ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ). ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

Часть 1

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Могилев 2018

УДК 517
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» мая 2018 г., протокол № 9

Составители: Л. И. Сотская; Л. В. Варфоломеева;
С. А. Скрыган; Г. В. Федяченко

Рецензент И. Д. Камчицкая

Даны задания для практических занятий по дисциплине «Теория вероятностей», а также приведены образцы решения примеров, перечень необходимой литературы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ). ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Часть 1

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

© ГУ ВПО «Белорусско-Российский
университет», 2018

Содержание

1 Элементы комбинаторики. Алгебра событий

1.1 Теоретическая часть

Результат выбора m элементов из группы, содержащей n элементов, называют выборкой m элементов из n.

Если при этом элемент после выбора снова возвращается в группу, то выборку называют выборкой с возвращением. Если выбранный элемент не участвует в дальнейшем выборе, то выборку называют выборкой без возвращения.

Выборку, в которой не учитывают порядок выбора элементов, называют сочетанием, а выборку, в которой учитывают порядок выбора элементов, − размещением.

Если рассматривают выборку с возвращением, то сочетание (размещение) называют сочетанием (размещением) с повторениями, а если рассматривают выборку без возвращения, то сочетание (размещение) называют сочетанием (размещением) без повторений, или просто сочетанием (размещением).

Число A_n^m размещений (без повторений) из n элементов по m определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, число способов выбрать председателя и секретаря собрания, на котором присутствуют 20 человек, равно $A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 380.$

Частный случай размещений: из n элементов по n. Такие размещения называют перестановками.

Число перестановок из n элементов определяется формулой

$$P_n = A_n^n = n!$$

Число C_n^m сочетаний (без повторений) из n элементов по m (порядок, в котором выбирались элементы, роли не играет) определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Например, число способов выбрать двух дежурных из группы в 20 человек равно

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = 190.$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

По определению $0! = 1$.

Правила комбинаторики.

Правило суммы. Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B может быть выбран k способами, то выбор элемента A или B можно осуществить $m+k$ способами.

Правило произведения. Если элемент A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора элемент B можно выбрать k способами, то упорядоченную пару элементов (A,B) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Элементарным исходом (или элементарным событием) называют любой простейший (т. е. неделимый в рамках опыта) исход опыта.

Множество всех элементарных исходов называют пространством элементарных исходов и обозначают Ω.

Произвольное подмножество пространства элементарных исходов называют событием и обозначают большими буквами латинского алфавита, снабжая их при необходимости индексами, например: A, B_1, C_3.

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого подмножества (события), называют элементарными исходами, благоприятствующими данному событию.

Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т. е. событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называют достоверным и обозначают Ω.

Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т. е. событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называют невозможным и обозначают символом $\varnothing$.

Несколько событий образуют полную группу, если в результате опыта появится хотя бы одно из них.

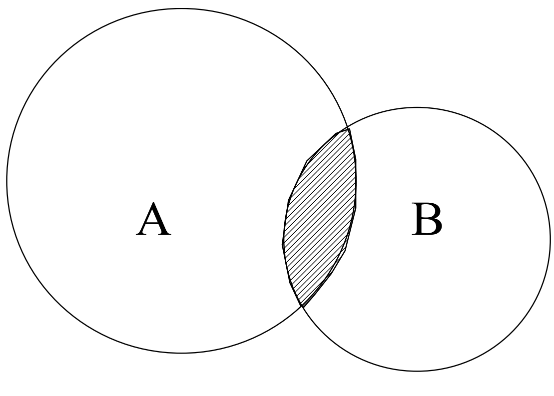

Рисунок 1

Пересечением (***произведением***) ***двух событий*** A и B называют событие $A \cap B$ (или $A \cdot B$), происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B (рисунок 1).

События A и B называют несовместными, если их одновременное появление невозможно, т. е. если $A \cap B = \varnothing$. В противном случае события называют совместными.

Объединением (***суммой***) ***двух событий*** A и B называют событие $A \cup B$ (или $A+B$), состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B (рисунок 2).

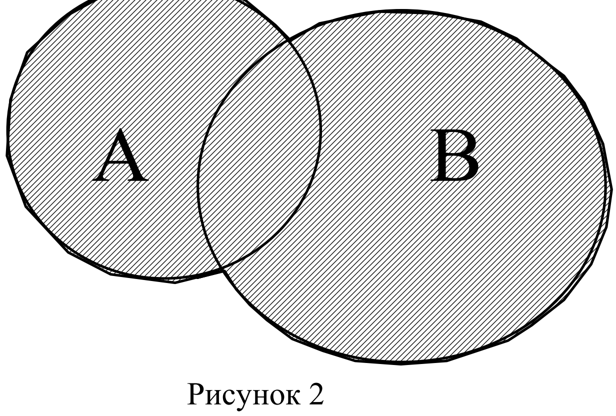

Рисунок 2

Аналогично определяют понятия произведения и суммы событий для конечного числа событий и для бесконечных последовательностей событий.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют попарно несовместными, если $A_i A_j = \varnothing$, $i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j$, и несовместными в совокупности, если $A_1 A_2 \ldots A_n = \varnothing$.

Разностью двух событий A и B называют событие $A - B$ (или $A \setminus B$), происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B (рисунок 3).

Событием, противоположным событию A (дополнением события A), называют событие $\overline{A}$, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A, т. е. $\overline{A} = \Omega \setminus A$ (рисунок 4).

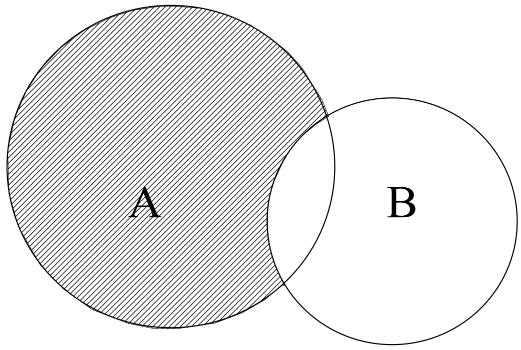

Рисунок 3

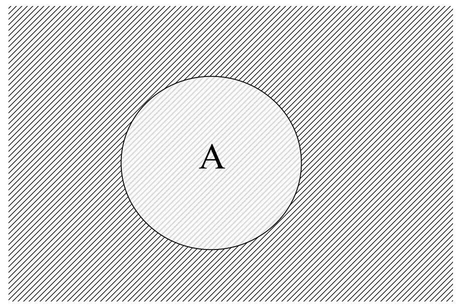

Рисунок 4

Событие A включено в событие B, что записывают $A \subset B$, если появление события A обязательно влечет за собой наступление события B.

Основные свойства операций над событиями:
1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cdot B = B \cdot A$;
2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
3) $(A \cup B) \cdot C = A \cdot C \cup B \cdot C$;
4) $AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$;
5) $\overline{\overline{A}} = A$;
6) $A \cup A = AA = A$;
7) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.2 Образцы решения примеров

1 В группе 25 студентов. Надо выбрать старосту, заместителя старосты, профорга и физорга. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый студент может занимать лишь один пост?

Решение

В данном случае надо найти число размещений из 25 по 4:

$$A_{25}^4 = \frac{25!}{21!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600\,.$$

2 Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в число только один раз?

Решение

В этом случае надо найти перестановки из трех элементов:

$$P_3 = 3! = 6\,.$$

3 Сколькими способами можно выбрать две стандартные детали и одну нестандартную из ящика, содержащего 10 деталей, среди которых семь стандартных?

Решение

Две стандартные детали выбираем из семи стандартных, одну нестандартную выбираем из трех нестандартных. В данном случае искомое число способов выбора равно $C_7^2 \cdot C_3^1 = \frac{7!}{2!5!} \cdot 3 = 54$.

4 Опыт состоит в однократном бросании игральной кости. Описать пространство элементарных исходов и указать состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

A – число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, кратно трем;

B – на верхней грани игральной кости выпало нечетное число очков;

C – число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, больше трех;

D – число очков, выпавших на верхней грани игральной кости,

меньше семи;

E – число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, не является целым числом;

F – число очков, выпавших на верхней грани игральной кости, заключено в пределах от 0,5 до 1,5.

Установить пары совместных событий.

Описать события $\overline{B}$, $\overline{C}$, AB, $A \cup B$, $A \setminus B$, $E \cup D$, EF.

Решение

Пространство элементарных исходов в данном опыте имеет вид:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

События: $A = \{\omega_3, \omega_6\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega$, $E = \varnothing$, $F = \{\omega_1\}$.

Пары совместных событий: A и B; A и C; A и D; B и C; B и D; B и F; C и D; D и F.

Опишем события:

$\overline{B}=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ – выпадение четного числа очков;

$\overline{C}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ – выпало не более трех очков;

$AB=\{\omega_3\}$ – выпавшее число очков нечетно и кратно трем;

$A\cup B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6\}$ – выпавшее число очков или нечетно, или кратно трем;

$A\setminus B=\{\omega_6\}$ – выпавшее число очков четно и кратно трем;

$E\cup D=\varnothing\cup D=D=\Omega$;

$EF=\varnothing$.

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?

2 В чемпионате страны по футболу принимают участие 15 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали? *Ответ*: 2730.

3 Даны три цифры 3, 4, 5. Сколько трехзначных чисел можно составить из этих цифр? Сколько двухзначных чисел можно составить из этих цифр? Сколько двухзначных чисел можно составить из этих цифр, отличающихся хотя бы одной цифрой?

4 Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было выполнять переводы с любого из 15 языков бывших союзных республик? *Ответ*: 210.

5Сколько диагоналей можно провести в восьмиугольнике, в двенадцатиугольнике, в n-угольнике?

6 Сколькими способами можно сшить флаг из трех различных по цвету горизонтальных полос, если имеется материал пяти цветов?

7 Сколько различных паролей, содержащих две различные цифры и две различные буквы, можно составить из 5 букв и 10 цифр? *Ответ:* 1800.

8 В партии из 12 деталей девять стандартных. Сколькими способами из этой партии можно выбрать 6 деталей, среди которых будет четыре стандартных? *Ответ*: 378.

9 Решить уравнение $C_n^5=2\cdot C_{n-1}^5$. *Ответ*: 10.

10 Выпускники группы обменялись фотографиями. Сколько было выпускников, если фотографий потребовалось 240? *Ответ*: 16.

11 Студенты группы обменялись рукопожатиями. Сколько было студентов, если рукопожатий оказалось 78? *Ответ*: 13.

12 На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколько различных четырехзначных чисел можно из них составить? *Ответ*: 4536.

13 На пикник собрались 20 студентов. В их распоряжении три автобуса. В первом было три свободных места, во втором пять и в третьем 12 свобод-

ных мест. Сколькими способами студенты могут разместиться в автобусах? *Ответ*: 7054320.

14 Сколько разных «слов» можно образовать из всех букв слова Могилев? Сколько среди них таких, в которых буквы «и» и «г» стоят рядом? А сколько среди них таких, в которых буквы «и» и «г» не стоят рядом? *Ответ*: 5040, 1440, 3600.

15 Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если в обозначение каждого числа каждая из данных цифр входит не более одного раза? *Ответ*: 260.

16 В спортивную школу производится набор: четыре человека в секцию художественной гимнастики (девочки), шесть человек в секцию бокса (мальчики) и три человека в секцию лёгкой атлетики (независимо от пола). Сколькими способами можно осуществить приём, если претендуют на зачисление шесть девочек и восемь мальчиков? *Ответ*: 1680.

17 Из 10 спортсменов формируется команда из пяти человек, причем два определенных спортсмена должны войти в команду. Сколькими способами можно сформировать команду? *Ответ*: 56.

18 Два игрока играют в шахматы. Событие A выиграл первый игрок, событие B выиграл второй игрок. Что означают события $\overline{A}\cdot\overline{B}$, $\overline{B}\setminus A$, $\overline{A}\setminus B$?

19 Случайным образом выбирают одну из 28 костей домино. Описать пространство элементарных исходов. Перечислить все исходы, соответствующие событиям:

$A-$ на выбранной кости очки совпадают;

$B-$ сумма очков на выбранной кости равна 6;

$C-$ произведение числа очков на кости нечетно;

$B\setminus A$; AB; AC; $AB\setminus C$; $(A\cup B)C$.

20 По мишени производят три выстрела. Пусть событие A_i – попадание при i-м выстреле, $i=1,2,3$. Представить в виде объединения и пересечения событий A_i или $\overline{A_i}$ следующие события:

$A-$ три попадания в мишень;

$B-$ три промаха;

$C-$ хотя бы одно попадание;

$D-$ хотя бы один промах;

$E-$ не менее двух попаданий;

$F-$ не больше одного попадания;

$G-$ попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

21 Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие A_i $-i$-й студент решил задачу, $i=1,2,3$.

Выразить через события A_i или $\overline{A_i}$ следующие события:

$A-$ с задачей не справился ни один студент;

$B-$ все студенты решили задачу;

$C-$ задачу решил хотя бы один студент;

$D-$ задачу решил только первый студент;

$E-$ задачу решил один студент;

F – задачу решило не более двух студентов;

G – задачу решило не менее двух студентов.

22 Из таблицы случайных чисел наугад выбраны два числа. События: A – выбрано хотя бы одно простое число, B – выбрано хотя бы одно четное число. Что означают события AB и $A+B$?

23 Из 10 спортсменов формируется команда из пяти человек, причём два определённых спортсмена должны войти в команду. Сколькими способами можно сформировать команду? *Ответ:* 56 способами.

24 Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k $(k=\overline{1,10})$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k, если $r_k < r_{k+1}$. Что означают события $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$, $C = \prod_{i=5}^{10} A_i$?

25 Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме (рисунок 5).

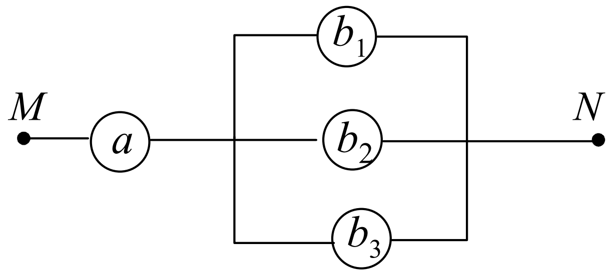

Рисунок 5

Рассмотрим события:

A – выход из строя элемента a;

B_i – выход из строя элемента b_i $(i=\overline{1,3})$;

C – разрыв цепи.

Записать выражения для событий C и $\overline{C}$ через события A, B_i.

26 Сколько существует перестановок элементов $1, 2, 3, \ldots, n$, в которых элементы 1 и 2 находятся не на своих местах?

2 Классическое и геометрическое определения вероятности

2.1 Теоретическая часть

Классическое определение вероятности. Если опыту соответствует множество элементарных исходов Ω, представляющее собой конечное множество равновозможных исходов, то такой опыт называют классической схемой.

В рамках классической схемы вероятность события определяют по формуле классической вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число всех благоприятствующих событию A исходов;
n – число всех исходов опыта.

Подсчет чисел m, n производится обычно комбинаторными методами.

Свойства вероятности

1 Вероятность случайного события A в пределах от 0 до 1 включительно

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2 Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing)=0.$$

3 Вероятность достоверного события равна 1:

$$P(\Omega)=1.$$

4 Если события A и B несовместны $(AB=\varnothing)$, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

5 Вероятность противоположного события

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

6 Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

Геометрическая вероятность. Геометрическое определение обобщает классическое на случай бесконечного множества элементарных исходов Ω тогда, когда Ω представляет собой подмножество пространства R (числовой прямой), R^2 (плоскости), R^3 (пространства).

Под мерой $\mu(A)$ подмножества A понимают его длину, площадь или объем в зависимости от того, какому пространству принадлежит Ω.

Вероятностью события A называют число $P(A)$, равное отношению меры множества A к мере множества Ω:

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Данное определение называют геометрическим определением вероятности.

2.2 Образцы решения примеров

1 В партии из 10 деталей семь стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад шести деталей четыре стандартных.

Решение

Рассмотрим событие $A-$ среди взятых наугад шести деталей четыре стандартных.

Вероятность этого события найдем по классическому определению вероятности:

$$P\left(A\right)=\frac{m}{n},$$

где $m-$ число всех благоприятствующих событию A исходов;

$n-$ число всех исходов опыта.

В данном случае число всех исходов опыта

$$n=C_{10}^{6}=\frac{10!}{6!4!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}=210,$$

а число благоприятных исходов

$$m=C_7^4C_3^2=\frac{7!}{4!3!}\frac{3!}{2!}=105.$$

Итак, искомая вероятность

$$P\left(A\right)=\frac{C_7^4C_3^2}{C_{10}^6}=\frac{105}{210}=0{,}5.$$

2 На сигнализатор поступают сигналы от двух устройств. Причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t $(t<T)$. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Решение

Обозначим: $x-$ моменты поступления сигнала от первого устройства, $y-$ моменты поступления сигнала от второго устройства.

По условию $0\le x\le T$; $0\le y\le T$.

В прямоугольной системе координат $x0y$ этим неравенствам удовлетворяют точки квадрата $OABC$ (рисунок 6).

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, т. е.

при $y > x \qquad y - x < t \qquad \Rightarrow\ y < x + t$;

при $y < x \qquad x - y < t \qquad \Rightarrow\ y > x - t$.

Этим условиям удовлетворяют координаты точек заштрихованной фигуры.

Геометрическая вероятность

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{S_G - 2 \cdot S_{\Delta KAD}}{S_G} = \frac{T^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(T-t)^2}{T^2} =$$

$$= \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = \frac{2Tt - t^2}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2}.$$

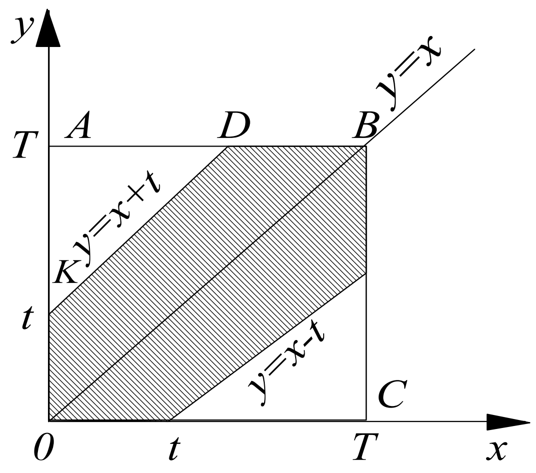

Рисунок 6

2.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Куб с окрашенными гранями распилен на 27 одинаковых кубиков. Найти вероятность того, что у наудачу выбранного кубика будет окрашена одна грань (две грани, три грани). *Ответ*: $0,(2)$; $0,(4)$; $0,(296)$.

2 Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь то, что они различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

3 Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер наудачу извлеченного жетона не содержит цифру 5.

4 Брошены два игральных кубика. Найти вероятность того, что:

а) в сумме выпадет не менее 9 очков;

б) произведение числа очков не превосходит 9;

в) произведение числа очков делится на 4.

Ответ: а) $0,2(7)$; б) $0,47(2)$; в) $0,3(8)$.

5 Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на эти вопросы. *Ответ*: $\frac{57}{115}$.

6 Колоду из 52 карт случайным образом делят пополам. Найти вероятность того, что в каждой половине будет по два туза.

7 Некто купил карточку «Спортлото 6 из 49» и отметил в ней шесть из имеющихся 49 номеров. В тираже разыгрываются шесть «выигрышных» номеров. Найти вероятности следующих событий:

A_3 – угадано три номера;

A_4 – угадано четыре номера;

A_6 – угадано шесть номеров.

Ответ: 0,018; 0,00097; $7,2 \cdot 10^{-8}$.

8 На стеллаже в библиотеке стоят 15 учебников, причем пять из них по теории вероятностей. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников по теории вероятностей. *Ответ*: $\frac{67}{91}$.

9 В партии из 50 изделий четыре нестандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных наугад 10 изделий есть одно нестандартное; хотя бы одно нестандартное; все нестандартные.

10 Из урны, содержащей 10 перенумерованных шаров, наугад выбирают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что все номера вынутых шаров будут идти по порядку.

11 Метровую ленту разрезают случайным образом. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см. *Ответ*: 0,4.

12 В квадрат с вершинами $(0;0),(0;1),(1;1),(1;0)$ наудачу брошена точка $(x;y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y<2x$. *Ответ*: 0,75.

13 В треугольник со сторонами 9, 13, 16 вписан круг. В треугольник наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она попадет в круг. *Ответ*: $\frac{30\pi}{19\sqrt{95}} \approx 0,51$.

14 В круге радиусом 10 находится прямоугольный треугольник с катетами 7 и 12. В круг наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она не попадет в треугольник. *Ответ*: 0,87.

15 В куб с ребром a вписан шар. Внутри куба случайным образом ставится точка. Какова вероятность того, что она попадет в шар? *Ответ*: $\frac{\pi}{6}$.

16 Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых три бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:

$A -$ в выборке ровно одно изделие бракованное;

$B -$ в выборке нет ни одного бракованного изделия;

$C -$ в выборке хотя бы одно бракованное изделие.

Ответ: $P(A)=\frac{21}{40}; P(B)=\frac{7}{24}; P(C)=\frac{17}{24}$.

17 Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не более 1, не превосходит единицу, а их произведение не больше $\frac{2}{9}$. *Ответ*: $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2$.

18 Два студента договорились встретиться в кафе между 14.00 и 14.30 ч. Пришедший первым ждет второго в течение 5 мин. Найти вероятность встречи, если время прихода каждого независимо и равновозможно в течение

указанного времени. *Ответ*: $\frac{11}{36}$.

19 Загадывают два числа x и y в промежутке от 0 до 5. Какова вероятность того, что $xy > 2$? *Ответ*: $\approx 0,72$.

20 На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a наудачу бросают монету радиуса r, $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятность того, что монета попадет целиком внутрь одного квадрата. *Ответ*: $\left(1 - \frac{2r}{a}\right)^2$.

3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

3.1 Теоретическая часть

Теорема сложения вероятностей. Вероятность объединения двух событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P\left(AB\right).$$

В случае несовместных событий эта формула упрощается:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность объединения трех событий

$$P\left(A \cup B \cup C\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(AB\right) - P\left(BC\right) - P\left(AC\right) + P\left(ABC\right).$$

Условной вероятностью события A при условии события B называют вероятность события A в предположении, что уже произошло событие B и обозначают $P_B\left(A\right)$ или $P\left(A / B\right)$.

Два события называются зависимыми, если одно из них влияет на вероятность появления другого. В противном случае события называются независимыми.

Если события A и B независимы, то условные и безусловные вероятности равны:

$$P_A(B) = P(B) \text{ или } P_B\left(A\right) = P\left(A\right).$$

Теорема умножения вероятностей. Если $A = A_1 A_2 \ldots A_n$ и $P\left(A\right) > 0$, то справедливо равенство

$$P\left(A\right) = P\left(A_1\right) \cdot P_{A_1}\left(A_2\right) \cdot P_{A_1 A_2}\left(A_3\right) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}\left(A_n\right),$$

называемое формулой умножения вероятностей.

Из свойства коммутативности пересечения событий следует, что правая часть формулы умножения для пересечения одних и тех же событий может быть записана по-разному. Например, как $P\left(A_1A_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(A_2\right)$, так и в виде $P\left(A_1A_2\right)=P\left(A_2\right)\cdot P_{A_2}\left(A_1\right)$. Выбирают тот вариант, который приводит к более простым вычислениям.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Если события A и B независимые, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Выполнение этого равенства считают эквивалентным определением независимости двух событий.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют независимыми в совокупности, если вероятность пересечения любых двух различных событий равна произведению вероятностей этих событий; вероятность пересечения любых трех событий равна произведению их вероятностей; …; вероятность пересечения всех событий равна произведению их вероятностей.

Если только любые два события из данной совокупности являются независимыми, то события этой совокупности попарно независимы.

Из теоремы умножения вероятностей следует формула для вычисления условной вероятности:

$$P_B\left(A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)};\quad P\left(B\right)\neq 0.$$

Применяя теорему сложения вероятностей, устанавливаем совместность (несовместность) слагаемых. Если используем теорему умножения вероятностей, то проверяем, зависимы или независимы множители.

3.2 Образцы решения примеров

1 Из урны, в которой семь белых и три черных шара, наугад без возвращения извлекают два шара.

Рассмотрим события: A_1 – первый извлеченный шар белый, A_2 – второй извлеченный шар белый. Найти $P_{A_1}\left(A_2\right)$ двумя способами.

Решение

Способ 1. В соответствии с определением условной вероятности имеем

$$P_{A_1}\left(A_2\right)=\frac{P\left(A_1A_2\right)}{P\left(A_1\right)}=\frac{C_7^2/C_{10}^2}{C_7^1/C_{10}^1}=\frac{2}{3}.$$

Способ 2. Так как событие A_1 произошло, то в новом пространстве элементарных исходов всего равновозможных исходов $7+3-1=9$, а событию A_2 благоприятствует при этом $7-1=6$ исходов. Следовательно,

$$P_{A_1}\left(A_2\right)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

2 Каждая буква слова МАТЕМАТИКА написана на отдельной карточке. Карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекают четыре карточки. Найти вероятность того, что получится слово ТЕМА.

Решение

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 – события, состоящие в последовательном извлечении букв Т, Е, М, А.

Эти события зависимые. Согласно формуле умножения вероятностей, получаем

$$P\left(A\right)=P\left(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\right)=$$

$$=P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(A_2\right)\cdot P_{A_1A_2}\left(A_3\right)\cdot P_{A_1A_2A_3}\left(A_4\right)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{420}.$$

3 Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна $0,7$, из второго $-0,8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним орудием.

Решение

Способ 1. Рассмотрим события:

A_1 – попадание в цель из первого орудия;

A_2 – попадание в цель из второго орудия;

A – хотя бы одно попадание.

$A=A_1\cup A_2$, события A_1 и A_2 совместные и независимые.

Тогда искомая вероятность

$$P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=0,7+0,8-0,7\cdot 0,8=0,94.$$

Способ 2. Рассмотрим событие $\overline{A}$ – при залпе ни одно орудие не попало в цель. Тогда

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\right).$$

События $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ независимые.

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)=1-0,3\cdot 0,2=0,94\,.$$

4 Вероятность попасть в цель при одном выстреле равна 0,6. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы попасть в цель хотя бы один раз с вероятностью не менее 0,9973?

Решение

Рассмотрим события:

$A-$ попадание хотя бы один раз при n выстрелах;

$A_i -$ попадание при i-м выстреле, $i=\overline{1,n}$.

По условию $P\left(A_i\right)=0,6$. Тогда вероятность промаха при i-м выстреле

$$P\left(\overline{A_i}\right)=1-P\left(A_i\right)=1-0,6=0,4\,.$$

События $\overline{A_i}$ независимые.

Вероятность события A найдем через противоположное событие:

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}\right)=1-0,4^n\,.$$

По условию

$$1-(0,4)^n\geq 0,9973\,;$$

$$(0,4)^n\leq 0,0027\,.$$

Логарифмируем обе части неравенства

$$n\cdot\ln 0,4\leq\ln 0,0027\,.$$

Так как $\ln 0,4<0$, то

$$n\geq\frac{\ln 0,0027}{\ln 0,4}\approx 6,5\,.$$

Чтобы попасть в цель хотя бы один раз с вероятностью не менее 0,9973, нужно произвести не менее семи выстрелов.

3.3 Примеры для самостоятельной работы

1 В урне два белых шара и один черный. Два человека вынимают последовательно из урны по одному шару. Рассмотрим события: $B_1 -$ появление белого шара у первого человека, $B_2 -$ появление белого шара у второго

человека. Вычислить $P(B_1), P_{B_1}(B_2), P_{\overline{B_1}}(B_2)$.

2 Одновременно бросают два игральных кубика (белый и черный).

Рассмотрим следующие события:

$A-$ на белом кубике выпало более двух очков;

$B-$ в сумме выпало четное число очков;

$C-$ в сумме выпало менее десяти очков.

Вычислить по определению условные вероятности $P_B(A)$, $P_A(B)$, $P_A(C)$, $P_C(A)$, $P_B(C)$, $P_C(B)$ и определить, какие из событий A, B, C являются попарно независимыми. Являются ли эти события независимыми в совокупности?

3 Обнаружение воздушной цели проводится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность обнаружения цели первой станцией равна 0,7, второй станцией – 0,8. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией.

4 Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка 0,6, для второго 0,7, для третьего 0,8. Найти вероятность:

а) одного попадания в цель;

б) хотя бы одного попадания в цель.

Ответ: а) 0,188; б) 0,976.

5 Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за время t первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать только один элемент; только два элемента; хотя бы один элемент; не более двух элементов; не менее двух элементов; все три элемента. *Ответ*: 0,188; 0,452; 0,976; 0,664; 0,778; 0,336 .

6 Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме (рисунок 7).

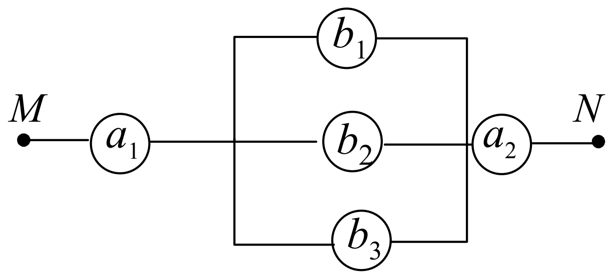

Рисунок 7

Выход из строя за время T различных элементов цепи – независимые события, имеющие следующие вероятности: $P(a_1)=0,6, P(a_2)=0,5, P(b_1)=0,4,$ $P(b_2)=0,7, P(b_3)=0,9$. Определить вероятность разрыва цепи. *Ответ*: 0,85 .

7 (Устно) В урне 20 белых и шесть черных шаров. Из нее наугад вынимают два шара подряд. Найти вероятность того, что оба шара черные.

8 (Устно) Наудачу подбрасывают три монеты. Найти вероятность того, что выпадут ровно два «герба».

9 (Устно) Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что хотя

бы на одной из них выпадет пять очков.

10 Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится:

а) не более чем в трех ящиках;

б) не менее чем в двух ящиках;

в) хотя бы в одном ящике.

Ответ: а) 0,6976; б) 0,9572; в) 0,9976.

11 При приемке партии изделий подвергается проверке половина изделий. Условиями приема допускается бракованных не более 2 %. Найти вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5 % брака, будет принята.

12 Пусть грани тетраэдра окрашены: первая в красный цвет (A), вторая в зеленый (B), третья в синий (C), четвертая во все эти три цвета (ABC). Тетраэдр при бросании падает на грань. Являются ли попарно независимыми и независимыми в совокупности события A, B и C?

13 В шкаф поставили 9 новых однотипных приборов. Для проведения опыта берут наугад три прибора, после работы их возвращают в шкаф. На вид прибор, бывший в употреблении, не отличается от нового. Найти вероятность того, что после проведения трех опытов в шкафу не останется новых приборов. *Ответ*: $\approx 0{,}0028$.

14 Сколько нужно параллельно соединить элементов, вероятность безотказной работы каждого из которых за время t равна 0,9, чтобы вероятность безотказной работы всей системы за время t была не менее 0,999? *Ответ*: не менее трех.

4 Формула полной вероятности и формула Байеса

4.1 Теоретическая часть

Следствием теорем сложения и умножения вероятностей является формула полной вероятности.

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$, удовлетворяющие условиям $H_i H_j = \varnothing, \quad i \neq j$ и $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$, называют гипотезами.

Пусть для некоторого события A и гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ известны ненулевые вероятности $P(H_i), i = \overline{1,n}$ гипотез и условные вероятности $P_{H_i}(A),\ i = \overline{1,n}$ события A. Тогда безусловную вероятность события A определяют по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A).$$

Пусть для некоторого события A с ненулевой вероятностью и гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ известны ненулевые вероятности $P(H_i), i=\overline{1,n}$, которые называют априорными (полученными «до опыта»). Произведен опыт, в результате которого произошло некоторое событие A. Требуется пересчитать вероятности гипотез в связи с появлением этого события, т. е. вычислить условную вероятность $P_A(H_i)$ для каждой гипотезы. Такие условные вероятности называют апостериорными (полученными «после опыта») и определяют по формуле Байеса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

4.2 Образцы решения примеров

1 Красная Шапочка вышла из дома и не может вспомнить, какая тропинка ведет к бабушке. Она выбирает наугад одну из тропинок (рисунок 8). Какова вероятность того, что девочка придет к бабушке?

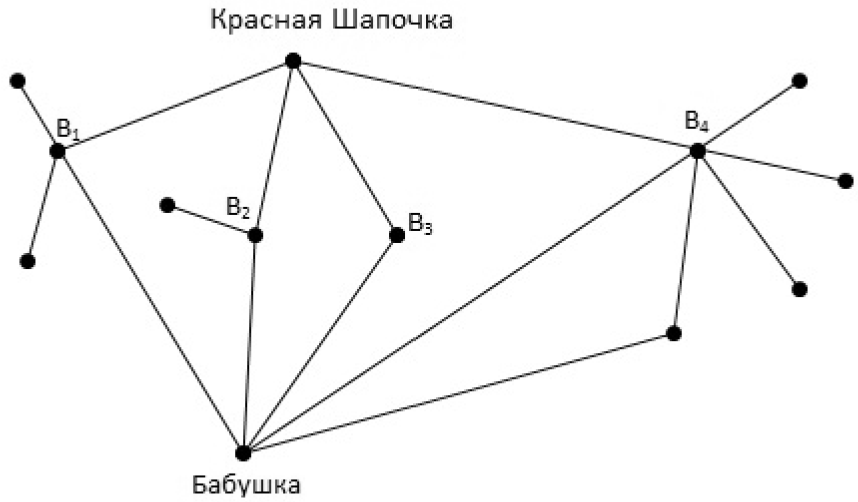

Рисунок 8

Решение

Гипотезы: H_i – выбор тропинки B_i, $i=1,2,3,4$. Тогда $P(H_1)=P(H_2)=$ $=P(H_3)=P(H_4)=\dfrac{1}{4}$, т. к. девочка выбирает тропинку наугад. Пусть событие A – Красная Шапочка у бабушки. Тогда условные вероятности этого события:

$$P_{H_1}(A)=\frac{1}{3};\quad P_{H_2}(A)=\frac{1}{2};\quad P_{H_3}(A)=1;\quad P_{H_4}(A)=\frac{2}{5}.$$

По формуле полной вероятности $P\left(A\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+\frac{2}{5}\right)=\frac{67}{120}$.

2 В группе студентов 12 юношей и восемь девушек. Экзамен по математике сдает, как правило, 70 % юношей и 80 % девушек. Найти вероятность того, что первый человек, вышедший из аудитории, сдал экзамен по математике.

Решение

Рассмотрим событие $A-$ первый человек, вышедший из аудитории, сдал экзамен по математике.

Гипотезы:

H_1- первым из аудитории вышел юноша,

H_2- первой из аудитории вышла девушка.

Найдем вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{12}{12+8}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5},\quad P(H_2)=\frac{8}{12+8}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

Условные вероятности события A: $P_{H_1}(A)=0,7$; $P_{H_2}(A)=0,8$.

По формуле полной вероятности искомая вероятность

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{3}{5}\cdot 0,7+\frac{2}{5}\cdot 0,8=0,74.$$

3 В условиях примера 2 стало известно, что человек, вышедший из аудитории первым, сдал экзамен. Что вероятнее, это юноша или девушка?

Решение

В связи с наступлением события $A-$ первый человек, вышедший из аудитории, сдал экзамен по математике, пересчитаем вероятности гипотез.

По формуле Байеса, находим вероятность того, что это юноша:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0,7}{0,74}=\frac{42}{74}.$$

Находим вероятность того, что это девушка:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot 0,8}{0,74}=\frac{32}{74}.$$

Так как $P_A(H_1)>P_A\left(H_2\right)$, то вероятнее всего первым, кто сдал экзамен, был юноша.

4.3 Примеры для самостоятельной работы

1 В магазине три холодильника, в которых заканчивается мороженое. В первом четыре белых и шесть шоколадных, во втором – два белых и восемь шоколадных, в третьем – три белых и семь шоколадных. Наугад выбирают холодильник и достают из него мороженое. Найти вероятность того, что оно белое.

2 В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя; компьютер, во время работы на котором не произошло сбоя, первого типа. *Ответ:* 0,78; 0,462.

3 В поступивших на склад трех партиях деталей годные составляют 89, 92 и 97 % соответственно, а количества деталей в партиях относятся как 1:2:3. Чему равна вероятность того, что случайно выбранная со склада деталь окажется негодной? Пусть известно, что случайно выбранная деталь оказалась негодной. Найти вероятность того, что она принадлежит второй партии. *Ответ*: 0,06; $\frac{4}{9}$.

4 В двух ящиках лежит морковь. В первом ящике 12 штук, из них одна нестандартная, во втором – 10, из них одна нестандартная. Из первого ящика наудачу взята одна морковка и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика морковка будет нестандартной. *Ответ*: $\frac{13}{132}$.

5 В ящике лежат 20 теннисных мячей: 15 новых и пять играных. Для игры наудачу выбирают два мяча и после игры возвращают обратно. Затем для второй игры также наудачу выбирают два мяча. Найти вероятность того, что вторую игру будут проводить новыми мячами. *Ответ*: 0,445.

6 Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина. *Ответ*: $\frac{3}{7}$.

7 В первой урне три красных и один белый шар, во второй – три белых и один красный шар. Бросается монета. Если сверху оказывается герб, вынимается один шар из первой урны, в противном случае – из второй. Найти вероятность того, что: вынутый шар красный; шар вынимался из первой урны, если он оказался красным?

8 Для участия в студенческих отборочных соревнованиях выделено из первой группы потока четыре студента, из второй – шесть, из третьей – пять.

Вероятность того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную университета соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент? *Ответ*: 0,787; ко второй.

9 На сборку поступают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3 % брака, второй − 0,2 %, третий – 0,4 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000 деталей, со второго – 2000, с третьего – 2500. *Ответ*: $\frac{17}{5500}$.

10 В каждой из трех урн содержится шесть черных и четыре белых шара. Из первой урны наудачу извлечен шар и переложен во вторую, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым. *Ответ*: 0,4.

11 На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – шесть и от третьего – четыре. Вероятность безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; б) проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе. *Ответ*: а) 0,83; б) 0,54; 0,29.

12 На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем $3/4$ продукции с процентом брака 4 %, вторая – $1/4$ продукции с процентом брака 6 %. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным. *Ответ*: а) 0,045; б) 0,333.

13 Перед посевом 80 % всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения растений, проросших из этих семян, вредителями равна 0,06, а растений, проросших из необработанных семян, – 0,3. Найти вероятность того, что взятое наудачу растение окажется пораженным. Если оно поражено, то какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени? *Ответ:* $0{,}108$; $0{,}444$.

14 По каналу связи, подверженному воздействию помех, передают одну из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд равны 0,7 и 0,3 соответственно. За счет помех вероятности правильного приема каждого из символов 1 и 0 уменьшаются до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо один от другого. На выходе зарегистрирована комбинация 10110. Определить, какая из команд наиболее вероятно была передана. *Ответ*: 11111.

15 Два стрелка стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в цель попал первый стрелок. *Ответ*: $\frac{6}{7}$.

5 Схема Бернулли

5.1 Теоретическая часть

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых опытов) называют последовательность опытов, удовлетворяющую следующим условиям:

1) при каждом опыте различают лишь два исхода: появление некоторого события A (успех) либо появление его дополнения $\overline{A}$ (неудача);

2) опыты являются независимыми;

3) вероятность успеха в каждом опыте постоянна и равна $P(A)=p$.

Вероятность неудачи в каждом опыте обозначим q, т. е. $P(\overline{A})=1-p=q$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n опытах по схеме Бернулли произойдет ровно k успехов, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=\overline{0,n}.$$

Набор вероятностей $P_n(k)$, $k=\overline{0,n}$, называют биномиальным распределением вероятностей.

Вероятность появления успеха в n опытах не менее k_1 и не более k_2 раз

$$P_n(k_1 \le k \le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

В частном случае при $k_1=1$ и $k_2=n$ получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n опытах:

$$P_n(k \ge 1)=1-P_n(0)=1-q^n.$$

При больших значениях числа опытов n использование формулы Бернулли затруднительно в вычислительном плане. Поэтому используют приближенные формулы.

Формула Пуассона. Пусть число испытаний неограниченно увеличивается $(n \to \infty)$ и вероятность наступления события A в каждом испытании уменьшается $(p \to 0)$, но так, что $n \cdot p=\lambda=\text{const}$. Тогда вероятность $P_n(k)$ определяют по приближенной формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=\overline{0,n},$$

называемой формулой Пуассона.

Совокупность вероятностей $P(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\ldots$, называют распределением Пуассона.

Локальная формула Муавра-Лапласа. Если требуется определить вероятность массовых (n велико) и нередких (p не мало) событий, то удобно использовать формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

где $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$;

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функцию φ называют плотностью стандартного нормального распределения.

Функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Если $x>4$, то $\varphi(x)=0$.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38138	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147

Окончание таблицы 1

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457

x	Десятые доли x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,00443	00238	00123	00061	00029
4,0	00013	00006	00002	00001	

Интегральная формула Муавра-Лапласа. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi_0(x'') - \Phi_0(x'),$$

где $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$;

$x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$;

$\Phi_0(x)$ – нормированная функция Лапласа, $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Функция $\Phi_0(x)$ нечетная, т. е. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.

Если $x > 5$, то $\Phi_0(x) = 0{,}5$.

Значения функции Φ_0 приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения функции $\Phi_0\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	Десятые доли x				
	0	2	4	6	8
3,0	0,49865	49931	49966	49984	49993
4,0	49997	49999			

5.2 Образцы решения примеров

1 По цели производится шесть выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что:

а) произойдет одно попадание в цель;

б) произойдет не менее четырех попаданий в цель;

в) произойдет хотя бы одно попадание в цель.

Решение

Рассмотрим событие $A-$ попадание при одном выстреле. По условию $P(A) = p = 0,4$, при этом вероятность промаха при одном выстреле $q = P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,4 = 0,6$. Для вычисления искомых вероятностей используем формулу Бернулли:

а) $P_6(1) = C_6^1 p^1 q^{6-1} = \dfrac{6!}{5!\cdot 1!}(0,4)^1(0,6)^5 = 6\cdot 0,4\cdot(0,6)^5 \approx 0,1866;$

б) $P_6(k \geq 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 =$

$$= \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot(0,4)^4\cdot(0,6)^2 + \frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot(0,4)^5\cdot(0,6)^1 + (0,4)^6\cdot(0,6)^0 =$$
$$= 15\cdot(0,4)^4\cdot(0,6)^2 + 6\cdot(0,4)^5\cdot(0,6) + (0,4)^6\cdot 1 \approx 0,5109;$$

в) вероятность того, что из шести выстрелов будет хотя бы одно попадание, вычислим через вероятность противоположного события:

$$P_6(k \geq 1) = 1 - P_6\left(0\right) = 1 - q^6 = 1 - (0,6)^6 \approx 0,9533.$$

2 Завод отправил в другой город 2000 изделий. Вероятность того, что в пути изделие может быть повреждено, равна 0,001. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не более двух изделий.

Решение

Рассмотрим событие $A-$ в пути будет повреждено не более двух изделий, т. е. или 0, или1, или 2.

Надо определить

$$P(A) = P_{2000}(0) + P_{2000}(1) + P_{2000}(2).$$

Так как $n = 2000$ − велико, $p = 0,001$ − мало, то находим

$$\lambda = n\cdot p = 2000\cdot 0,001 = 2$$

и используем формулу Пуассона:

$$P(A) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = (1+2+2) \cdot e^{-2} \approx 5 \cdot 0{,}13537 = 0{,}6769.$$

3 Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 400 выстрелах произойдет ровно 300 попаданий.

Решение

Используем локальную формулу Лапласа.

$$P_{400}\left(300\right) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot \varphi\left(\frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = \frac{1}{8}\varphi\left(-2{,}5\right) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}01753 \approx 0{,}0022.$$

4 Найти вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости выпадет от 90 до 120 «шестерок».

Решение

Вероятность выпадения «шестерки» при одном бросании $p = \frac{1}{6}$. Вероятность противоположного события $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Для вычисления искомой вероятности используем интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_{600}\left(90;120\right) \approx \Phi_0\left(\frac{120 - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{90 - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = \Phi_0\left(2{,}19\right) - \Phi_0\left(-1{,}1\right) =$$

$$= 0{,}48574 + 0{,}36433 = 0{,}85007\,.$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

1 В цехе шесть моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент:

а) включено четыре мотора;
б) включены все моторы;
в) выключены все моторы.

Ответ: а) 0,246; б) 0,26; в) 0,000064.

2 Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,3. *Ответ*: 0, 472.

3 Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок

других магазинов. Найти вероятность того, что в день поступит четыре заявки. *Ответ*: 0,251.

4 Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничейный исход исключается) три партии из четырех или пять из восьми?

5 Известно, что 40 % автомобилей, следующих по шоссе, у развилки поворачивают направо и 60 % – налево. Найти вероятность того, что из 400 автомобилей, проехавших по шоссе, ровно 250 повернули налево? *Ответ*: 0,024.

6 Вероятность выпуска бракованного сверла равна 0,015. Сверла укладывают в коробки по 100 шт. Найти вероятность того, что в коробке, выбранной наудачу, не окажется ни одного бракованного сверла. *Ответ*: 0,22313.

7 Бюффон бросил монету 4040 раз. При этом герб выпал 2048 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат? *Ответ*: 0,0085.

8 Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний. *Ответ*: 0,95945.

9 В ящике 10 револьверов одной системы и одинаковых по виду; из них четыре непристрелянных. Вероятность попадания в цель из непристрелянного револьвера равна 0,3, а из пристрелянного – 0,9. Из взятого наудачу револьвера произведено 200 выстрелов по цели. Найти вероятность того, что число попаданий в цель заключено между 120 и 150. *Ответ*: 0,96.

10 Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,007. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность 9 «сбоев». *Ответ*: 0,1014.

11 Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70 %. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян будет 500 проросших. *Ответ:* 0,0234.

12 Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах число попаданий будет не более 86 и не менее 78 раз. *Ответ*: 0,6247.

13 На факультете 300 студентов. Предполагая, что вероятность родиться в каждый день года одинакова, найти вероятность того, что ровно 80 студентов факультета будут праздновать дни рождения летом. *Ответ:* 0,0425.

14 Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Вероятность того, что в течение минуты какому-либо абоненту понадобится соединение, равна 0,0007. Найти вероятность того, что за минуту на телефонную станцию поступит не менее трех вызовов. *Ответ*: 0,03414.

15 Известно, что на выпечку 1000 булочек с изюмом нужно израсходовать 10000 изюмин. Найти вероятность того, что:

а) наудачу выбранная булочка не будет содержать изюм;

б) среди пяти выбранных наудачу булочек две не будут содержать изюма, а в остальных будет хотя бы по одной изюмине.

Ответ: а) $e^{-10} \approx 4{,}68 \cdot 10^{-5}$; б) $\approx 2{,}19 \cdot 10^{-8}$.

16 Вероятность выигрыша на один лотерейный билет равна 0,01. Сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша в лотерее была не менее 0,9? *Ответ*: не менее 230.

Список литературы

1 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2004. – 252 с.

2 Теория вероятностей / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 455 с.

3 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика / А. И. Герасимович. – 2-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 1983. – 276 с.

4 **Солодовников, А. С.** Теория вероятностей / А. С. Солодовников. – Москва : Просвещение, 1983. – 207 с.