можно скомбинировать оба способа:

$$\begin{array}{r|c}
x=-1 & 3=-3B_2 \\
x=2 & 6=9A \\
x^2 & 1=A+B_1
\end{array}
\Rightarrow
\begin{cases}
B_2=-1, \\
A=\dfrac{2}{3}, \\
B_1=\dfrac{1}{3}.
\end{cases}$$

Итак,

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{2}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Представляют данный интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1`}+C.$$

2 Найти неопределенный интеграл $\int\frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx$.

Решение

$\frac{P_0(x)}{Q_4(x)}=\frac{12}{x^4+x^3-x-1}$ – правильная несократимая рациональная дробь. Знаменатель ее разложим на линейные и квадратичные множители:

$$Q_4(x)=x^4+x^3-x-1=x^3(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^3-1)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Разложение подынтегральной дроби в сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{P_0(x)}{Q_4(x)}=\frac{12}{x^4+x^3-x-1}=\frac{12}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Приведя дроби в правой части последнего равенства к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$12 = A\left(x^3 - 1\right) + B\left(x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) + \left(Cx + D\right)\left(x^2 - 1\right).$$

Для нахождения A, B, C, D рассмотрим несколько вариантов.

1 *Метод сравнения коэффициентов.*

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = A + B + C, \\ x^2 & 0 = 2B + D, \\ x & 0 = 2B - C, \\ x^0 & 12 = -A + B - D. \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}$$

2 *Метод частных значений.*

Придадим переменной x последовательно четыре произвольных значения:

$$\begin{array}{l|l} x_1 = 1 & 12 = 6B, \\ x_2 = -1 & 12 = -2A, \\ x_3 = 0 & 12 = -A + B - D, \\ x_4 = 2 & 12 = 7A + 21B + 6C + 3D. \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}$$

3 *Комбинированный метод.*

Систему для нахождения коэффициентов разложения выгодно получить так:

$$\begin{array}{l|l} x_1 = 1 & 12 = 6B, \\ x_2 = -1 & 12 = -2A, \\ x^2 & 0 = 2B + D, \\ x & 0 = 2B - C. \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}$$

Решая полученную систему уравнений, находим: $A = -6$, $B = 2$, $C = 4$, $D = -4$.

Следовательно, $\dfrac{12}{x^4 + x^3 - x - 1} = \dfrac{-6}{x + 1} + \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{4x - 4}{x^2 + x + 1}$.

Таким образом:

$$\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx=\int\left(\frac{-6}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{4x-4}{x^2+x+1}\right)dx=-6\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=-6\int\frac{d(x+1)}{x+1}+2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+4\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\left[x^2+x+1=x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+$$

$$+2\int\frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}-6\int\frac{dx}{x^2+x+1}=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+2\ln\left(x^2+x+1\right)-$$

$$-6\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+2\ln\left(x^2+x+1\right)-6\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|+2\ln\left(x^2+x+1\right)-4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Упражнения

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int\frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

2 $\int\frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$. Ответ: $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{1}{x-1}+C$.

3 $\int\frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$. Ответ: $x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$.

4 $\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$. Ответ: $\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}+C$.

5 $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

6 $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{2}{x}+2\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\mathrm{arctg}(x+1)+C$.

7 $\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x-2}dx$. Ответ: $\frac{8}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{14}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

8 $\int \frac{x^4+x}{x^3-1}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

9 $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}dx$. Ответ: $\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$.

10 $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$. Ответ: $x+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}x-\frac{8}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$.

11 $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$. Ответ: $\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$.

12 $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$. Ответ: $4\cdot\ln|x|-3\cdot\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$.

13 $\int \frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

Ответ: $7\ln|x+1|-\frac{6}{x+1}-\frac{7}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{3x+1}{x^2+x+1}-\frac{11}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

14* $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx$. Ответ: $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{12}\ln\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^4-x^2+1}+C$.

Домашнее задание

1 $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$. Ответ: $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$.

2 $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$. Ответ: $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C$.

3 $\int \frac{dx}{x^3-8}$. Ответ: $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4 $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$. Ответ: $2\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$.

5 $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-2\mathrm{arctg}x+C$.

6 $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. Ответ: $x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$.

1.7 Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

1.7.1 Интегралы вида

$$\int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\quad \int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\quad \int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx$$

находят с помощью тригонометрических формул преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

1.7.2 Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx.$$

1 Если хотя бы одно из чисел m и n положительно и нечетно, то от нечетной степени отделяют множитель $\sin x$ (или $\cos x$), а оставшийся множитель в четной степени преобразуют по формуле $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ (или $\cos^2 x=1-\sin^2 x$) и применяют подстановку $t=\cos x$ (или $t=\sin x$).

2 Если оба показателя m и n положительны и четны (или один из них − нуль), то применяют формулы понижения порядка степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

3 Если $m+n=-2k$ $(k\in N)$, то применяют подстановку $t=\mathrm{tg}x$ (или $t=\mathrm{ctg}x$).

1.7.3 Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

где R – рациональная функция, аргументами которой являются $\sin x$ и $\cos x$, в общем случае приводят к интегралам от рациональных функций с аргументом t с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

При этом

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t \ \Rightarrow x=2\mathrm{arctg}t \Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

1.7.4 Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то для нахождения интеграла $\int R(\sin x,\cos x)dx$ используют подстановку $t=\mathrm{tg}x$. При этом

$$dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}.$$

Такой же подстановкой находится интеграл вида $\int R\left(\mathrm{tg}x\right)\cdot dx$.

Метод интегрирования функций $R(\sin x,\cos x)$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки всегда приводит к цели, но в силу своей общности он часто является не наилучшим в смысле краткости и простоты необходимых преобразований. Поэтому универсальную подстановку следует применять лишь в тех случаях, когда невозможно найти интеграл более легким способом.

Например, применение подстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ при интегрировании функции $\frac{1}{\sin^3 x\cdot\cos x}$ приведет к интегралу сложной дробно-рациональной функции:

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}=\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^3\left(1-t^2\right)}dx.$$

Вместо этого, используя основное тригонометрическое тождество, находят

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cdot\cos x}dx=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}+\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=$$

$$=\int\frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}dx+\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin^3 x}=\int\frac{d\left(\mathrm{tg}x\right)}{\mathrm{tg}x}+\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin^3 x}=\ln\left|\mathrm{tg}x\right|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

Примеры

1 $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot d(\sin x) = \int \sin^2 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot d(\sin x) =$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C\,.$$

2 $\int \cos 2x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(-x) + \cos 5x\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos x dx + \frac{1}{10}\int \cos 5x d(5x) =$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C\,.$$

3 $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left[\begin{matrix} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t; & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix}\right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} =$

$$= 2\int \frac{dt}{1 - t^2 + 4t + 3 + 3t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int \frac{d(t+1)}{1 + (t+1)^2} =$$

$$= \mathrm{arctg}(t+1) + C = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + C\,.$$

4 $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\right)\left(1+t^2\right)} = 2\int \frac{dt}{6t^2 + 4t + 4} =$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{3tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C\,.$$

5 $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \left[\begin{matrix} t = \mathrm{tg}\, x, \\ x = \mathrm{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{matrix}\right] = \int \frac{dt}{2 + t^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C\,.$$

6 $$\int \frac{dx}{3+5\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}x = t; & x = \mathrm{arctg}t; \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} & \end{bmatrix} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{3+5\cdot\dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3+3t^2+5} =$$

$$= \int \frac{dt}{8+3t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\dfrac{8}{3}+t^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{8}{3}}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{\dfrac{8}{3}}} + C = \frac{1}{\sqrt{24}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3}{8}}\mathrm{tg}x + C.$$

7 Вывод табличного интеграла 15

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t, & \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Упражнения

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \sin x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{3}dx$. Ответ: $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6} + C$.

2 $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$. Ответ: $C - \frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x}$.

3 $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$. Ответ: $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C$.

4 $\int x^{-1}\cdot\sin^2(\ln x)dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\sin(2\ln x) + C$.

5 $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}$. Ответ: $\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x - \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + C$.

6 $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$. Ответ: $C - \frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

7 $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$. Ответ: $C - \frac{2}{3+\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

8 $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$. Ответ: $C - x - \frac{2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}$.

9 $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right| + C$.

10 $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos 3x} dx$. Ответ: $\ln \frac{|C \cdot \sin x|}{\sqrt{1 - 4\sin^2 x}}$.

11 $\int \frac{dx}{1 + 2 \cdot \mathrm{tg} x}$. Ответ: $\frac{1}{5} x + \frac{2}{5} \ln|\cos x + 2\sin x| + C$.

12 $\int \cos^4 \left(\frac{x}{2}\right) dx$. Ответ: $\frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} \sin(2x) + C$.

13 $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2\mathrm{tg} x - \sqrt{7}}{2\mathrm{tg} x + \sqrt{7}} \right| + C$.

14 $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$. Ответ: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin(4x) + \frac{1}{48} \sin^3(2x) + C$.

15 $\int \frac{1 + \mathrm{tg} x}{1 - \mathrm{tg} x} dx$. Ответ: $C - \ln|1 - \mathrm{tg} x| + \frac{1}{2} \ln\left|1 + \mathrm{tg}^2 x\right|$.

16 $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$. Ответ: $C - \frac{1}{2 \cdot \mathrm{tg}^2 x} - \ln|\mathrm{tg} x| + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right) = C_1 - \frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x|$.

17 $\int \mathrm{tg}^5 x dx$. Ответ: $\frac{1}{4} \mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2} \mathrm{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C$.

18 $\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$. Ответ: $\frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{4} + C$.

19 $\int \frac{1 + \mathrm{tg} x}{\sin 2x} dx$. Ответ: $\frac{1}{2} \ln|\mathrm{tg} x| + \frac{1}{2} \mathrm{tg} x + C$.

20 $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$. Ответ: $\cos x - 2\mathrm{arctg}(\cos x) + C$.

Домашнее задание

1 $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$. Ответ: $\ln \left| \frac{\mathrm{tg} \frac{x}{2} - 5}{\mathrm{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C$.

2 $\int \cos x \cdot \cos^2 3x dx$. Ответ: $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{20} \sin 5x + \frac{1}{28} \sin 7x + C$.

3 $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{2} \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg} x}{2}\right) + C$.

4 $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$. Ответ: $\frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C$.

5 $\int \left(\mathrm{tg}^3 \frac{x}{3} + \mathrm{tg}^4 \frac{x}{3} \right) dx$. Ответ: $\frac{3}{2} \mathrm{tg}^2 \frac{x}{3} + \mathrm{tg}^3 \frac{x}{3} - 3\mathrm{tg} \frac{x}{3} + 3\ln\left|\cos \frac{x}{3}\right| + x + C$.

6 $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$. Ответ: $C-x+2\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}\right|$.

7 $\int \frac{dx}{19\sin^2 x-8\sin x\cos x-3}$. Ответ: $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{4\mathrm{tg}x-3}{4\mathrm{tg}x+1}\right|+C$.

8 $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{3}}+C$.

9 $\int \cos 4x\cdot\cos 7x\,dx$. Ответ: $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x+C$.

10 $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x}$. Ответ: $\frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{ctg}^2 x\right)+2\ln|\mathrm{tg}x|+C$.

1.8 Интегрирование некоторых иррациональных функций

1.8.1 Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к табличным интегралам вида $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+A^2}}$ (если $a>0$) или $\int \frac{dt}{\sqrt{A^2-t^2}}$ (если $a<0$).

1.8.2 В интеграле вида $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(m\neq 0)$ из числителя выделяется производная $2ax+b$. В результате приходим к табличным интегралам и интегралам первого вида.

1.8.3 Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (m\neq 0),\ (r=1;\,2)$$

сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки

$$t=\frac{1}{mx+n}.$$

1.8.4 Интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где R – рациональная функция двух аргументов, находят с помощью тригонометрических подстановок следующим образом.

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной $u = x + \frac{b}{2a}$ исходный интеграл приводится к интегралу одного из следующих трех видов:

1) $\int R\left(u, \sqrt{m^2 - u^2}\right) du$;

2) $\int R\left(u, \sqrt{u^2 - m^2}\right) du$;

3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2 + m^2}\right) du$,

которые приводятся к интегралу вида $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$ соответствующей тригонометрической подстановкой:

1) $u = m \cdot \sin t$ или $u = m \cdot \cos t$;

2) $u = \frac{m}{\sin t}$ или $u = \frac{m}{\cos t}$;

3) $u = m \cdot \mathrm{tg} t$ или $u = m \cdot \mathrm{ctg} t$.

1.8.5 Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов; $m_1, n_1, m_2, n_2, \ \ldots$ – целые числа, находят с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$.

1.8.6 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$ берется в конечном виде в трех случаях (условия Чебышева):

1) если p – целое число;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, подстановкой $a + bx^n = t^s$;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, подстановкой $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Примеры

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x - 3}{5} + C$.

2 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}} +$

$$+2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$

3 $\int \frac{(4x+7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -\int \frac{(-4x-7)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = -\int \frac{(-4x-4)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} =$

$$= -2\int \frac{(-2x-2)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \left[3-2x-x^2 = -\left(x^2+2x+1-4\right) = 4-(x+1)^2\right] =$$

$$= -2\cdot 2\int \frac{d\left(3-2x-x^2\right)}{2\sqrt{3-2x-x^2}} + 3\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = -4\sqrt{3-2x-x^2} + 3\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4x+1}} = \begin{bmatrix} t=\frac{1}{x}, \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{bmatrix} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{4}{t}+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{5-4t+t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+(t-2)^2}} =$

$$= C - \ln\left|t-2+\sqrt{1+(t-2)^2}\right| = C - \ln\left|\frac{1}{x}-2+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-2\right)^2}\right|.$$

5 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}} = \left[x=\frac{1}{t};\ dx = -\frac{1}{t^2}dt\right] = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{8}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+8t+1}} =$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+4)^2-15}} = -\int \frac{d(t+4)}{\sqrt{(t+4)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}} = -\ln\left|t+4+\sqrt{(t+4)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|t+4+\sqrt{t^2+8t+1}\right| + C, \qquad \text{где } t=\frac{1}{x}.$$

6 $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}} = \begin{bmatrix} t^4 = x+3 \\ dx = 4t^3dt \end{bmatrix} = 4\int \frac{t^3dt}{(t-1)t^2} = 4\int \frac{t\,dt}{t-1} = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}dt =$

$$= 4\left(t+\ln|t-1|\right) + C = 4\left(\sqrt[4]{x+3} + \ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|\right) + C.$$

7 $\int \frac{x^3}{2+\sqrt{4-x^2}}dx.$

Способ 1

$$\int \frac{x^3}{2+\sqrt{4-x^2}}dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin t, \\ dx = 2\cos t dt \end{bmatrix} = \int \frac{8\sin t\left(1-\cos^2 t\right)}{1+\cos t}\cos t dt = 8\int\left(\cos^2 t - \cos t\right)\cdot d\left(\cos t\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\cos^3 t - 4\cos^2 t + C = \begin{bmatrix} \sin t = \dfrac{x}{2}, \\ \cos^2 t = \dfrac{4-x^2}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2} - 4 + x^2 + C.$$

Способ 2

$$\int \frac{x^3}{2+\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{x^3\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)}{x^2}dx = \int 2x dx - \int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2x dx + \frac{1}{2}\int\sqrt{4-x^2}\,d\left(4-x^2\right) =$$

$$= x^2 + \frac{1}{3}\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2} + C.$$

8 $$\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \dfrac{1}{\sin t}, \\ dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt \end{bmatrix} = -\int \sin^3 t dt = \int\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right) =$$

$$= \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t + C = \begin{bmatrix} \sin t = \dfrac{1}{x}, \\ \cos t = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{1}{3}\frac{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}{x^3} + C.$$

9 $$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \left[x = 3\sin t;\quad dx = 3\cos t dt\right] = \int 9\sin^2 t\,\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt =$$

$$= 81\int \sin^2 t\,\cos^2 t dt = 81\cdot\frac{1}{4}\int\sin^2 2t dt = \frac{81}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{81}{8}\int\left(1-\cos 4t\right)dt =$$

$$= \frac{81}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C = \frac{81}{8}\left(\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{3}\right)\right) + C.$$

Упражнения

Найти неопределенные интегралы.

1 $\int \frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)\left(1+\sqrt[3]{x+a}\right)}dx$.

Ответ: $6\cdot\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+a}-6\cdot\ln\sqrt[6]{x+a}+3\cdot\ln\left|1+\sqrt[3]{x+a}\right|+C$.

2 $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$. Ответ: $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$.

3 $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}dx$. Ответ: $2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x}}+C$.

4 $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. Ответ: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$.

5 $\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$. Ответ: $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$.

6 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+4x+7\right)^3}}$. Ответ: $\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C$.

7 $\int \frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{4-x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{12-3x^2}}{x+\sqrt{12-3x^2}}\right|+C$.

8 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. Ответ: $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$.

9 $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}dx$. Ответ: $C-\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|$.

10 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$. Ответ: $C-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$.

11 $\int \frac{dx}{\left(2+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2\left(1-x^2\right)}}+C$.

12 $\int (x+1)^3\cdot\sqrt{\left(x^2+2x-1\right)^3}dx$. Ответ: $\frac{2}{5}\sqrt{\left(x^2+2x-1\right)^5}+\frac{1}{7}\sqrt{\left(x^2+2x-1\right)^7}+C$.

13 $\int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2+8x+11}}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+8x+11}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5{,}5}\right|+C$.

14 $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{a^2+x^2}}$. Ответ: $C-\frac{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}{3a^4x^3}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x}$.

15 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$. Ответ: $\frac{x}{4\cdot\sqrt{4+x^2}+C}$.

16 $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{1+x^3}}$. Ответ: $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right|+C$.

17 $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}$. Ответ: $C-\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}$.

18 $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx$. Ответ: $\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}+C$.

19 $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$. Ответ: $\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$.

20 $\int \frac{2x+8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$. Ответ: $C-2\sqrt{1-x-x^2}+7\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$.

Домашнее задание

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. Ответ: $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. Ответ: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$.

3 $\int x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$.

4 $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2x+5\right)^3}}$. Ответ: $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+C$.

5 $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

6 $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$. Ответ: $\frac{1}{2(x+1)}\sqrt{x^2+2x}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+C$.

7 $\int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}dx$. Ответ: $C-\sqrt{9+6x-3x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}$.

8 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$. Ответ: $\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x}-\frac{1}{8}\sin 2\left(\arccos\frac{2}{x}\right)+C$.

1.9 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Известно, что производная элементарной функции тоже является элементарной функцией, и дифференцирование выполняют по общим правилам. Но неопределенный интеграл даже от сравнительно простой элементарной функции может не принадлежать к классу элементарных функций. О таких неопределенных интегралах говорят, что они не берутся в конечном виде (не выражаются через элементарные функции), и кратко их обычно называют неберущимися интегралами.

Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции:

– интеграл Пуассона

$$\int e^{-x^2}dx;$$

– интегральный синус

$$\int \frac{\sin x}{x}dx;$$

– интегральный косинус

$$\int \frac{\cos x}{x}dx;$$

– интегральный логарифм

$$\int \frac{dx}{\ln x};$$

– интегралы Френеля

$$\int \cos\left(x^2\right)dx, \quad \int \sin\left(x^2\right)dx;$$

– эллиптический интеграл первого рода

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}};$$

– эллиптический интеграл второго рода

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx.$$

Список литературы

1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва: Наука, 1985. – Т. 2. – 286 с.

2 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1973. – 364 с.

3 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. / Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – Ч. 2. – 164 с.

4 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 2. – 863 с.

5 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник в 2 т. / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 2. – 544 с.

6 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

7 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.