

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Методические указания и варианты заданий
к контрольной работе № 4
для студентов технических специальностей
заочной формы обучения*



Могилев 2009

УДК 519.21
ББК 22.171
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «9» сентября 2008 г., протокол № 1

Составители: Т. А. Кулешова;
С. А. Скрыган

Рецензент канд. техн. наук, доц. Л. А. Плетнев

Изложены методические рекомендации и контрольные задания по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика».

Задания предназначены для студентов технических специальностей заочной формы обучения.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнев
Технический редактор	А. Т. Червинская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 27.02.2009. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.- печ. л. 1.63. Уч.-изд. л. 1.5. Тираж 315 экз. Заказ 124.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
212000, г. Могилев, пр. Мира, 43

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет», 2009

Содержание

1 Требования к содержанию и оформлению контрольной работы	4
2 Варианты контрольной работы № 4	6
2.1 Классический метод подсчета вероятности	6
2.2 Формула полной вероятности	6
2.3 Повторные испытания. Законы распределения дискретной случайной величины	7
2.4 Непрерывная случайная величина	8
2.5 Двумерные случайные величины	9
2.6 Эмпирическая функция распределения выборки	10
2.7 Интервальные оценки	11
2.8 Проверка гипотез	13
3 Решение типового варианта заданий	15
Список литературы	25
Приложение А.....	26
Приложение Б	28

1 Требования к содержанию и оформлению контрольной работы

При оформлении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для доработки.

1 Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля 4–5 см для замечаний рецензента.

2 На обложке тетради студенту следует разборчиво написать номер работы, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы и номер зачетной книжки.

3 В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго в соответствии с вариантом. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4 Решения задач должны быть расположены в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5 Перед решением каждой задачи необходимо полностью переписать ее условие, в конце решения записать ответ.

6 Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы, вычисления производить в строгом порядке.

7 В конце контрольной работы необходимо указать, каким учебным пособием или учебником студент пользовался (автор, название учебника, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать студенту, что следует изучить для завершения контрольной работы.

8 После изучения проверенной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

В случае незачета работы и отсутствия указания рецензента на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При высылаемых исправлениях вместе с новым вариантом решения необходимо предоставить проверенную работу и рецензию на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента.

Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Номер варианта определяется по двум последним цифрам зачетки, если это число больше 30, то вариант определяется вычитанием числа 30, если больше 60, то вычитанием числа 60, если больше 90, то вычитанием числа 90.

Вопросы для самостоятельного изучения

- 1 Случайные события и их классификация.
- 2 Классическое, статистическое и аксиоматическое определения вероятности.
- 3 Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности.
- 4 Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- 5 Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.
- 6 Наивероятнейшее число наступления события.
- 7 Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
- 8 Теорема Пуассона. Простейший поток событий.
- 9 Понятие дискретной случайной величины и ее числовые характеристики.
- 10 Функция распределения случайной величины и ее свойства.
- 11 Понятие непрерывной случайной величины. Плотность распределения вероятностей и ее свойства.
- 12 Числовые характеристики случайных величин.
- 13 Основные дискретные распределения: биномиальное, пуассоновское, геометрическое.
- 14 Равномерный закон распределения непрерывной случайной величины и его числовые характеристики.
- 15 Показательный (экспоненциальный) закон распределения и его числовые характеристики.
- 16 Нормальный закон распределения и его числовые характеристики. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал, правило трех сигм.
- 17 Корреляционный момент и коэффициент корреляции и его свойства.
- 18 Момент случайной величины. Асимметрия и эксцесс.
- 19 Закон больших чисел. Неравенство Маркова и Чебышева.
- 20 Теоремы Чебышева, Бернулли. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова.
- 21 Статистическая совокупность. Вариационный ряд (дискретный и интервальный). Полигон и гистограмма статистического распределения.
- 22 Основные числовые характеристики статистического распределения. Среднее арифметическое и статистическая дисперсия, их свойства.
- 23 Выборочный метод. Точечное оценивание (несмещенность, состоятельность и эффективность).
- 24 Интервальное оценивание. Построение доверительных интервалов.
- 25 Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия получения точечных оценок.
- 26 Статистическая проверка гипотез (основные понятия).

27 Проверка гипотезы о среднем значении для нормально распределенной генеральной совокупности.

28 Критерии согласия: Пирсона, Колмогорова, Фишера-Снедекора.

2 Варианты контрольной работы № 4

2.1 Классический метод подсчета вероятности

В партии из N деталей n деталей имеют дефект (таблица 1). Какова вероятность того, что из взятых наугад m деталей k деталей являются дефектными?

Таблица 1 – Варианты задания 1

Номер варианта	N	n	m	k	Номер варианта	N	n	m	k
1	20	4	5	2	16	20	5	4	1
2	30	5	5	3	17	16	6	5	3
3	20	5	4	2	18	18	5	4	2
4	25	6	5	3	19	14	4	3	1
5	15	4	3	2	20	10	4	3	2
6	20	6	4	1	21	16	5	3	2
7	30	4	3	2	22	20	6	4	3
8	16	4	3	2	23	26	5	4	2
9	18	6	5	3	24	32	8	5	3
10	12	5	4	2	25	34	10	6	4
11	30	10	5	3	26	30	6	5	3
12	26	8	6	4	27	25	5	3	2
13	24	8	5	3	28	24	6	4	3
14	22	6	4	2	29	28	8	5	2
15	20	5	3	2	30	24	6	3	2

2.2 Формула полной вероятности

На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n_1 с первого завода, n_2 со второго, n_3 с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p_1 , на втором p_2 , на третьем p_3 (таблица 2). Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

Таблица 2 – Варианты задания 2

Номер варианта	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3	Номер варианта	n_1	p_1	n_2	p_2	n_3	p_3
1	25	0,9	35	0,8	40	0,7	16	25	0,9	35	0,8	40	0,7
2	15	0,8	25	0,7	10	0,7	17	15	0,8	25	0,7	20	0,9
3	40	0,9	35	0,7	25	0,9	18	40	0,9	25	0,8	35	0,8
4	25	0,7	10	0,9	15	0,8	19	14	0,8	26	0,6	20	0,7
5	10	0,9	20	0,8	20	0,6	20	18	0,9	32	0,8	30	0,7
6	40	0,8	30	0,8	30	0,9	21	30	0,9	20	0,7	10	0,8
7	20	0,8	50	0,9	30	0,8	22	16	0,9	24	0,8	60	0,9
8	35	0,7	35	0,8	30	0,9	23	30	0,9	10	0,7	10	0,7
9	15	0,9	45	0,8	40	0,9	24	15	0,8	35	0,9	50	0,8
10	40	0,8	15	0,7	45	0,8	25	40	0,8	20	0,8	40	0,9
11	20	0,9	15	0,9	15	0,8	26	10	0,9	20	0,8	10	0,6
12	14	0,8	26	0,9	10	0,8	27	35	0,8	25	0,7	50	0,8
13	16	0,8	40	0,9	44	0,7	28	40	0,8	20	0,9	40	0,8
14	30	0,9	20	0,7	50	0,7	29	30	0,9	40	0,8	30	0,9
15	20	0,8	10	0,9	20	0,9	30	10	0,7	20	0,9	20	0,7

2.3 Повторные испытания. Законы распределения дискретной случайной величины

Имеется N складов запчастей. Вероятность того, что требуемого вида запчасть отсутствует на этих складах, одинакова и равна p (таблица 3). Составить закон распределения числа складов, на которых искомая запчасть отсутствует в данный момент. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

Таблица 3 – Варианты задания 3

Номер варианта	N	p	Номер варианта	N	p
1	3	0,2	16	4	0,15
2	4	0,25	17	3	0,24
3	3	0,1	18	2	0,1
4	2	0,2	19	3	0,12
5	4	0,1	20	4	0,14
6	3	0,2	21	4	0,16
7	4	0,3	22	3	0,15
8	3	0,1	23	3	0,13

Окончание таблицы 3

Номер варианта	N	p	Номер варианта	N	p
9	3	0,12	24	2	0,21
10	4	0,3	25	2	0,16
11	3	0,15	26	3	0,19
12	3	0,18	27	4	0,26
13	4	0,24	28	3	0,14
14	2	0,14	29	2	0,15
15	3	0,16	30	3	0,22

2.4 Непрерывная случайная величина

Дана функция распределения непрерывной СВХ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность попадания СВХ на отрезок $[\alpha; \beta]$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$ (таблица 4).

Таблица 4 – Варианты задания 4

Номер варианта	c_0	c_1	c_2	c_3	c	b	α	β
1	0	1	0	0	0	1	1/2	1
2	0	0	1/10	0	0	10	3	5
3	1	0	0	0	0	1	1/2	1
4	0	0	1/2	-1	2	4	3	4
5	0	1/9	0	0	0	3	1	2
6	0	1/4	0	0	0	2	1	2
7	1/8	0	0	0	0	2	1	2
8	1/27	0	0	0	0	3	0	1
9	1/10	0	1/10	0	0	2	0	1
10	0	0	1/7	0	0	7	2	5
11	0	1/9	2/9	1/9	-1	2	1	2
12	1/9	0	0	1/9	-1	2	1	2
13	0	1/15	2/15	0	0	3	0	2
14	0	0	1/5	1/5	-1	4	0	3
15	1/14	0	3/14	0	0	2	0	1

Окончание таблицы 4

Номер варианта	c_0	c_1	c_2	c_3	c	b	α	β
16	0	0	1/3	0	0	3	1	2
17	0	1/6	1/6	0	0	2	0	1
18	0	1/10	3/10	0	0	2	0	1
19	0	0	1/9	0	0	9	3	4
20	1/4	0	-1/2	0	0	2	1	2
21	0	0	1	0	0	1	1/2	1
22	0	0	1/5	-1/5	1	6	1	3
23	0	0	1/6	0	0	6	2	5
24	0	0	1/2	1/2	-1	1	0	1
25	0	0	1/4	0	0	4	2	3
26	0	0	1	-1	1	2	1,5	2
27	0	0	1/4	-1/4	1	5	2	4
28	0	0	1/3	-1/3	1	4	3	4
29	0	0	1/5	0	0	5	1	3
30	0	0	1/8	0	0	8	2	4

2.5 Двумерные случайные величины

Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) (таблица 5). Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y . Написать уравнение линейной средней квадратической регрессии X на Y .

Таблица 5 – Варианты задания 5

Номер варианта	Числовые данные				Номер варианта	Числовые данные			
	$Y \backslash X$	1	3	4		$Y \backslash X$	5	7	9
1	$Y \backslash X$	1	3	4	16	$Y \backslash X$	5	7	9
	2	0,16	0,10	0,28		4	0,14	0,15	0,21
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,16	0,20	0,14
2	$Y \backslash X$	2	3	5	17	$Y \backslash X$	1	4	6
	1	0,06	0,18	0,24		3	0,14	0,12	0,13
	4	0,12	0,13	0,27		7	0,13	0,20	0,28
3	$Y \backslash X$	1	2	4	18	$Y \backslash X$	5	8	10
	3	0,12	0,24	0,22		2	0,11	0,13	0,26
	4	0,20	0,15	0,07		6	0,21	0,06	0,23
4	$Y \backslash X$	2	3	4	19	$Y \backslash X$	4	7	9
	1	0,16	0,10	0,28		4	0,22	0,09	0,32
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,14	0,17	0,06

Окончание таблицы 5

Номер варианта	Числовые данные				Номер варианта	Числовые данные			
	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	4		$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	8	9	12
5	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	4	20	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	8	9	12
	4	0,06	0,18	0,24		1	0,14	0,11	0,18
	6	0,14	0,20	0,12		6	0,23	0,04	0,30
6	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	4	21	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	3	6	8
	1	0,16	0,10	0,28		2	0,21	0,07	0,23
	3	0,14	0,20	0,12		8	0,11	0,20	0,18
7	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	4	22	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	3	4	7
	1	0,12	0,13	0,24		4	0,15	0,23	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		8	0,21	0,09	0,17
8	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	5	23	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	4	5	8
	2	0,06	0,18	0,24		3	0,13	0,14	0,19
	3	0,12	0,13	0,27		5	0,24	0,08	0,22
9	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	5	24	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	6	9	12
	1	0,12	0,13	0,24		5	0,23	0,07	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		9	0,17	0,20	0,18
10	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	5	25	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	5	8	10
	3	0,13	0,24	0,12		2	0,11	0,21	0,14
	6	0,18	0,06	0,27		7	0,20	0,09	0,25
11	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	3	4	26	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	4	7	9
	3	0,13	0,24	0,12		4	0,30	0,12	0,10
	5	0,18	0,06	0,27		10	0,08	0,12	0,28
12	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	3	5	6	27	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	6	9
	1	0,12	0,24	0,22		5	0,21	0,18	0,14
	3	0,20	0,15	0,17		9	0,08	0,14	0,25
13	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	4	6	8	28	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	4	7	9
	3	0,13	0,08	0,12		2	0,09	0,15	0,16
	5	0,20	0,16	0,31		7	0,17	0,23	0,20
14	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	3	4	7	29	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	1	4	8
	3	0,30	0,20	0,10		4	0,11	0,24	0,17
	6	0,05	0,12	0,23		8	0,21	0,08	0,19
15	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	4	6	8	30	$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	4	8	14
	2	0,24	0,30	0,05		3	0,12	0,13	0,20
	5	0,10	0,12	0,19		5	0,23	0,12	0,20

2.6 Эмпирическая функция распределения выборки

По данному распределению выборки (таблица 6) найти:

- 1) эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
- 2) построить полигон относительных частот;
- 3) несмещенную оценку генеральной средней, несмещенную оценку генеральной дисперсии.

Таблица 6 – Варианты задания 6

Номер варианта	Распределение					Номер варианта	Распределение				
	x_i						x_i				
1	x_i	-6	-2	3	6	16	x_i	-3	1	4	8
	n_i	12	14	16	8		n_i	2	3	1	4
2	x_i	-10	-5	-1	4	17	x_i	16	20	22	30
	n_i	25	44	16	15		n_i	14	26	17	3
3	x_i	4	8	16	24	18	x_i	26	34	46	58
	n_i	31	14	28	27		n_i	28	36	12	24
4	x_i	30	50	70	90	19	x_i	15	26	31	38
	n_i	20	18	37	25		n_i	26	18	30	26
5	x_i	4	8	12	16	20	x_i	4	8	10	14
	n_i	19	28	31	22		n_i	12	24	38	26
6	x_i	2	6	8	9	21	x_i	30	32	37	44
	n_i	20	13	12	5		n_i	21	28	31	20
7	x_i	10	14	16	22	22	x_i	0,1	0,3	0,5	0,7
	n_i	13	24	14	9		n_i	16	21	13	50
8	x_i	3	6	8	14	23	x_i	2	4	6	8
	n_i	8	14	10	18		n_i	32	24	18	24
9	x_i	0,2	0,3	0,5	0,6	24	x_i	10	16	26	40
	n_i	16	11	10	13		n_i	14	18	32	36
10	x_i	15	17	25	32	25	x_i	-3	-1	5	7
	n_i	14	16	20	50		n_i	15	11	25	19
11	x_i	-4	-1	2	8	26	x_i	6	9	11	14
	n_i	16	8	14	12		n_i	21	32	23	24
12	x_i	47	50	52	56	27	x_i	26	20	27	30
	n_i	24	16	23	17		n_i	24	22	30	24
13	x_i	-6	-2	2	5	28	x_i	21	28	32	36
	n_i	11	13	14	12		n_i	32	30	20	18
14	x_i	14	15	18	20	29	x_i	15	18	23	24
	n_i	15	12	11	12		n_i	13	5	14	8
15	x_i	31	35	39	43	30	x_i	24	28	32	38
	n_i	24	22	24	30		n_i	29	24	25	22

2.7 Интервальные оценки

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ , равной 0,95; 0,999, зная выборочную среднюю \bar{x} , объем выборки n и среднее квадратическое

отклонение σ (таблица 7). Проанализировать влияние надежности γ на доверительный интервал.

Таблица 7 – Варианты задания 7

Номер варианта	\bar{x}	n	σ
1	14,12	25	5,7
2	10,22	16	4,9
3	16,81	25	5,3
4	75,24	36	6,7
5	75,16	49	7,3
6	75,13	100	10,3
7	75,12	121	11,3
8	64,15	81	8,6
9	65,18	100	11,3
10	76,12	64	9,6
11	15,46	36	7,6
12	18,20	81	5,6
13	22,30	25	7,4
14	16,90	49	5,8
15	13,50	121	4,9
16	14,50	100	4,8
17	19,30	121	6,7
18	24,50	36	4,9
19	32,60	81	15,1
20	18,70	81	8,9
21	26,90	81	12,4
22	32,40	100	18,2
23	22,60	121	7,8
24	26,70	100	8,2
25	30,80	81	10,1
26	19,60	100	4,8
27	30,40	144	11,2
28	42,40	64	13,6
29	22,80	81	7,3
30	16,90	49	5,6

2.8 Проверка гипотез

При уровне значимости $\alpha = 0,1$, проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин X и Y на основе выборочных данных при альтернативной гипотезе $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ (таблица 8).

Таблица 8 – Варианты задания 8

Номер варианта	X		Y		Номер варианта	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i		x_i	n_i	y_i	m_i
1	142	3	140	5	16	42	15	84	3
	145	1	146	3		45	17	87	2
	146	2	147	2		46	12	92	4
	148	4	151	2		50	16	96	1
2	37	2	38	4	17	30	4	30	6
	38	1	39	3		32	5	31	4
	40	4	40	2		33	8	32	3
	41	3	41	2		34	1	34	5
	42	6	43	3		36	2	35	2
3	39	4	75	4	18	42	4	44	16
	43	2	80	2		44	8	45	12
	45	3	84	3		48	3	46	11
	47	4	91	4		50	5	51	6
	51	2	94	2		53	10	55	5
4	3,5	1	3,6	3	19	31	7	29	8
	3,7	3	3,7	5		35	3	32	9
	3,9	5	3,8	2		40	4	33	12
	4,0	4	4,4	1		42	2	35	10
	4,1	4	4,2	4		44	4	39	11
5	9	4	9	5	20	61	5	60	4
	10	5	10	6		62	4	63	3
	11	3	11	4		64	6	64	2
	12	2	13	8		67	2	68	6
	14	1	14	3		68	3	70	5
6	6,1	2	5,8	6	21	12	10	14	7
	6,5	3	6,0	4		16	12	15	6
	6,6	1	6,2	5		19	14	20	8
	7,0	4	6,3	2		21	9	21	10
	7,4	2	6,8	3		25	5	24	9
7	20	3	18	6	22	44	5	43	3
	22	4	19	3		45	2	46	3
	23	2	20	4		48	3	48	4
	24	2	22	2		52	4	50	4
	26	4	23	5		54	6	53	6

Окончание таблицы 8

Номер варианта	X		Y		Номер варианта	X		Y	
	x_i	n_i	y_i	m_i			x_i	n_i	y_i
8	0,2	6	0,4	3	23	16	12	18	3
	0,4	4	0,5	5		18	10	25	1
	0,8	2	0,9	6		21	14	29	4
	1,0	5	1,2	6		24	8	36	6
	1,2	3	1,4	6		25	6	40	6
9	31	6	85	1	24	71	4	68	10
	33	2	88	3		73	5	69	14
	34	1	95	4		75	8	70	13
	38	3	97	2		79	10	74	12
	42	2	100	5		80	3	78	11
10	15	1	20	4	25	70	12	16	7
	17	3	22	2		72	10	18	4
	20	2	23	2		73	12	21	8
	21	4	25	3		75	8	25	5
	25	6	26	1		78	8	28	6
11	27	3	28	8	26	10	10	9	5
	29	9	29	9		11	14	10	3
	32	6	30	4		13	12	12	4
	33	2	32	9		14	14	13	8
12	82	2	-10	14	27	6	1	6,5	2
	83	1	-9	18		7	8	7,4	5
	85	3	-6	12		9	7	8,2	3
	90	4	-3	6		10	2	9,1	7
13	51	6	15	7	28	10	7	9	9
	53	5	18	5		11	5	11	12
	55	4	20	4		12	4	12	14
	56	3	23	3		14	6	14	9
	59	2	27	6		16	8	15	6
14	12	2	44	4	29	12,1	1	12,2	4
	15	5	46	5		12,5	2	12,4	8
	18	3	47	8		12,7	4	12,5	3
	19	1	50	6		13,0	1	12,7	2
	23	4	52	7		13,2	2	13,0	8
15	-8	3	10	4	30	23	8	30	7
	-5	2	14	10		25	7	35	8
	-3	4	15	9		26	6	41	2
	1	5	18	7		28	9	46	3
	3	4	21	4					
4	2	25	6						

3 Решение типового варианта заданий

Задание 1

В партии из 30 деталей 5 деталей имеют дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад 7 деталей 3 детали являются дефектными?

Решение

Событие A – из взятых наугад 7 деталей 3 детали являются дефектными. Искомую вероятность вычисляем по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число благоприятствующих исходов, n – число всевозможных исходов $n = C_{30}^7$, $m = C_5^3 C_{25}^4$. Итак, $P = \frac{C_5^3 C_{25}^4}{C_{30}^7}$.

Задание 2

На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: 20 с первого завода, 25 со второго, 30 с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,7, на втором 0,8, на третьем 0,9. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

Решение

Событие A – взятое случайным образом изделие будет качественным.

Возможны следующие гипотезы B_1, B_2, B_3 .

B_1 – изделие поступило с 1-го завода;

B_2 – изделие поступило со 2-го завода;

B_3 – изделие поступило с 3-го завода.

$$D(\hat{A}_1) = \frac{20}{75} = \frac{4}{15}; \quad D(\hat{A}_2) = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}; \quad D(\hat{A}_3) = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}.$$

Найдем условные вероятности

$$P_{\hat{A}_1}(A) = 0,7; \quad P_{\hat{A}_2}(A) = 0,8; \quad P_{\hat{A}_3}(A) = 0,9.$$

Искомую вероятность находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A).$$

$$P(A) = \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10} = 0,8126.$$

Задание 3

Имеется три склада запчастей. Вероятность того, что требуемого вида запчасть отсутствует на этих складах, одинакова и равна 0,2. Составить закон распределения числа складов, на которых искомая запчасть отсутствует в данный момент. Найти числовые характеристики случайной величины X . Построить многоугольник распределения.

Решение

Случайная величина X – число складов, на которых искомая деталь отсутствует в данный момент. Она принимает следующие значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

Найдем соответствующие вероятности по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k};$$

$$P_1 = P(0) = C_3^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^3 = 0,512;$$

$$P_2 = P(1) = C_3^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^2 = 0,384;$$

$$P_3 = P(2) = C_3^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^1 = 0,096;$$

$$P_4 = P(3) = C_3^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^0 = 0,008;$$

Замечание – Данные вероятности можно находить, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

Закон распределения X :

X	0	1	2	3
P	0,512	0,384	0,096	0,008

Контроль

$$\sum_{i=0}^3 x_i = 1; \quad 0,512 + 0,384 + 0,096 + 0,008 = 1.$$

Найдем математическое ожидание $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$:

$$M(X) = 0 \cdot 0,512 + 1 \cdot 0,384 + 2 \cdot 0,096 + 3 \cdot 0,008 = 0,6.$$

Дисперсия определяется по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,512 + 1 \cdot 0,384 + 4 \cdot 0,096 + 9 \cdot 0,008 = 0,84.$$

Тогда

$$D(X) = 0,84 - 0,36 = 0,48.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,48} = 0,69.$$

Строим многоугольник распределения (рисунок 1).



Рисунок 1 – Многоугольник распределения

Задание 4

Дана функция распределения непрерывной СВХ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{и } \partial \partial x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & \text{и } \partial \partial 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{и } \partial \partial x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность попадания СВХ на отрезок $[1,5; 2]$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ї } \delta\grave{e} \ x \leq 1, \\ (x - \frac{1}{2}), & \text{ї } \delta\grave{e} \ 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{ї } \delta\grave{e} \ x > 2. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad \text{– математическое ожидание.}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2 \quad \text{– дисперсия.}$$

$$M(X) = \int_1^2 x \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{19}{12}.$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx - \left(\frac{19}{12} \right)^2 = \int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \left(\frac{19}{12} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_1^2 - \left(\frac{19}{12} \right)^2 = 0,076. \end{aligned}$$

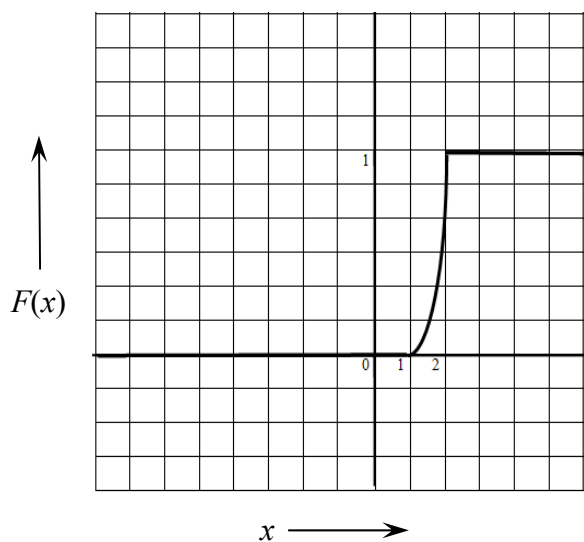
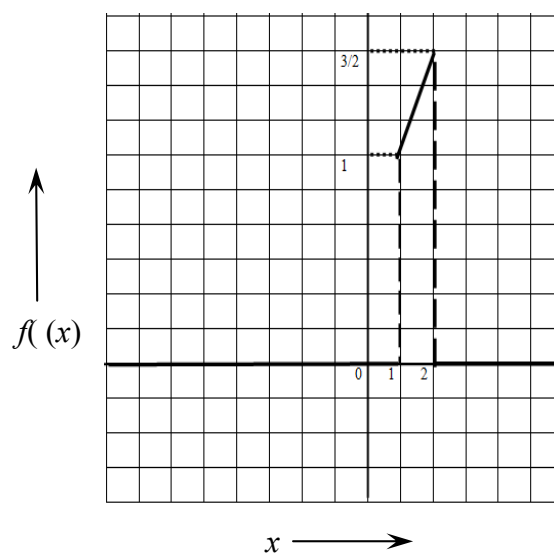
Вероятность попадания на интервал $[1,5; 2]$

$$\begin{aligned} P(\alpha < x < \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = P(1,5 < x < 2) = \\ &= \int_{1,5}^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x \right) \Big|_{1,5}^2 = 0,625. \end{aligned}$$

Строим графики функций (рисунки 2 и 3).

Задание 5

Задан закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) . Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y и написать уравнение линейной средней квадратической регрессии X на Y .

Рисунок 2 – График функции $F(x)$ Рисунок 3 – График функции $f(x)$

Решение

Y \ X	-1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Находим вероятности значений СВ Y:

$$P(Y = 1) = 0,15 + 0,30 + 0,35 = 0,8;$$

$$P(Y = 2) = 0,05 + 0,05 + 0,10 = 0,2.$$

Y	1	2
P	0,8	0,2

Находим вероятности значений СВ X:

$$P(X = -1) = 0,15 + 0,05 = 0,2;$$

$$P(X = 0) = 0,30 + 0,05 = 0,35;$$

$$P(X = 1) = 0,35 + 0,10 = 0,45.$$

Y	-1	0	1
P	0,2	0,35	0,45

$$M(Y) = 1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,2 = 0,8 + 0,4 = 1,2;$$

$$M(Y^2) = 1 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,2 = 0,8 + 0,8 = 1,6;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2;$$

$$D(Y) = 1,6 - (1,2)^2 = 1,6 - 1,44 = 0,16;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,16} = 0,4;$$

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,45 = -0,2 + 0,45 = 0,25;$$

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,45 = 0,2 + 0,45 = 0,65$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0,65 - 0,25^2 = 0,65 - 0,0625 = 0,5875;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,5875} = 0,766.$$

Определяем ковариацию по формуле

$$\mu_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y),$$

где

$$M(XY) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1 \cdot (-1) \cdot 0,15 + 1 \cdot 0 \cdot 0,30 +$$

$$+ 1 \cdot 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot (-1) \cdot 0,05 + 2 \cdot 0 \cdot 0,05 + 2 \cdot 1 \cdot 0,1 = 0,3;$$

$$\mu_{xy} = 0,3 - 0,25 \cdot 1,2 = 0.$$

Определяем коэффициент корреляции по формуле

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

В данном случае $r_{xy} = 0$, следовательно, случайные величины X и Y называются некоррелированными.

Составляем выражение линейной средней квадратической регрессии X на Y по формуле

$$x_y = m_x + r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y).$$

Подставим полученные значения:

$$x_y = 0,25 + 0 \cdot 0,766 / 0,4 (y - 1,2) \quad \text{или} \quad x_y = 0,25.$$

Задание 6

По данному распределению выборки найти:

- 1) эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
- 2) построить полигон относительных частот;
- 3) несмещенную оценку генеральной средней, несмещенную оценку генеральной дисперсии.

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

Решение

Эмпирическая функция распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x ; n – объем выборки.

$$n = 5 + 2 + 3 = 10.$$

Если $x \leq 4$, то $F^*(x) = 0$.

Если $4 < x \leq 7$, то $F^*(x) = \frac{5}{10}$.

Если $7 < x \leq 8$, то $F^*(x) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$.

Если $x > 8$, то $F^*(x) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = 1$.

Искомая функция примет вид

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{и } \delta \text{e } x \leq 4, \\ 0,5, & \text{и } \delta \text{e } 4 < x \leq 7, \\ 0,7, & \text{и } \delta \text{e } 7 < x \leq 8, \\ 1, & \text{и } \delta \text{e } x > 8. \end{cases}$$

Строим график функции $F^*(x)$ (рисунок 4).

Полигон относительных частот показан на рисунке 5.

Относительная частота $\omega_i = \frac{n_i}{n}$.

x_i	4	7	8
ω_i	0,5	0,2	0,3

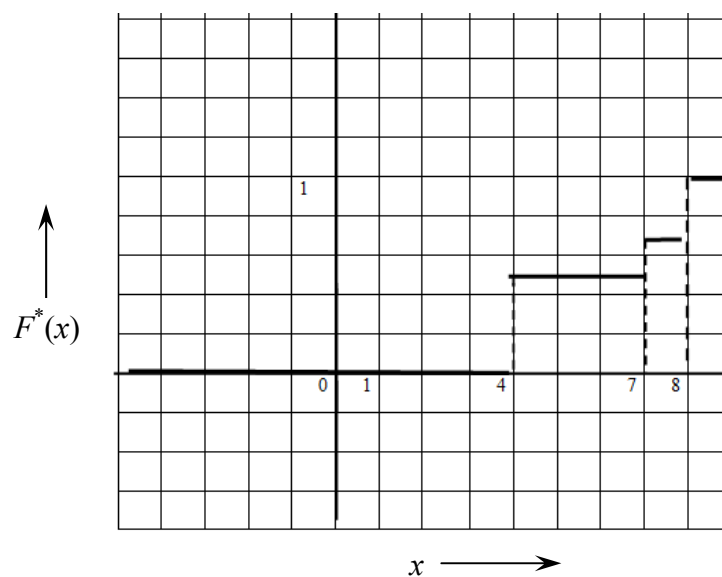
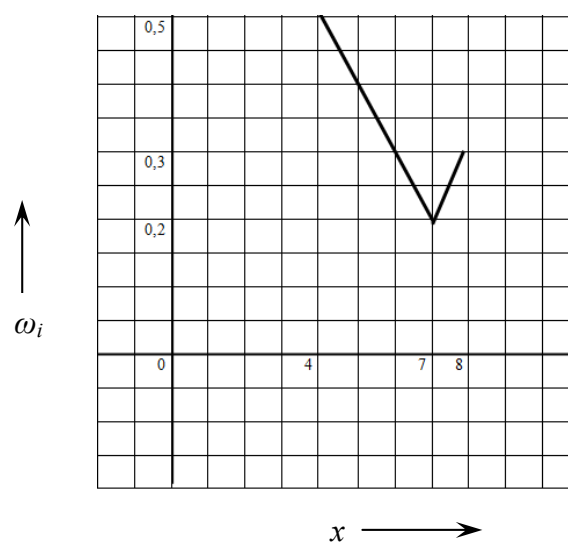
Рисунок 4 – График функции $F^*(x)$ 

Рисунок 5 – Полигон относительных частот

Несмещенная оценка генеральной средней:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n},$$

где x_i – варианты выборки;
 n_i – частота варианты;

n – объем выборки, $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

$$\bar{x}_A = \frac{1}{10}(4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3) = \frac{1}{10} \cdot 58 = 5,8.$$

Несмещенная оценка генеральной дисперсии

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{n}{n-1} D_b = \frac{\sum n_i (\delta_i - \bar{\delta}_A)^2}{n-1} = \frac{1}{9} (5 \cdot (4 - 5,8)^2 + 2 \cdot (7 - 5,8)^2 + 3 \cdot (8 - 5,8)^2) = \\ &= \frac{1}{9} (5 \cdot (-1,8)^2 + 2 \cdot (1,2)^2 + 3 \cdot (2,2)^2) = \frac{1}{9} (5 \cdot 3,24 + 2 \cdot 1,44 + 3 \cdot 4,84) = \\ &= \frac{1}{9} (16,2 + 2,88 + 3 \cdot 14,52) = \frac{33,6}{9} = \frac{11,2}{3} = 3,73. \end{aligned}$$

Задание 7

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x} = 10,43$, объем выборки $n = 100$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$.

Решение

Воспользуемся формулой $\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Находим t из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$, $2\Phi(t) = 0,95$, $\Phi(t) = 0,475$. По таблице значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ (приложение А) находим

$t = 1,96$.

Подставим данные, получаем

$$10,43 - 1,96 \cdot \frac{5}{10} < a < 10,43 + 1,96 \cdot \frac{5}{10}.$$

Окончательно $9,45 < a < 11,41$.

Задание 8

При уровне значимости $\alpha = 0,1$, проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин X и Y на основе выборочных данных при альтернативной гипотезе $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

X		Y	
x_i	n_i	y_i	m_i
5	2	5	1
6	4	6	8
7	4	7	7
		8	1

Вычисляем исправленные выборочные дисперсии S_x^2, S_y^2 по следующим формулам:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} (5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4) = 6,2;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i = \frac{1}{17} (5 \cdot 1 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 1) = 6,5;$$

$$S_x^2 = \left(\frac{25 \cdot 2 + 36 \cdot 4 + 49 \cdot 4}{10} - 6,2^2 \right) \cdot \frac{10}{9} = 0,62;$$

$$S_y^2 = \left(\frac{25 \cdot 1 + 36 \cdot 8 + 49 \cdot 7 + 64 \cdot 1}{17} - 6,5^2 \right) \cdot \frac{17}{16} = 0,11.$$

Учитывая, что $S_x^2 = S_y^2$, определим

$$f_{i \text{ ä ä.}} = \frac{S_x^2}{S_y^2}; \quad f_{i \text{ ä ä.}} = \frac{0,62}{0,11} = 5,64.$$

Критическое значение $f_{кр}$ находим из условия $P(F(k_1 = 10 - 1, k_2 = 17 - 1) > f_{кр}) = \alpha/2 = 0,05$. По приложению Б определяем $f_{кр} = 2,54$. Так как $f_{табл.} > f_{кр}$, то гипотеза о равенстве двух дисперсий отвергается.

Список литературы

1 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2000. – 400 с.

2 **Булдык, Г. М.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Г. М. Булдык. – Минск : Высш. шк., 1989. – 285 с.

3 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – Минск : Высш. шк. 2000. – 479 с.

4 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.

5 Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Под ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА-М, 2004. – 288 с.

Приложение А (рекомендуемое)

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0763	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499963
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение Б (рекомендуемое)

Критические точки распределения F Фишера-Снедекора

Уровень значимости $\alpha = 0,01$												
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	40,52	49,99	54,03	56,25	57,64	58,89	59,28	59,81	60,22	60,56	60,82	61,06
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
Уровень значимости $\alpha = 0,05$												
$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	16,1	20,0	21,6	22,5	23,0	23,4	23,7	23,9	24,1	24,2	24,3	24,4
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,83	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38