ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе №2 для студентов заочной формы обучения технических специальностей

Могилев 2008

УДК 517
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой высшей математики 25 апреля 2008 г., протокол № 6

Составители: С. Ф. Плешкунова;
Л.И. Сотская.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв

Методические указания и варианты заданий предназначены для студентов заочной формы обучения технических специальностей.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	В. Э. Ковалевский

Подписано в печать . Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ №02330/375 от 29.06.2004 г.
212005, г. Могилев, пр. Мира, 43

Содержание

1. Программа курса…………….....……………………………….4
2. Общие требования к оформлению работы………………...5
   2.1 Выбор варианта задания………………………………...5
   2.2 Правила оформления контрольной работы…………....5
3. Решение типового варианта……………………………...6
4. Варианты контрольных заданий…………………………..18
5. Приложение ………………………………………………...29
6. Список литературы…………………………………………30

1 Программа курса

Тема 1. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Первообразная функция. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица основных неопределённых интегралов. Замена переменной в неопределённом интеграле и интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические и некоторые иррациональные функции. Понятие определённого интеграла. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменной в определённом интеграле. Формула интегрирования по частям определённого интеграла. Геометрические и физические приложения определённых интегралов. Несобственные интегралы первого и второго рода.

Тема 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.

Функции многих переменных (ФМП). Частные производные ФМП. Дифференциал ФМП и его связь с частными производными. Производная по направлению ФМП и градиент. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Понятие экстремума ФМП. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум: метод множителей Лагранжа. Наибольшее и наименьшее значение ФМП в замкнутой ограниченной области. Определение двойного интеграла и его свойства. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат. Тройной интеграл, его свойства и вычисление в декартовой системе координат. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Геометрические и физические приложения двойных и тройных интегралов.

2 Общие требования к оформлению контрольной работы

2.1 Выбор варианта задания

Номер варианта задания определяется по двум последним цифрам зачетки, если это число больше 30, то вариант определяют вычитанием числа 30, если больше 60 – то вычитанием числа 60 и если больше числа 90 – то вычитанием числа 90.

2.2 Правила оформления контрольной работы

Контрольную работу выполняют в отдельной тонкой тетради.

На обложке тетради следует написать номер контрольной работы, номер варианта, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы и номер зачетной книжки.

Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. Каждую задачу следует начинать с новой страницы. При этом перед решением каждой задачи полностью переписывают ее условие. В тетради обязательно оставляют поля.

Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы, вычисления проводить в строгом порядке. Решение каждой задачи необходимо доводить до ответа, требуемого условием. В конце контрольной работы указать использованную при выполнении контрольной работы литературу.

Студент не допускается к сдаче экзамена без предъявления тетради с зачтенной контрольной работой.

3 Решение типового варианта

Задание 1. Найти следующие интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{1+\ln^3 x}{x}dx, \quad \text{б) } \int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx, \quad \text{в) } \int \frac{dx}{2+\sin x}, \quad \text{г) } \int \frac{dx}{1-x^3}.$$

а) $\int \frac{1+\ln^3 x}{x}dx$.

Решение.

Поскольку $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int \frac{1+\ln^3 x}{x}dx = \int (1+\ln^3 x)\,d(\ln x) = \int d(\ln x) + \int \ln^3 x\,d(\ln x) =$$
$$= \ln x + \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

Ответ: $\int \frac{1+\ln^3 x}{x}dx = \ln x + \frac{\ln^4 x}{4} + C.$

б) $\int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx$.

Решение.

Применим формулу интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

$$\int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x+1, & du = dx, \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x}. \end{bmatrix} = (x+1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} =$$
$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Ответ: $\int (x+1)\cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$

в) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

Решение.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t^2+2\cdot t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$$

Ответ: $\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$

г) $\int \frac{x-12}{x^2+9x-10}dx$.

Решение.

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-12}{x^2+9x-10} = \frac{x-12}{(x+10)(x-1)} = \frac{A}{x+10}+\frac{B}{x-1} =$$

$$= \frac{A(x-1)+B(x+10)}{(x+10)(x-1)}.$$

Коэффициенты A, B найдем из условия:

$$x-12 = A(x-1)+B(x+10)\,. \qquad (1)$$

Подставим в равенство (1) значения $x=1$ и $x=-10$.

$$\begin{array}{r|l} x=1 & -11=11B \;\Rightarrow B=-1, \\ x=-10 & -22=-11A \;\Rightarrow A=2. \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x-12}{x^2+9x-10} = \frac{2}{x+10}-\frac{1}{x-1}.$$

$$\int \frac{x-12}{x^2+9x-10}\,dx = 2\int\frac{dx}{x+10}-\int\frac{dx}{x-1} = 2\ln|x+10|-\ln|x-1|+C.$$

Ответ: $\int \frac{x-12}{x^2+9x-10}\,dx = 2\ln|x+10|-\ln|x-1|+C.$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{1}^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$.

Решение. Применим подстановку $x = t^6$. Получим

$$\int\limits_{1}^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx = \begin{bmatrix} x = t^6, \qquad t = \sqrt[6]{x}, \\ dx = 6t^5\,dt, \\ \sqrt[3]{x} = t^2, \quad \sqrt{x} = t^3, \\ \text{при } x = 1 \quad t = 1, \\ \text{при } x = 64 \ \ t = 2. \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} \frac{t^2 \cdot 6t^5\,dt}{t^6(t^3+t^2)} = \int\limits_{1}^{2} \frac{6t^7\,dt}{t^8(t+1)} = 6\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{t(t+1)} = \int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}} =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = 6\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_1^2 = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_1^2 = 6\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right) = 6\ln\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\int\limits_{1}^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx = 6\ln\frac{4}{3}.$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2(x^2-1)$; $y = x^2 + x$.

Решение. Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 2, \\ y = x^2 + x. \end{cases} \Rightarrow \ 2x^2 - 2 = x^2 + x.$$

Решаем полученное уравнение

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Получаем

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

Таким образом, точки пересечения кривых имеют координаты: $M_1(-1;0)$ и $M_2(2;6)$.

Построим данную фигуру (рис.1).

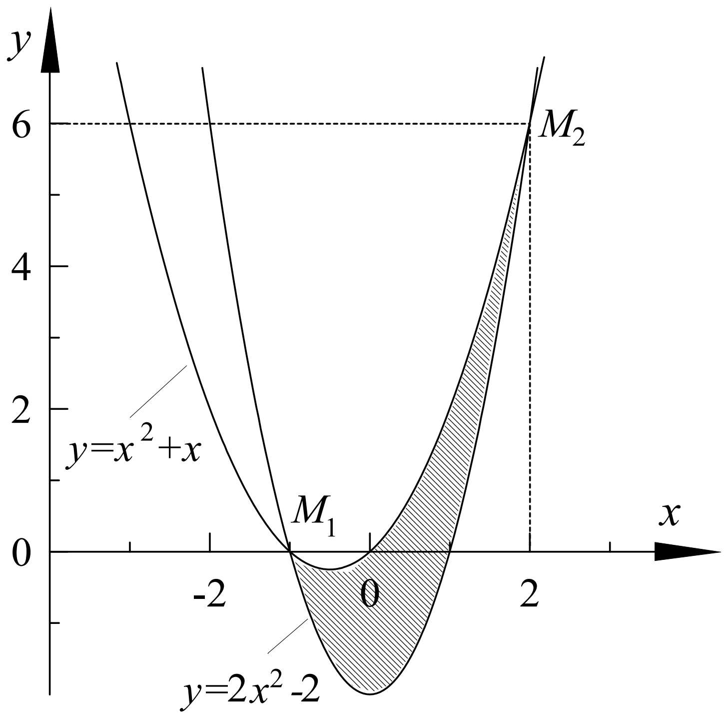

Рис.1.

Площадь данной фигуры находим по формуле $S=\int\limits_a^b \left[f_2(x)-f_1(x) \right] dx$:

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left[(x^2+x)-(2x^2-2) \right] dx=\int\limits_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx .$$

Применяем формулу Ньютона-Лейбница

$$S=\int\limits_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}=4{,}5 .$$

Ответ: $S=4{,}5$ (кв. ед.).

Задание 4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\text{а) } \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}, \quad \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}} .$$

а) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$.

Решение. Это несобственный интеграл I рода (с бесконечным пределом интегрирования). Согласно определению несобственного интеграла I рода

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$$

Поскольку $\dfrac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$, то

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b (\operatorname{arctg} x)^{-\frac{1}{2}}\,d(\operatorname{arctg} x) = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{(\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{\operatorname{arctg} x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{\operatorname{arctg} b} - 2\sqrt{\operatorname{arctg} 1}) = 2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ответ: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{2}-1\right).$

б) $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$

Решение. Это несобственный интеграл II рода (от неограниченной функции). Согласно определению несобственного интеграла II рода

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Поскольку при $x=1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, имеем

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(2x-3)\Big|_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \arcsin 0 - \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(2+2\varepsilon-3) = \arcsin 0 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\int\limits_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}} = \frac{\pi}{2}$.

Задание 5. Найти полный дифференциал функции $z = tg\,\frac{x^2}{y}$.

Решение. Полный дифференциал функции двух переменных $z = f(x;y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

В нашем случае

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{y}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = \frac{2x}{y\cos^2 \frac{x^2}{y}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{y}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = -\frac{x^2}{y^2\cos^2 \frac{x^2}{y}}.$$

Следовательно,

$$dz = \frac{2x}{y\cos^2 \frac{x^2}{y}}dx - \frac{x^2}{y^2\cos^2 \frac{x^2}{y}}dy = \frac{x}{y\cos^2 \frac{x^2}{y}}\left(2dx - \frac{x}{y}dy\right).$$

Ответ: $dz = \frac{x}{y\cos^2 \frac{x^2}{y}}\left(2dx - \frac{x}{y}dy\right)$.

Задание 6. Исследовать на экстремумы функцию

$$z = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2 + 1.$$

Решение. Найдем частные производные данной функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 12x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y.$$

Найдем критические точки функции, которые являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 12x = 0, \\ 2xy + 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y(x+1) = 0, \\ 3x^2 + y^2 + 12x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ 3x^2 + y^2 + 12x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -1, \\ 3x^2 + y^2 + 12x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ 3x(x+4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1, \\ y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Решая получившиеся системы уравнений, получим координаты четырех критических точек данной функции: $P_1(0;0)$, $P_2(-4;0)$, $P_3(-1;3)$, $P_4(-1;-3)$.

Проверим для каждой из них достаточные условия экстремума. Найдем частные производные второго порядка. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 12$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2$. Вычислим значения вторых частных производных в каждой критической точке.

Для точки $P_1(0;0)$ имеем: $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 12$, $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = 0$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0, \ A = 12 > 0.$$

Значит, в точке $P_1(0;0)$ данная функция имеет минимум. $z_{\min} = z(0;0) = 1$.

Для точки $P_2(-4;0)$ имеем:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = -12, \ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_2} = 0, \ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2} = -6.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 > 0, \ A = -12 < 0.$$

Значит, в точке $P_2(-4;0)$ данная функция имеет максимум.

$$z_{\max} = z(-4;0) = -64 + 96 + 1 = 33.$$

Для точки $P_3(-1;3)$ имеем: $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_3} = 6$, $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_3} = 6$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_3} = 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0.$$

Значит, в точке $P_3(-1;3)$ данная функция не имеет экстремума.

Для точки $P_4(-1;-3)$ имеем:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_4} = 6\,,\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_4} = -6\,,\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_4} = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0.$$

Значит, в точке $P_4(-1;-3)$ данная функция экстремума не имеет.

Ответ: $z_{\max} = z(-4;0) = 33,\ z_{\min} = z(0;0) = 1.$

Задание 7. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy,$ где область D ограничена линиями:

$$x + y = 2,\ x^2 + y^2 = 2y, (x > 0).$$

Решение. Найдем точки пересечения кривых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = 2y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y, \\ 4 - 4y + y^2 + y^2 = 2y. \end{cases}$$

$$2y^2 - 6y + 4 = 0,$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = 2.$$

$A(1;1), B(0;2) -$ точки пересечения данных линий. Построим область D (рис. 2). Для этого уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2y$ преобразуем к виду $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Значит, центр окружности имеет координаты $(0;1)$, а радиус окружности равен 1.

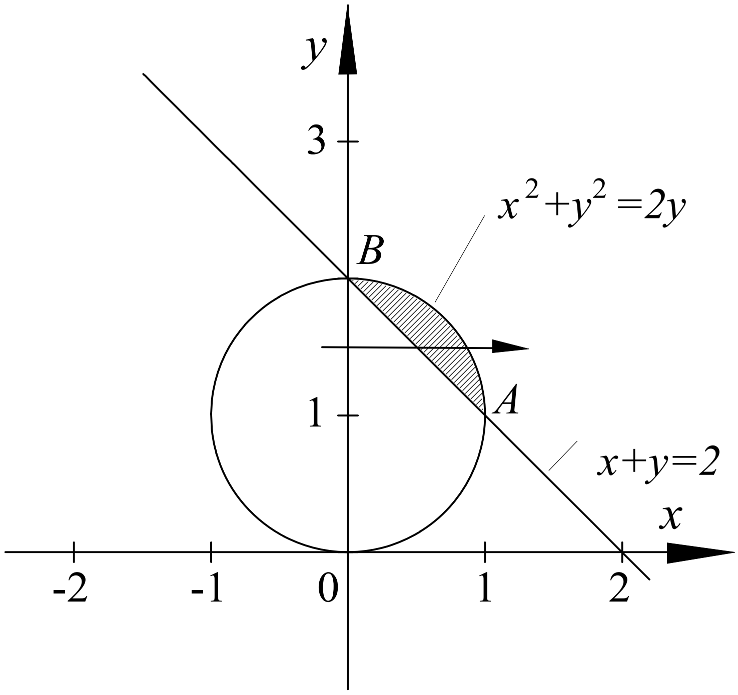

Рис.2.

Выберем направление интегрирования вдоль оси Ox. Область D ограничена линиями $x=\sqrt{1-(y-1)^2}$, $x=2-y$, $1\le y\le 2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_{2-y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} xydx=\int\limits_1^2 ydy\left.\frac{x^2}{2}\right|_{2-y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}}=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 y\Big(\big(1-(y-1)^2\big)-(2-y)^2\Big)dy=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_1^2 y\left(1-y^2+2y-1-4+4y-y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 y\left(-2y^2+6y-4\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^2\left(-y^3+3y^2-2y\right)dy=\left.\left(-\frac{y^4}{4}+y^3-y^2\right)\right|_1^2=(-4+8-4)-(-1/4+1-1)=1/4.$$

Ответ: $1/4$.

Задание 7. Вычислить $\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $2z=x^2+y^2$, $z=2$.

Решение. Изобразим область V.

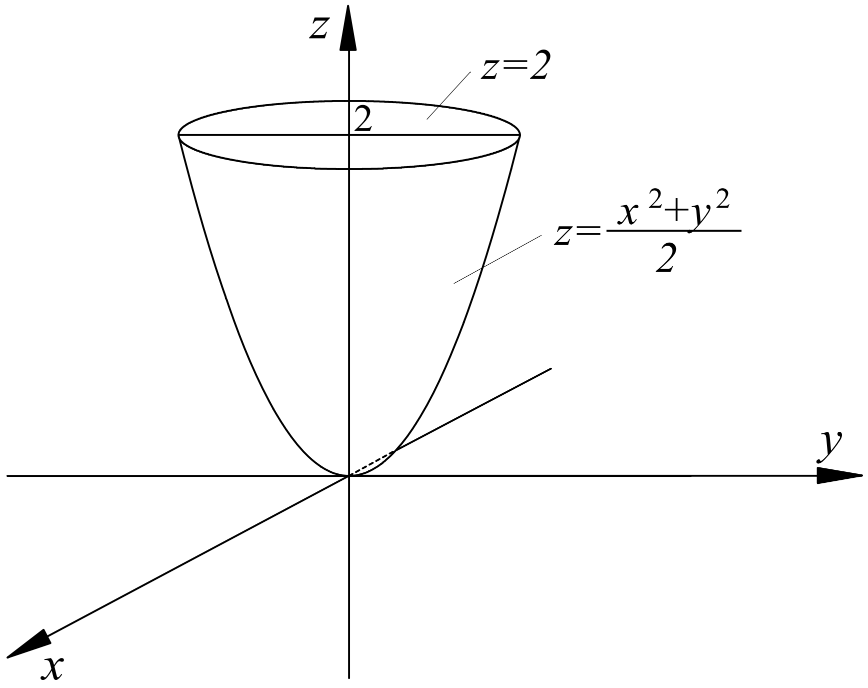

Рис.3.

Проекцией области V на плоскость xOy является окружность $x^2+y^2=4$. Для удобства вычисления перейдем к цилиндрическим координатам по формуле

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;z)\,\rho d\rho d\varphi dz.$$

Уравнения поверхностей $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ и $z=2$ в цилиндрических координатах примут вид $z=\frac{1}{2}\rho^2$ и $z=2$ соответственно, проекция поверхности на плоскость xOy $x^2+y^2=4$ примет вид $\rho=2$. Получаем

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho^2\cdot\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho\left(2-\frac{1}{2}\rho^2\right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5\right)d\rho = 2\pi\cdot\left(\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\pi\cdot\left(8-\frac{16}{3}\right) = 16\pi\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

Задание 7. Найти координаты центра масс области D, лежащей в плоскости xOy и ограниченной линиями $y = x,\ y = 2x,\ x = 2$, если ее плотность в каждой точке пропорциональна сумме координат этой точки.

Решение. Построим область D.

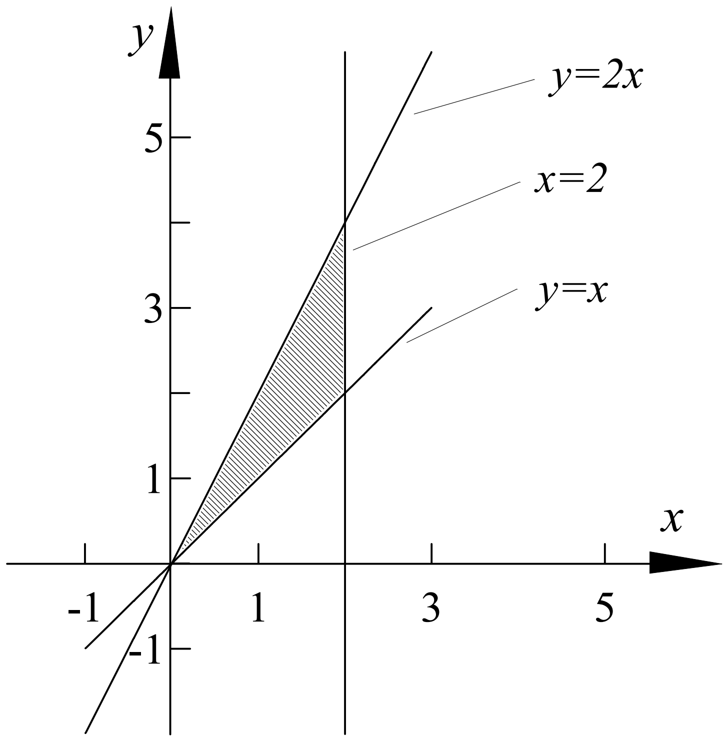

Рис.4.

Координаты центра масс (x_C, y_C) найдем по формулам:

$$x_C = \frac{M_y}{m},\ y_C = \frac{M_x}{m},\ \text{где}\ m = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy - \text{масса области } D,$$

$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy,\ M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy -$ статические моменты области D относительно оси Ox и Oy соответственно, $\mu(x,y) -$ поверхностная плотность.

По условию задачи $\mu(x,y) = k(x+y)$, где $k -$ коэффициент пропорциональности.

Область D ограничена снизу прямой $y = x$, сверху – прямой $y = 2x$, $0 \le x \le 2$. Следовательно,

$$m = \iint\limits_D k(x+y)\,dxdy = k\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x}(x+y)\,dy = k\int\limits_0^2 dx\left.\frac{(x+y)^2}{2}\right|_x^{2x} =$$

$$= \frac{k}{2}\int\limits_0^2\left(9x^2 - 4x^2\right)dx = \frac{5}{2}k\int\limits_0^2 x^2dx = \frac{5}{2}k\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{20}{3}k.$$

$$M_x = \iint\limits_D ky(x+y)\,dxdy = k\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x}\left(xy+y^2\right)dy = k\int\limits_0^2 dx\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^{2x} =$$

$$= k\int\limits_0^2\left(2x^3+\frac{8x^3}{3}\right)dx = \frac{14k}{3}\int\limits_0^2 x^3dx = \frac{14k}{3}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{56k}{3}.$$

$$M_y = \iint\limits_D kx(x+y)\,dxdy = k\int\limits_0^2 xdx\int\limits_x^{2x}(x+y)\,dy = k\int\limits_0^2 xdx\frac{(x+y)^2}{2}\Bigg|_x^{2x} =$$

$$= \frac{k}{2}\int\limits_0^2 x\left(9x^2-4x^2\right)dx = \frac{5}{2}k\int\limits_0^2 x^3dx = \frac{5}{2}k\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = 10k.$$

Следовательно, $x_C = 10k\cdot\frac{3}{20k} = 1{,}5,\ y_C = \frac{56k}{3}\cdot\frac{3}{20k} = 2{,}8.$

Ответ: $C(1{,}5;2{,}8)$.

4. Варианты контрольных заданий

Задание 1. Найти следующие интегралы:

1.1 а) $\int x e^{x^2} dx$, б) $\int \frac{dx}{2-\sqrt[3]{x-1}}$.

1.2 а) $\int \frac{8x\,dx}{x^2+6x+5}$, б) $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$.

1.3 а) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$, б) $\int \frac{dx}{1+\sin x+2\cos x}$.

1.4 а) $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}+2}$.

1.5 а) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$, б) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

1.6 а) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$, б) $\int e^x \sin 2x\,dx$.

1.7 а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{(x+3)\left(\sqrt[3]{x+3}+3\right)} dx$.

1.8 а) $\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\,dx$, б) $\int x\cdot \sin x\,dx$.

1.9 а) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, б) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

1.10 а) $\int \frac{x+3}{x^2+x-2} dx$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}-1} dx$.

1.11 а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^9 x}$, б) $\int x\cdot \cos x\,dx$.

1.12 а) $\int \frac{\operatorname{tg}^9 x}{\cos^2 x} dx$, б) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}$.

1.13 а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x} dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3} dx$.

1.14 а) $\int \frac{8-x}{x^2-7x+10} dx$, б) $\int \arcsin x\,dx$.

1.15 а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}}$, б) $\int e^{2x} \sin x\,dx$.

1.16 а) $\int \frac{\cos x}{\sin^9 x} dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

1.17 а) $\int \frac{\sin x}{\cos^{11} x} dx$, б) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

1.18 а) $\int \frac{x+1}{x^2-x-6}dx$, б) $\int \sqrt[3]{x}\cdot \ln x\, dx$.

1.19 а) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$.

1.20 а) $\int \frac{\cos x}{3\sin x+2}dx$, б) $\int x\, e^{-2x}\, dx$.

1.21 а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, б) $\int (2x+1)\sin x\, dx$.

1.22 а) $\int \frac{11-x}{(x-5)(x+1)}dx$, б) $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{2x-1}}$.

1.23 а) $\int x\sin(x^2+3)\, dx$, б) $\int x\cdot e^{-4x}\, dx$.

1.24 а) $\int x\sin(2-x^2)\, dx$, б) $\int (3x+2)\cos 2x\, dx$.

1.25 а) $\int 4x^3\cos(x^4)\, dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

1.26 а) $\int \frac{3x+2}{x^2-x-12}dx$, б) $\int \sqrt{x}\cdot \ln x\, dx$.

1.27 а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$, б) $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

1.28 а) $\int e^x\sin(e^x)\, dx$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-4\right)}dx$.

1.29 а) $\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}dx$, б) $\int x\cdot \sin 2x\, dx$.

1.30 а) $\int \frac{3x-10}{(x+2)(x-6)}dx$, б) $\int (x+1)\ln x\, dx$.

***Задание 2*.** Вычислить определенный интеграл.

2.1 $\int_0^1 x\cdot \mathrm{arctg}\, x\, dx$.

2.2 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

2.3 $\int_1^e x^2\ln x\, dx$.

2.4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx$.

2.5 $\int_{-2}^{6} \frac{2}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$.

2.6 $\int_{-2}^{1} \frac{4}{\sqrt{x+3}+3}dx$.

2.7 $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} x\, e^{-3x}\, dx$.

2.8 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

2.9 $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

2.10 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$.

2.11 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x}$.

2.12 $\int_{0}^{5} (x+5)\cdot e^{\frac{1}{5}x}\, dx$.

2.13 $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

2.14 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}$.

2.15 $\int_{-1}^{2} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}\, dx$.

2.16 $\int_{1}^{e} x \ln x\, dx$.

2.17 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{16\sin^2 x + 7\cos^2 x}$.

2.18 $\int_{-10}^{-9} \frac{\sqrt{x+10}}{\sqrt{x+10}+1} dx$

2.19 $\int_{0}^{2} x\cdot e^{\frac{1}{2}x}\, dx$

2.20 $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x}$.

2.21 $\int_{8}^{27} \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}\, dx$.

2.22 $\int_{1}^{2} x^4 \cdot \ln x\, dx$.

2.23 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$.

2.24 $\int_{-7}^{0} \frac{dx}{2-\sqrt[3]{x-1}}$.

2.25 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\, dx$.

2.26 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

2.27 $\int_{0}^{1} xe^{-x} dx$.

2.28 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 3x\, dx$.

2.29 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$.

2.30 $\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

3.1 $y = 2(x^2 - 1)$, $y = x^2 + x$.

3.2 $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$.

3.3 $y = x^2 - 9$, $y = -x - 7$.

3.4 $y = 3 - 2x$, $y = x^2$.

3.5 $y = \sqrt{x}$, $y = x^4$.

3.6 $y = x^3$, $y = x$.

3.7 $y=x^3$, $y=x^2$.

3.8 $y=2x^2$, $y=4-2x^2$.

3.9 $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$, $x=e^2$.

3.10 $y^2=x^3$, $y=x^3$.

3.11 $y=x^2$, $y=4x-3$.

3.12 $y=-x^2$, $y=-3x+2$.

3.13 $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

3.14 $y=x^2+2$, $x+y=4$.

3.15 $y=\sqrt{2x}$, $y=x$.

3.16 $y=x^2$, $y=7x-10$.

3.17 $y=x^2$, $y=3-2x^2$.

3.18 $y=x^2$, $y=-x^3$.

3.18 $y=2x^2$, $y=-x^3$.

3.19 $y=2x$, $y=2x^3$.

3.20 $y=2\sqrt{x}$, $y=2x^3$.

3.21 $y=\sqrt{2x}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$.

3.22 $y=\dfrac{x}{2}$, $y=\dfrac{x^2}{4}$.

3.23 $y=\dfrac{x}{3}$, $y=\dfrac{x^3}{27}$.

3.24 $y=x^2+2x$, $y=x+2$.

3.25 $y=1-x^2$, $y=x-1$.

3.26 $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

3.27 $y=2x-x^2; y=-x$.

3.28 $y=2x^2+1$, $y=2x+5$.

3.29 $xy=5$, $x+y=6$.

3.30 $y=(x-1)^3$, $y=x-1$.

Задание 4. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

4.1 $\displaystyle\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-9}}$.

4.2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

4.3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{2x-5-x^2}$.

4.4 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2-6x-7}$.

4.5 $\displaystyle\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$.

4.6 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

4.7 $\displaystyle\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$.

4.8 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

4.9 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.

4.10 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

4.11 $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+10}$.

4.12 $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

4.13 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$.

4.14 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

4.15 $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+25}$.

4.16 $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

4.17 $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+12}}$.

4.18 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}$.

4.19 $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-3x+2}$.

4.20 $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-8x+7}$.

4.21 $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x-9}}$.

4.22 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$.

4.23 $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{6x-8-x^2}$.

4.24 $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+10x+26}$.

4.25 $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+13}$.

4.26 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[6]{(1-\sin x)^5}}\, dx$.

4.27 $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

4.28 $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-5x+4}$.

4.29 $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

4.30 $\int\limits_{0}^{e} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$.

Задание 5. Найти частные производные и полный дифференциал первого порядка функции.

5.1 $z=\ln\left(x^2-e^{-y}\right)$.

5.2 $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

5.3 $z=\sin\left(y-x^2\right)$.

5.4 $z=x\sin\left(x^2 y\right)$.

5.5 $z=\operatorname{tg}\left(x^3+2xy\right)$.

5.6 $z=e^{x\sqrt{y}}$.

5.7 $z=\ln\left(3x^2+y^3\right)$.

5.8 $z=\sin\left(2x-y\right)$.

5.9 $z=x^2\ln\left(x^2-2xy\right)$.

5.10 $z=\frac{x^2-y}{x+2y^2}$.

5.11 $z=\operatorname{arcctg}\left(xy\right)$.

5.12 $z=2^{x^2+y^3}$.

5.13 $z=\arcsin\left(2x^2 y\right)$.

5.14 $z=\ln\left(x^2+y^3\right)$.

5.15 $z=e^x\left(\sin x+\cos y\right)$.

5.16 $z=\left(x+2y\right)e^{xy}$.

5.17 $z=y\ln\frac{x}{y}$.

5.18 $z=\frac{y}{x^2+y^2}$.

5.19 $z=\arcsin\left(xy\right)$.

5.20 $z=yx^y$.

5.21 $z = e^{y}\sin(xy)$.

5.22 $z = \ln x \cdot \sin(x + 2y)$.

5.23 $z = \dfrac{x^3 y}{2x + y}$.

5.24 $z = \arcsin\sqrt{xy}$.

5.25 $z = e^{2x^2 - y^5}$.

5.26 $z = \cos\left(2x - y^2\right)$.

5.27 $z = \operatorname{arcctg}\left(x^2 y\right)$.

5.28 $z = \operatorname{ctg}(xy)\ln y$.

5.29 $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

5.30 $z = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + xy^2}}$.

Задание 6. Исследовать на экстремумы функции.

6.1 $z = x^2 + y^2 - 3xy - x - y + 1$.

6.2 $z = -2x^2 - xy - 2y^2 + 15x + 2$.

6.3 $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 1$.

6.4 $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y - 3$.

6.5 $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 3$.

6.6 $z = -3x^3 - 3y^3 + 9xy - 5$.

6.7 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 2$.

6.8 $z = -x^2 - y^2 + 4x - 6y + 1$.

6.9 $z = x^3 + y^3 - 3xy - 5$.

6.10 $z = -5x^2 - 3y^2 + 2xy + 2$.

6.11 $z = x^2 + 10y^2 - 6xy - 2x + 6y + 8$.

6.12 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

6.13 $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$.

6.14 $z = 3x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 5$.

6.15 $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

6.16 $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 2$.

6.17 $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y$.

6.18 $z = 2x^3 + 5x^2 + xy + y$.

6.19 $z = x^2 + 3(y + 2)^2$.

6.20 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10x + 3$.

6.21 $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$.

6.22 $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

6.23 $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2 + 7x$.

6.24 $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 10x - 19y$.

6.25 $z = x^2 + xy + y^2 - x + 4y + 1$.

6.26 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

6.27 $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.

6.28 $z = xy - x^2 - y^2 - 5x + 4y - 3$.

6.29 $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 3y + 1$.

6.30 $z = x^2 - 2y^2 + 3xy + x - 7y + 2$.

Задание 7. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

7.1 $\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy$, $\quad D: y = x^2,\ \ x = y^2$.

7.2 $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, $\quad D: y = x^2,\ y = 2x$.

7.3 $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, $\quad D: y^2 = x,\ y = x$.

7.4 $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, $D: y = 2 - x,\ y = x,\ x = 0$.

7.5 $\iint\limits_D \left(x^3 - 2y\right) dxdy$, $D: y = x^2 - 1, x \ge 0,\ y \le 0$.

7.6 $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$, $D: y^2 = x;\ x = 0;\ y = 1$.

7.7 $\iint\limits_D (4 - x) dxdy$, $D: x^2 - 4y = 0;\ y = 1;\ x \ge 0$.

7.8 $\iint\limits_D xy dxdy$, $D: x - y - 2 = 0;\ x - y^2 = 0$.

7.9 $\iint\limits_D \left(x - y^2\right) dxdy$, $D: y = 0;\ x = 1;\ y = x$.

7.10 $\iint\limits_D xy dxdy$, $D: y = \sqrt{x};\ y = 0;\ x + y - 2 = 0$.

7.11 $\iint\limits_D e^x dxdy$, $D: x = 0;\ \ y = 2;\ x = \ln y$.

7.12 $\iint\limits_D e^{x+y} dxdy$, $D: y = e^x;\ x = 0;\ y = 2$.

7.13 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, $D: y = x;\ y = 1/x;\ x = 2$.

7.14 $\iint\limits_D \frac{x+1}{y^2} dxdy$, $D: x = 4;\ y = x;\ y = 1/x$.

7.15 $\iint\limits_D x dxdy$, $D: x = 0,\ y = 0,\ y = \sqrt{4 - x^2}$.

7.16 $\iint\limits_D x^2 dxdy$, $D: y = x,\ y = 1/x,\ x = 2$.

7.17 $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, $D: y = 2x^3,\ y = 0,\ x = 1$.

7.18 $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, $D: x = y^2,\ x = 1$.

7.19 $\iint\limits_D x(2x + y) dxdy$, $D: y = 1 - x^2,\ y = 0$.

7.20 $\iint\limits_D xy^3 dxdy$, $D: y^2 = 1 - x,\ x = 0$.

7.21 $\iint\limits_D x(y + 5) dxdy$, $D: y = x + 5,\ y = -x - 5,\ x = -2;\ x = 0$.

7.22 $\iint\limits_D (x + 1) y^2 dxdy$, $D: y = 3x^2,\ y = 3$.

7.23 $\iint\limits_D \left(x^3 + y\right) dxdy$, $D: x + y = 1,\ x + y = 2,\ x \le 1,\ x \ge 0$.

7.24 $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $\quad D: y = x^3,\ y = 4x,\ y \ge 0$.

7.25 $\iint\limits_D \left(x^3 + 2y\right)dxdy$, $\quad D: x + y = 1,\ y = x^2 - 1,\ x \ge 0$.

7.26 $\iint\limits_D \left(x^2 + 2y\right)dxdy$, $\quad D: y = x;\ x + y = 2;\ x = 0$.

7.27 $\iint\limits_D xdxdy$, $\quad D: y = x^2,\ y = 2x$.

7.28 $\iint\limits_D \sin(x + y)dxdy$, $\quad D: y = x,\ x + y = \dfrac{\pi}{2},\ y = 0$.

7.29 $\iint\limits_D (2 - y)dxdy$, $\quad D: y = x^2,\ y = 4$.

7.30 $\iint\limits_D (x - 2y)dxdy$, $\quad D: y = 3 - x,\ y = x + 1,\ x = 0$.

Задание 8. Вычислить тройной интеграл по области V, ограниченной указанными поверхностями, перейдя к цилиндрическим координатам.

8.1 $\iiint\limits_V z^2dxdydz$; $\quad V: \left\{y = \sqrt{z - x^2}; z = 1;\ y = 0\right\}$.

8.2 $\iiint\limits_V zdxdydz$; $\quad V: \left\{z = 0; z = 2y; y = \sqrt{9 - x^2}\right\}$.

8.3 $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)dxdydz$; $\quad V: \left\{z = 0; x^2 + y^2 = 1; z = 4 - x - y\right\}$.

8.4 $\iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)dxdydz$; $\quad V: \left\{y = 2; x^2 + z^2 = 2y\right\}$.

8.5 $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$; $\quad V: \left\{y = 0; z = 0; z = 2; x^2 + y^2 = 2x\right\}$.

8.6 $\iiint\limits_V xdxdydz$; $\quad V: \left\{x^2 = y^2 + z^2; x = 1\right\}$.

8.7 $\iiint\limits_V dxdydz$; $\quad V: \left\{x^2 + z^2 = 2x;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ y \ge 0\right\}$.

8.8 $\iiint\limits_V dxdydz$; $\quad V: \left\{x^2 + y^2 = 1;\ z = 2 - x - y;\ z = 0\right\}$.

8.9 $\iiint\limits_V \left(x^2 + y + z^2\right)^2 dxdydz$; $\quad V: \left\{x^2 + z^2 = 1; y = 0; y = 1\right\}$.

8.10 $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$; $\quad V: \left\{x^2 + y^2 - 2x = 0; y = 0; z = 0; z = 1\right\}$.

8.11 $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz$; $\quad V: \left\{x^2 + y^2 = 1; z = 0; z = 2\right\}$.

8.12 $\iiint\limits_V z^3 dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=z^2; z=1; y\geq 0; x\geq 0\right\}.$

8.13 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V:\left\{x^2+z^2=1; y=0; y=1\right\}.$

8.14 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=4; z=0; z=1\right\}.$

8.15 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=2z; z=2\right\}.$

8.16 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=2x; y=0; z=0; z=2\right\}.$

8.17 $\iiint\limits_V dxdydz;$ $V:\left\{z=0; x^2+y^2=1; x+y+z=3\right\}.$

8.18 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=1; z=0; z=1\right\}.$

8.19 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=1; z=0;\ z=x^2+y^2\right\}.$

8.20 $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=9;\ z^2=x^2+y^2;\ y\geq 0;\ z\geq 0;\right\}.$

8.21 $\iiint\limits_V \sqrt{z^2+y^2}\,dxdydz;$ $V:\left\{x=\sqrt{y^2+z^2};\ x=2\right\}.$

8.22 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz;$ $V:\left\{z=x^2+y^2;\ z=4\right\}.$

8.23 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz;4$ $V:\left\{x^2+y^2=1; z=0; x+y+z=2\right\}.$

8.24 $\iiint\limits_V dxdydz;$ $V:\left\{z=x; x=\sqrt{4-y^2}; z\geq 0\right\}.$

8.25 $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V:\left\{z=0; z=2y; y=\sqrt{9-x^2}\right\}.$

8.26 $\iiint\limits_V xydxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=1;\ z\geq 0;\ y\geq 0;\ z=x^2+y^2\right\}.$

8.27 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=2z; z=2\right\}.$

8.28 $\iiint\limits_V zdxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=2x; y=0; z=0; z=2\right\}.$

8.29 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz;$ $V:\left\{x^2+y^2=2z; z=2\right\}.$

8.30 $\iiint\limits_V dxdydz;$ $V:\left\{z=\sqrt{x^2+y^2}; 2-z=x^2+y^2\right\}.$

Задание 9. Приложения двойных интегралов к механике.

9.1 Найти координаты центра масс плоской однородной пластинки, ограниченной линиями: $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

9.2 Вычислить статический момент относительно оси Ox однородной плоской фигуры, лежащей в плоскости xOy и ограниченной линиями $y^2=4x+4,\ y^2=-2x+4$.

9.3 Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры плотностью $\mu(x,y)=1$, ограниченной линиями $x+y=2,\ x=2,\ y=2$.

9.4 Вычислить координаты центра масс однородной пластины, лежащей в плоскости xOy и ограниченной линиями $y=-x^2+2x,\ y=0$.

9.5 Вычислить момент инерции относительно точки пересечения диагоналей прямоугольной пластинки со сторонами 4 и 6, если ее плотность $\mu(x,y)=1$.

9.6 Вычислить момент инерции относительно оси Oy пластины плотностью $\mu(x,y)=x^2y$, лежащей в плоскости xOy и ограниченной линиями $y=x^2,\ y=1$.

9.7 Определить массу фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=0$, если плотность распределения масс $\mu(x,y)=x+y$.

9.8 Определить координаты центра масс области, ограниченной линиями $y=x^2, x=1,\ y=0$, если ее плотность $\mu(x,y)=1$.

9.9 Определить координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной прямой y=0 и одной полуволной синусоиды $y=\sin x$.

9.10 Найти статический момент прямоугольника со сторонами $a=3$ и $b=2$ относительно стороны a, если плотность распределения масс в каждой точке равна произведению координат этой точки.

9.11 Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры, ограниченной линией $x^2+y^2-2x=0$, если ее плотность $\mu(x,y)=1$.

9.12 Вычислить массу пластинки, ограниченной линией $x^2+y^2=1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu(x,y)=2-x-y$,

9.13 Вычислить статический момент однородной пластины, ограниченной линиями $x^2+y^2-2y=0,\ x-y\ge 0$, относительно оси Oy.

9.14 Определить координаты центра масс однородной пластины, ограниченной линиями $y^2=x+2, x=2$.

9.15 Определить статический момент относительно оси Ox, плоской области, ограниченной линиями $y=0, x=1, y=x^3$, если известно, что плотность распределения масс в каждой точке $\mu(x,y)=xy$.

9.16 Определить массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, x = 4, y = 0$, если плотность распределения масс $\mu(x, y) = 3x + y$.

9.17 Вычислить момент инерции круга, радиуса R, относительно начала координат.

9.18 Вычислить момент инерции плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$ относительно оси Oy, если поверхностная плотность в каждой точке $\mu(x, y) = y$.

9.19 Определить массу пластинки, имеющей форму круга с радиусом R, если плотность в любой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра круга.

9.20 Найти статический момент относительно оси Oy однородной пластинки, ограниченной линиями $y = x^2$, $x + y = 2$.

9.21 Найти момент инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$ относительно оси Ox.

9.22 Найти статический момент относительно оси Oy треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, если плотность его в каждой точке равна ординате этой точки.

9.23 Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \dfrac{2}{\pi} x$.

9.24 Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu(x, y) = x^2 + y^2$.

9.25 Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной линиями $y^2 = x, x^2 = y$.

9.26 Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $y = x^2,\ x = 2,\ y = 0$, если плотность ее в каждой точке равна сумме координат этой точки.

9.27 Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $\mu(x, y) = x^2 + 3y^2$.

9.28 Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $y = 4 - x^2,\ y = 0$ относительно оси Oy.

9.29 Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной линиями $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$.

9.30 Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородной пластинки, ограниченной линиями $y = (x - 1)^2,\ x + y = 1$.

Приложение

Свойства интегралов:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$,
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,
3. $\int dF(x) = F(x) + C$,
4. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx$,
5. $\int Cf(x)\, dx = C\int f(x)\, dx$.

Формула интегрирования по частям

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^\alpha du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \;\; (\alpha \neq -1)$;
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;
3. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \;\; (a > 0, a \neq 1)$;
4. $\int e^u\, du = e^u + C$;
5. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$;
6. $\int \cos u\, du = \sin u + C$;
7. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C$;
8. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C$;
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;
11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C$;
12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$;
14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;
15. $\int \dfrac{dx}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$;
16. $\int \dfrac{dx}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$;

Список литературы

1. **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 315 с.
2. Высшая математика: Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск: Выш. шк., 2000. – 351 с.
3. **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.
4. **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 640 с.
5. **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Выш. шк., 1992. – 384 с.
6. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1985.
7. **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис–пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.
8. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – Т.1. –464 с.
9. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. *Г.И. Кручковича.* М.: Высшая школа, 1973.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под общей ред. А.П.Рябушко. В 3 ч. Ч.2 и 3. Мн.: Вышэйшая школа, 1991.
11. **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – М.: Высш. шк., 2005. – 479 с.

4. Варианты контрольных заданий

Задание 1. Найти следующие интегралы:

1.1 а) $\int x e^{x^2} dx$, б) $\int \frac{dx}{2-\sqrt[3]{x-1}}$.

1.2 а) $\int \frac{8x\,dx}{x^2+6x+5}$, б) $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$.

1.3 а) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$, б) $\int \frac{dx}{1+\sin x+2\cos x}$.

1.4 а) $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}+2}$.

1.5 а) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$, б) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1.6 а) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$, б) $\int e^x \sin 2x\,dx$.

1.7 а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{(x+3)\left(\sqrt[3]{x+3}+3\right)} dx$.

1.8 а) $\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\,dx$, б) $\int x\cdot \sin x\,dx$.

1.9 а) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, б) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

1.10 а) $\int \frac{x+3}{x^2+x-2} dx$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1}-1} dx$.

1.11 а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^9 x}$, б) $\int x\cdot\cos x\,dx$.

1.12 а) $\int \frac{\operatorname{tg}^9 x}{\cos^2 x} dx$, б) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}$.

1.13 а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x} dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3} dx$.

1.14 а) $\int \frac{8-x}{x^2-7x+10} dx$, б) $\int \arcsin x\,dx$.

1.15 а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,\sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}}$, б) $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

1.16 а) $\int \frac{\cos x}{\sin^9 x} dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

1.17 а) $\int \frac{\sin x}{\cos^{11} x} dx$, б) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

1.18 а) $\int \frac{x+1}{x^2-x-6} dx$, б) $\int \sqrt[3]{x}\cdot \ln x\,dx$.

1.19 а) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$.

1.20 а) $\int \frac{\cos x}{3\sin x + 2} dx$, б) $\int x\, e^{-2x}\, dx$.

1.21 а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, б) $\int (2x+1)\sin x\, dx$.

1.22 а) $\int \frac{11-x}{(x-5)(x+1)}\, dx$, б) $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{2x-1}}$.

1.23 а) $\int \sin(x^2+3)\, x\, dx$, б) $\int x\cdot e^{-4x}\, dx$.

1.24 а) $\int \sin(2-x^2)\, x\, dx$, б) $\int (3x+2)\cos 2x\, dx$.

1.25 а) $\int 4x^3\cos(x^4)\, dx$, б) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

1.26 а) $\int \frac{3x+2}{x^2-x-12}\, dx$, б) $\int \sqrt{x}\cdot \ln x\, dx$.

1.27 а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$, б) $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

1.28 а) $\int e^x \sin(e^x)\, dx$, б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-4\right)} dx$.

1.29 а) $\int e^x \cos(e^x)\, dx$, б) $\int x\cdot \sin 2x\, dx$.

1.30 а) $\int \frac{3x-10}{(x+2)(x-6)}\, dx$, б) $\int (x+1)\ln x\, dx$.

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin 2x-2)\, dx$ $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} (x^2+1)\cdot e^{3x}\, dx$ $\int\limits_0^{5} (x+5)\cdot e^{\frac{1}{5}x}\, dx$ $\int \ln\frac{x}{x+1} dx$

$\int \left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot \operatorname{arctg} 3x\, dx$ $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (3x-1)\cdot \operatorname{arctg} 2x\, dx$ $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{2x+1}} dx$ $\int\limits_0^{1} \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}\, dx$

$\int \frac{\arccos\sqrt{5x}}{\sqrt{1-5x}} dx$ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\, dx$ $\int (x^2+5)e^x\, dx$ $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx$ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2x\, dx$

$\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$ $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ $\int \frac{dx}{2-\sin x-\cos x}$ $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}$ $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}$