ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ). ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ. СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

Часть 2

Могилев 2018

УДК 519.21
ББК 22.171
В 16

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «28» сентября 2018 г., протокол № 1

Составители: доц. В. Г. Замураев;
ст. преподаватель О. А. Маковецкая;
доц. И. И. Маковецкий

Рецензент доц. И. Д. Камчицкая

Приведены методические разработки восьми практических занятий по разделу «Теория вероятностей» дисциплин «Высшая математика», «Математика», «Математика (спецглавы)», «Основы комбинаторики», «Спецглавы математики. Теория вероятностей и математическая статистика», «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», которые могут быть использованы студентами дневной и заочной форм обучения для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА (СПЕЦГЛАВЫ). ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ. СПЕЦГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Часть 2

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. .Уч.-изд. л. .Тираж 105 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

Часть 2

6 Дискретные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики. Биномиальное и пуассоновское распределения

Случайной величиной называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие некоторое число.

При этом предполагается, что определена вероятность события $X < x$ для любых значений x.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения x_k, а вторая – их вероятности $p_k = P\left(X = x_k\right)$, причем $\sum\limits_k p_k = 1$.

x_k	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_k	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Существует универсальный способ задания закона распределения, который годится для случайных величин любого типа: ***функцией распределения*** случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что X примет значение меньше, чем число x, то есть $F\left(x\right) = P\left(X < x\right)$.

Из определения следует, что $0 \le F\left(x\right) \le 1$ и $P\left(a < X < b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$.

Одна из числовых характеристик, фиксирующая положение случайной величины на числовой оси, то есть некоторое среднее взвешенное значение случайной величины, около которого группируются ее возможные значения, – ***математическое ожидание*** $M(X)$.

Для дискретной случайной величины математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ . \tag{6.1}$$

Дисперсия $D(X)$ – характеристика рассеяния, разбросанности случайной величины около ее математического ожидания.

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется следующим образом:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i\,. \tag{6.2}$$

Иногда дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-\left(M(X)\right)^2. \tag{6.3}$$

Дисперсия имеет размерность квадрата отклонения случайной величины, что не всегда удобно. Наряду с дисперсией вводится еще одна характеристика рассеяния – ***среднее квадратическое отклонение***, которое вычисляется по формуле

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \tag{6.4}$$

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Возможные значения случайной величины 0, 1, …, n, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли

$$p_k=P(X=x_k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\,. \tag{6.5}$$

Для биномиального распределения $M(X)=n\cdot p$, $D(X)=n\cdot p\cdot q$.

Предельным случаем для биномиального распределения, если n неограниченно увеличивается и одновременно вероятность p неограниченно уменьшается, является ***распределение Пуассона***. Возможные значения случайной величины 0, 1, …, k, …, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле

$$p_k=P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}\,, \tag{6.6}$$

где $\lambda=np$.

Для этого распределения $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

Образцы решения задач

Пример 1 – В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 р. и десять выигрышей по 10 р. Написать закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение

Данная случайная величина X: $x_1=50$; $x_2=10$; $x_3=0$. Вероятности этих возможных значений $p_1=\frac{1}{100}=0{,}01$; $p_2=\frac{10}{100}=0{,}1$; $p_3=\frac{100-10-1}{100}=0{,}89$.

Закон распределения случайной величины имеет следующий вид (таблица 6.1).

Таблица 6.1

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Составим функцию распределения $F(x)$:

$x \le 0$: $F(x) = P(X < x) = 0$;

$0 < x \le 10$: $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0,89$;

$10 < x \le 50$: $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0,89 + 0,1 = 0,99$;

$x > 50$: $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 50) =$

$= 0,89 + 0,1 + 0,01 = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0,89, & 0 < x \le 10; \\ 0,99, & 10 < x \le 50; \\ 1, & x > 50. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид, представленный на рисунке 6.1.

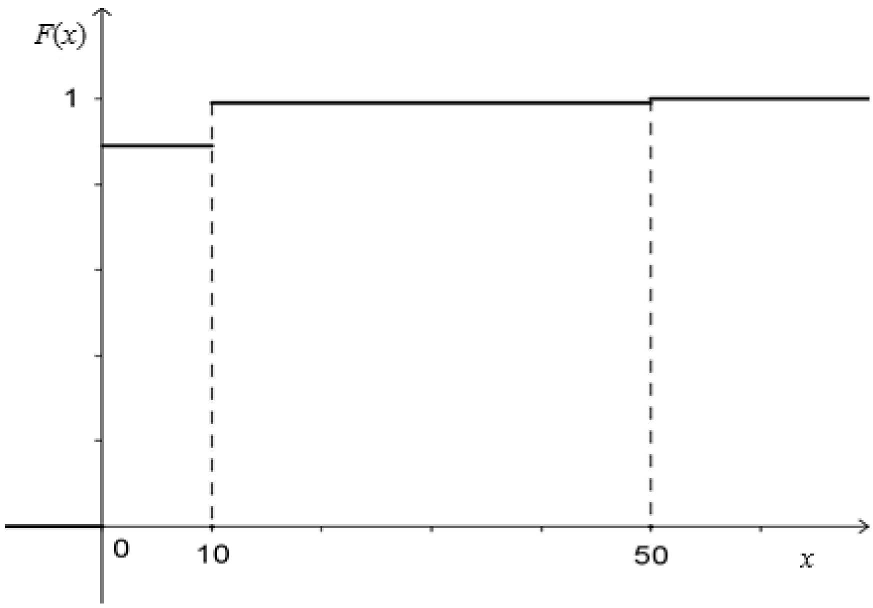

Рисунок 6.1

Числовые характеристики данной случайной величины

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 50 \cdot 0,01 + 10 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,89 = 1,5;$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2p_i-\left(M(X)\right)^2=50^2\cdot 0{,}01+10^2\cdot 0{,}1+0^2\cdot 0{,}89-(1{,}5)^2=$$

$$=25+10-2{,}25=32{,}75;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{32{,}75}\approx 5{,}72.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули наугад один шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Требуется:

а) построить ряд распределения СВ X;

б) построить функцию распределения СВ X;

в) найти $M(X)$ и $D(X)$.

2 В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$.

3 Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}5$; $p_4 = 0{,}6$. Найти $M(X)$, $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение СВ X – числа отказавших приборов.

4 Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X) = 2{,}7$ и $D(X) = 0{,}21$.

5 Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$, а также известно, что $M(X) = 2{,}3$, $M(X^2) = 5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

6 Даны независимые случайные величины X и Y (таблицы 6.2 и 6.3).

Таблица 6.2

X	–1	0	1
p	0,2	0,5	0,3

Таблица 6.3

Y	2	4
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание и дисперсию следующих случайных величин:

а) $X + Y$; б) $2X - 3Y$; в) $X - Y + 5$.

7 Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения случайной величины X – числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти $M(X)$, $D(X)$.

8 Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,5. Пусть СВ X – число попаданий в мишень для первого стрелка; Y – число попаданий вторым стрелком. Построить ряд распределения

СВ $Z = X - Y$ и найти ее числовые характеристики $M(Z)$, $D(Z)$.

9 Два баскетболиста независимо друг от друга делают по одному броску в одну корзину. Вероятность попадания при одном броске равна 0,6 и 0,9 соответственно. Найти закон распределения случайной величины X – числа попаданий в корзину. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

10 Вероятность того, что на АЗС есть в наличии бензин марки Аи-95, необходимый автомобилисту, равна 0,9. Построить функцию распределения случайной величины X – числа АЗС, которые посетит автомобилист, если в городе пять АЗС. Найти $M(X)$, $D(X)$.

Домашнее задание

1 Непрерывные случайные величины. Функция распределения, ее свойства. Плотность вероятности, ее свойства. Числовые характеристики НСВ.

2 Решить задачи.

Задача 1. Партия из 50 изделий содержит шесть бракованных. Из всей партии наугад выбрано пять изделий. Построить ряд распределения и найти математическое ожидание СВ X – числа бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

Задача 2. На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,5. Составить ряд распределения и построить функцию распределения СВ X – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой СВ?

7 Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

$F(x)$ – неубывающая функция.

$$P\left(a \le X \le b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right).$$

$$\lim_{x \to -\infty} F\left(x\right) = 0; \ \lim_{x \to +\infty} F\left(x\right) = 1.$$

$F(x)$ непрерывна слева.

Распределение непрерывной случайной величины X также можно задать с помощью ***плотности вероятности*** $f\left(x\right) = F'\left(x\right)$.

$$f\left(x\right) \ge 0.$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1\,.$$

$$P(a\le X\le b)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx\,.$$

К числовым характеристикам непрерывной случайной величины относятся ***начальный момент*** порядка k, ***центральный момент*** порядка k, ***математическое ожидание***, ***дисперсия***, ***среднее квадратическое отклонение***.

$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ – математическое ожидание.

$\gamma_k=M\left(X^k\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$ – начальный момент порядка k.

$\mu_k=M\left(\left(X-M(X)\right)^k\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^k f(x)\,dx$ – центральный момент порядка k.

$D(X)=\mu_2=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)=\gamma_2-\gamma_1^2$ – дисперсия.

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – среднее квадратическое отклонение.

Примеры решения задач

Пример 1 – Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0;\\ ax^2 \text{ при } 0<x\le 1;\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент a;

б) плотность вероятности $f(x)$;

в) вероятность того, что случайная величина X в результате опыта примет значение между 0,25 и 0,5;

г) числовые характеристики случайной величины.

Решение:

а) значение коэффициента a определим, учитывая, что функция распределения непрерывная: $F(1-0)=F(1+0)=F(1)$.

$$\lim_{x\to 1-0} F(x)=\lim_{x\to 1-0} ax^2=a;$$

$$\lim_{x\to 1+0} F(x)=\lim_{x\to 1+0} 1=1.$$

Приравнивая, получаем $a=1$;

б) плотность вероятности $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 2x \text{ при } 0<x\le 1; \\ 0 \text{ при } x\le 0 \text{ или } x>1; \end{cases}$$

в) вероятность попадания в интервал

$$P(0,25<X<0,5)=F(0,5)-F(0,25)=0,5^2-0,25^2=0,25-0,0625=0,1875;$$

г) числовые характеристики

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1-\frac{4}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{9-8}{18}=\frac{1}{18}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$1)\ F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0; \\ \sin 2x \text{ при } 0<x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1 \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \qquad \alpha=0;\ \beta=\frac{\pi}{6};$$

$$2)\ F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 2; \\ \dfrac{1}{2}(x-2)(5-x) \text{ при } 2<x\le 3; \\ 1 \text{ при } x>3; \end{cases} \qquad \alpha=2,5;\ \beta=3;$$

3) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x) \text{ при } 0 < x \le \pi; \\ 1 \text{ при } x > \pi; \end{cases}$ $\alpha = 0$; $\beta = \dfrac{\pi}{2}$;

4) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4} \text{ при } 0 < x \le 2; \\ 1 \text{ при } x > 2; \end{cases}$ $\alpha = 1$; $\beta = 2$;

5) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right) \text{ при } 0 < x \le 3; \\ 1 \text{ при } x > 3; \end{cases}$ $\alpha = 0$; $\beta = \dfrac{3}{2}$;

6) $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } \dfrac{1}{e} \le x \le 1; \\ \ln x \text{ при } 1 < x \le e; \\ 1 \text{ при } x > e; \end{cases}$ $\alpha = 1$; $\beta = 2$.

Требуется найти:
а) плотность распределения $f(x)$;
б) математическое ожидание $M(X)$;
в) дисперсию $D(X)$;
г) вероятность попадания СВ X на заданный интервал $(\alpha;\ \beta)$.
Построить графики функций $f(x)$, $F(x)$.

2 Дана плотность $f(x)$ распределения вероятностей случайной величины X:

1) $f(x)=\begin{cases} A\sin 2x \text{ при } \dfrac{3\pi}{4} < x \le \pi; \\ 0 \text{ при } x \le \dfrac{3\pi}{4} \text{ или } x > \pi; \end{cases}$ $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; $\beta = \dfrac{5\pi}{6}$;

2) $f(x)=\begin{cases} A(3x+1) \text{ при } 0 < x \le \dfrac{1}{3}; \\ 0 \text{ при } x \le 0 \text{ или } x > \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\alpha = 0{,}1$; $\beta = 0{,}2$;

3) $f(x)=\begin{cases} Ax^2 \text{ при } 0 < x \le \dfrac{1}{3}; \\ 0 \text{ при } x \le 0 \text{ или } x > \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\alpha = 0$; $\beta = 0{,}5$;

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{9-x^2}} \text{ при } -3<x\le 3;\\ 0 \text{ при } x\le -3 \text{ или } x>3;\end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=\dfrac{\pi}{2}$;

5) $f(x)=\begin{cases}A\cos^2 x \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 \text{ при } x\le-\dfrac{\pi}{2} \text{ или } x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=\dfrac{\pi}{4}$;

6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x} \text{ при } 1<x\le e;\\ 0 \text{ при } \dfrac{1}{e}\le x\le 1 \text{ или } x>e;\end{cases}$ $\alpha=1$; $\beta=2$.

Найти:
а) значение постоянного параметра этого распределения;
б) функцию распределения $F(x)$;
в) математическое ожидание $M(X)$;
г) дисперсию $D(X)$;
д) вероятность попадания СВ X на заданный интервал $(\alpha;\ \beta)$.
Построить графики функций $f(x)$, $F(x)$.

Домашнее задание

1 Перечислить характеристические свойства функции распределения случайной величины.

2 Может ли функция $F(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ при $x\in(-\infty;+\infty)$ являться функцией распределения некоторой случайной величины?

3 Может ли функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$ являться плотностью вероятности некоторой случайной величины?

4 Дана функция $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le-\dfrac{\pi}{2};\\ \cos x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0;\\ 1, \text{ если } x>0.\end{cases}$

Показать, что эта функция является функцией распределения некоторой случайной величины X. Найти вероятность $P\left(-\dfrac{\pi}{3}\le X\le 0\right)$, числовые характеристики этой случайной величины.

5 Найти числовые характеристики случайной величины X, если функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -a;\\ \dfrac{(a+x)^2}{2a^2} \text{ при } -a<x\le 0;\\ 1-\dfrac{(a-x)^2}{2a^2} \text{ при } 0<x\le a;\\ 1 \text{ при } x>a.\end{cases}$$

8 Равномерное и показательное распределения

Непрерывная случайная величина X называется распределенной ***равномерно***, если ее плотность вероятности задается функцией

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} \text{ при } a\le x\le b;\\ 0 \text{ при } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$$

Для равномерно распределенной случайной величины X

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a\le x\le b;\\ 1 \text{ при } x>b.\end{cases}$$

$P(\alpha\le X\le\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, если $a\le\alpha\le\beta\le b$.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному*** закону, если ее плотность вероятности задается функцией

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x\ge 0;\\ 0 \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Для случайной величины, распределенной по показательному закону,

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda};$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\\ 0 \text{ при } x<0.\end{cases}$$

$$P(\alpha \le X \le \beta)=e^{-\lambda\cdot\alpha}-e^{-\lambda\cdot\beta}.$$

Примеры решения задач

Пример 1 – Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Найти вероятность того, что ему придется ждать не более полминуты.

Решение

Поскольку событие может наступить в любой момент времени на протяжении 2 мин, то данная случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2], функция распределения которой имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0;\\ \dfrac{x}{2} \text{ при } 0<x\le 2;\\ 1 \text{ при } >2.\end{cases}$$

Тогда искомая вероятность

$$P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{4}.$$

Пример 2 – Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0;\\ 5e^{-5x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение

По условию $\lambda=5$. Следовательно,

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{5},\qquad D(X)=\sigma^2(X)=\frac{1}{25}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2a;\ 2b)$.

2 Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Найти плотность распределения СВ T – времени, в течение которого ему придется ждать поезда, числовые характеристики этой случайной величины. Найти вероятность того, что ожидать придется более одной минуты.

3 Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

4 Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(a;\ b)$. Найти вероятность того, что в результате опыта она отклонится от своего математического ожидания больше, чем на 3σ.

5 Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X – в интервале $(a;\ b)$, Y – в интервале $(c;d)$. Найти математическое ожидание произведения $X \cdot Y$.

6 Написать плотность вероятности и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

7 Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти $P(1 < X < 2)$.

8 Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}01e^{-0{,}01t}$ $(t > 0)$, где t – время, ч. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

9 Испытываются три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$, для второго – $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$, для третьего – $F_3(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$, $t > 0$.

Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;\ 5)$ ч откажут:

а) только один элемент;

б) только два элемента;

в) все три элемента.

10 Доказать, что если непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, то вероятность того, что X примет значение, меньшее математического ожидания $M(X)$, не зависит от величины параметра λ. Найти вероятность $P(X > M(X))$.

Домашнее задание

1 Какой вид имеет функция распределения $F(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha;\ \beta]$?

2 Чему равны дисперсия и математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\ \beta]$?

3 Какой вид имеет функция распределения для показательного закона?

4 Чему равна вероятность попадания в заданный интервал значений случайной величины X, имеющей показательное распределение?

5 Случайная величина X имеет равномерное распределение с математическим ожиданием $M(X) = 3$ и дисперсией $D(X)=\frac{4}{3}$. Найти функцию распределения данной случайной величины.

6 Время обнаружения T цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно 10 с.

7 Среднее время работы каждой из двух радиоламп соответственно равно 750 и 800 ч. Определить вероятность того, что обе лампы будут работать не менее 1000 ч.

9 Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина называется распределенной по ***нормальному*** закону, если ее плотность вероятности задается функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ – параметры распределения, причем $M(X)=a$, $\sigma(X)=\sigma$.

Функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

$$P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ или $\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, таблицы значений которой приведены в [1–6].

$$P(|X-a|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\ (\varepsilon>0).$$

$P(|x-a|<3\sigma)=\Phi(3)=0{,}9973\approx 1$ – правило «трех сигм».

Примеры решения задач

Пример 1 – Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

Решение

Для нормально распределенной случайной величины

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставляя $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$, $\sigma = 2$, получим

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14 - 10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12 - 10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим $\Phi(2) = 0{,}9772$, $\Phi(1) = 0{,}8413$.

Искомая вероятность $P(12 < X < 14) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$.

Задачи для самостоятельного решения

1 Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15;25).

2 Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г.

Найти вероятность того, что:

а) взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г;

б) из трех независимых взвешиваний ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 г.

3 Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $m = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.

4 Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с $a = 10$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие с диаметром 10,7 мм, и все, проходящие через круглое отверстие с диаметром 9,3 мм.

Найти процент шариков, которые будут браковаться.

5 Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с проектной длиной (математическим ожиданием), равной 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм.

Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали:

а) больше 55 мм;

б) меньше 40 мм.

Указание: из равенства $P(32 < X < 68) = 1$ предварительно определить σ.

6 Упаковки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1,06 кг. Найти дисперсию, если 5 % коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

7 В нормально распределенной совокупности 11 % значений X меньше 0,5 и 8 % X больше 5,8. Найти параметры a и σ данного распределения.

8 В нормально распределенной совокупности 25 % значений X меньше 5,38 и 10 % значений X больше 4,44. Найти параметры данного распределения.

9 Масса арбуза некоторого сорта – нормально распределенная случайная величина с $a = 5$ кг и $\sigma = 0,5$ кг. Какова вероятность того, что в партии весом в 10 т находится не менее 1900 и не более 2100 арбузов?

Домашнее задание

1 Чему равны математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины?

2 Чему равна вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в заданный интервал $(\alpha;\beta)$?

3 Как вычислить вероятность отклонения нормальной величины от ее математического ожидания $M(X)$?

4 В чем суть правила «трех сигм»?

5 По виду плотности вероятности нормально распределенной случайной величины определить параметры распределения и написать функцию распределения.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

6 Случайная величина X распределена нормально. Найти $P(35 \le X \le 40)$, если $M(X) = 25$ и $P(10 \le X \le 15) = 0,2$.

7 Случайная величина X распределена по нормальному закону распределения с параметрами $a = 30$ и $\sigma = 10$. Найти $P(10 \le X \le 50)$.

8 Диаметр детали, изготовленной на станке, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 4,5$ и $\alpha = 0,05$ мм. Найти вероятность того, что размер диаметра случайно взятой детали отличается от номинала не более чем на 1 мм.

10 Системы двух случайных величин. Способы задания системы двух случайных величин

Двумерной называют случайную величину (X,Y), возможные значения которой есть пары чисел (x,y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют ***систему двух случайных величин***.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, то есть пар чисел $\left(x_i, y_j\right)$ и их вероятностей $p\left(x_i, y_j\right)$ $\left(i=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ j=1,\ 2,\ ...,\ m\right)$. Обычно закон распределения задают в виде таблицы 10.1, называемой ***матрицей распределения***.

Таблица 10.1

X	Y						
	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m	Σ
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	…	$p(x_1,y_j)$	…	$p(x_1,y_m)$	p_1
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_2,y_j)$	…	$p(x_2,y_m)$	p_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p(x_i,y_1)$	$p(x_i,y_2)$	…	$p(x_i,y_j)$	…	$p(x_i,y_m)$	p_i
…	…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p(x_n,y_1)$	$p(x_n,y_2)$	…	$p(x_n,y_j)$	…	$p(x_n,y_m)$	p_n
Σ	q_1	q_2	…	q_j	…	q_m	1

Сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы, равна единице. Суммируя вероятности по столбцам, получаем закон распределения составляющей X. Суммируя вероятности по строкам, получаем закон распределения составляющей Y.

Двумерную случайную величину (безразлично, дискретную или непрерывную) можно задать с помощью ***функции распределения*** F(x,y), которая определяется по формуле

$$F\left(x,y\right)=P\left(X<x,Y<y\right).$$

Свойства функции распределения:

1) $0\le F\left(x,y\right)\le 1$;

2) $F\left(-\infty;y\right)=F\left(-\infty;\infty\right)=F\left(x;-\infty\right)=0$; $F\left(+\infty;+\infty\right)=1$.

3) $F\left(x,+\infty\right)=F_1\left(x\right)$, где $F_1\left(x\right)$ – функция распределения составляющей X;

$F\left(+\infty;y\right)=F_2\left(y\right)$, где $F_2\left(y\right)$ – функция распределения составляющей Y;

$P\left(x_1\le X\le x_2, y_1\le Y\le y_2\right)=\left(F\left(x_2,y_2\right)-F\left(x_1,y_2\right)\right)-\left(F\left(x_2,y_2\right)-F\left(x_1,y_1\right)\right)$.

Непрерывную двумерную случайную величину можно также задать, пользуясь ***двумерной плотностью вероятности***. Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x,y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения: $f\left(x,y\right)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$.

Свойства плотности вероятности:

1) $f\left(x,y\right)\ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dxdy=1$.

Плотности распределения составляющих

$$f_1\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dy;\ f_2\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dx.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D определяется по формуле $P\left(\left(X,Y\right)\in D\right)=\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$.

Примеры решения задач

Пример 1 – Два стрелка, независимо друг от друга, делают по одному выстрелу каждый. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка; Y – число попаданий второго стрелка. Вероятность попадания при выстреле для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,4. Построить матрицу распределения системы случайных величин (X, Y) и законы распределения составляющих X и Y. Найти функцию распределения $F(x, y)$.

Решение

Занесем возможные значения случайных величин X и Y в таблицу, считая попадание «1», а промах «0» (таблица 10.2).

$$p_{11}=P\left(X=0;Y=0\right)=\left(1-0,7\right)\cdot\left(1-0,4\right)=0,18;$$

$$p_{21}=P\left(X=1;Y=0\right)=0,7\cdot\left(1-0,4\right)=0,42;$$

$$p_{12}=P\left(X=0;Y=1\right)=\left(1-0,7\right)\cdot 0,4=0,12;$$

$$p_{22}=P\left(X=1;Y=1\right)=0,7\cdot 0,4=0,28.$$

Получаем матрицу распределения (таблица 10.3).

Таблица 10.2

X	Y	
	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

Таблица 10.3

X	Y	
	0	1
0	0,18	0,12
1	0,42	0,28

Законы распределения составляющих запишем суммированием вероятностей по строкам и столбцам (таблицы 10.4 и 10.5).

Таблица 10.4

X	0	1
p	0,18 + 0,12 = 0,3	0,42 + 0,28 = 0,7

Таблица 10.5

Y	0	1
p	0,18 + 0,42 = 0,6	0,12 + 0,28 = 0,4

Двумерную функцию распределения $F(x, y)$ находим на основании матрицы распределения (таблица 10.6).

Таблица 10.6

X	Y		
	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,18	0,18 + 0,12
$x > 1$	0	0,18 + 0,42	0,18 + 0,12 + 0,42 + 0,28

Окончательно получаем следующее (таблица 10.7).

Таблица 10.7

X	Y		
	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,18	0,3
$x > 1$	0	0,6	1

Пример 2 – Задана двумерная плотность вероятности $f\left(x,y\right)=\dfrac{C}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)}$ системы $\left(X,Y\right)$ двух случайных величин. Найти постоянную C и плотности распределения составляющих системы.

Решение

Воспользуемся свойством двумерной плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dxdy=1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)}dxdy = C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{9+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{16+y^2} =$$

$$= C\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\int_{A_1}^{A_2}\frac{dx}{9+x^2}\cdot\lim_{\substack{B_1\to-\infty\\ B_2\to+\infty}}\int_{B_1}^{B_2}\frac{dx}{16+y^2} = C\cdot\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Bigg|_{A_1}^{A_2}\cdot\lim_{\substack{B_1\to-\infty\\ B_2\to+\infty}}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}\Bigg|_{B_1}^{B_2} =$$

$$= C\left(\lim_{A_2\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{A_2}{3} - \lim_{A_1\to-\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{A_1}{3}\right)\cdot\left(\lim_{B_2\to+\infty}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{B_2}{4} - \lim_{B_1\to-\infty}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{B_1}{4}\right) =$$

$$= \frac{C}{12}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{C\pi^2}{12}.$$

Тогда $\frac{C\pi^2}{12}=1,\ C=\frac{12}{\pi^2}$.

Найдем плотность распределения $f_1(x)$ составляющей X:

$$f_1\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dy = \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)} = \frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{9+x^2}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\int_{A_1}^{A_2}\frac{dy}{16+y^2} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2\left(9+x^2\right)}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}\Bigg|_{A_1}^{A_2} = \frac{3}{\pi^2\left(9+x^2\right)}\left(\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A_2}{4}-\operatorname{arctg}\frac{A_1}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2\left(9+x^2\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{\pi^2\left(9+x^2\right)} = \frac{3}{\pi\left(9+x^2\right)}.$$

Аналогичным образом можно получить плотность распределения $f_2\left(y\right)$ составляющей Y:

$$f_2\left(y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dx = \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)} = \frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{16+y^2}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\int_{A_1}^{A_2}\frac{dx}{9+x^2} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2\left(16+y^2\right)}\cdot\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Bigg|_{A_1}^{A_2} = \frac{4}{\pi^2\left(16+y^2\right)}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A_2}{3}-\operatorname{arctg}\frac{A_1}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2\left(16+y^2\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{4\pi}{\pi^2\left(16+y^2\right)} = \frac{4}{\pi\left(16+y^2\right)}.$$

Пример 3 – Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{3}$, если известна функция распределения $F(x,y)=\sin x\cdot\sin y\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение

Воспользуемся формулой для вычисления вероятности попадания случайной точки в прямоугольник:

$$P\left(\frac{\pi}{6}\le X\le\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\le Y\le\frac{\pi}{3}\right)=\left(F\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(F\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}\approx 0,08.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Два игрока, независимо друг от друга, по два раза выбрасывают игральный кубик. Случайная величина X – число выпадений «шестерки» у первого игрока; Y – число выпадений «шестерки» у второго игрока. Построить матрицу распределения системы двух случайных величин (X, Y) и законы распределения составляющих. Найти функцию распределения.

2 Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X<\frac{1}{2}$, если известна функция распределения системы $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}3y+\frac{1}{2}\right)$.

3 Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, если известна функция распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & \text{при } x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0 \text{ при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

4 Найти плотность распределения системы двух случайных величин по известной функции распределения

$$F(x,y)=\left(1-e^{-2x}\right)\cdot\left(1-e^{-3y}\right),\ x\ge 0,\ y\ge 0.$$

5 Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, плотность распределения системы двух случайных величин $f(x,y)=C\sin(x+y)$, вне прямоугольника $f(x,y)=0$. Найти величину C, функцию распределения системы $F(x,y)$.

6 Задана двумерная плотность вероятности $f(x,y)=\dfrac{C}{\left(x^2+y^2+1\right)^3}$ системы случайных величин (X,Y). Найти постоянную C.

Указание – При интегрировании перейти к полярным координатам.

7 В первом квадранте задана функция распределения системы двух случайных величин $F(x,y)=1+2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}$. Найти двумерную плотность распределения системы, вероятность попадания случайной точки (X, Y) в треугольник с вершинами $A(1;3)$, $B(3;3)$, $C(2;8)$.

Домашнее задание

1 Что такое двумерная случайная величина?

2 Каким образом задается дискретная двумерная случайная величина?

3 Каким образом задается непрерывная двумерная случайная величина?

4 Можно ли, зная законы распределения составляющих X и Y двумерной случайной величины, восстановить двумерную случайную величину (X, Y)?

5 Дискретная двумерная случайная величина задана матрицей распределения (таблица 10.8).

Таблица 10.8

X	Y		
	0	2	3
1	0,1	0,15	p_{13}
4	0,2	0,3	0,1

Найти неизвестное значение вероятности p_{13}, законы распределения составляющих X и Y, функцию распределения $F(x, y)$.

6 Непрерывная двумерная случайная величина задана двумерной плотностью распределения $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} \text{ при } x^2+y^2\le 1;\\ 0 \text{ при } x^2+y^2>1.\end{cases}$

Найти законы распределения составляющих X и Y и вероятность попадания случайной точки (X,Y) в круг $X^2+Y^2<\dfrac{1}{9}$.

7 Найти дифференциальную функцию $f(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) по известной интегральной функции

$$F(x,y)=\sin x\cdot\sin y \qquad \left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

11 Числовые характеристики системы двух случайных величин

Пусть система двух дискретных случайных величин задана матрицей распределения (таблица 11.1).

Таблица 11.1

X	Y						
	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m	Σ
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	…	$p(x_1,y_j)$	…	$p(x_1,y_m)$	p_1
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_2,y_j)$	…	$p(x_2,y_m)$	p_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p(x_i,y_1)$	$p(x_i,y_2)$	…	$p(x_i,y_j)$	…	$p(x_i,y_m)$	p_i
…	…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p(x_n,y_1)$	$p(x_n,y_2)$	…	$p(x_n,y_j)$	…	$p(x_n,y_m)$	p_n
Σ	q_1	q_2	…	q_j	…	q_m	1

Тогда ***математические ожидания*** и ***дисперсии*** составляющих случайных величин

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right);$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(x_i-M(X)\right)^2\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\left(y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right);$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M(Y)\right)^2 p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\left(\left(y_j-M(Y)\right)^2\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(y_j^2\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)-\left(M(Y)\right)^2.$$

Если система двух непрерывных случайных величин задана плотностью вероятностей $f(x, y)$, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy,\ M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dxdy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dxdy-\left(M(X)\right)^2;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M(Y)\right)^2 f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy-\left(M(Y)\right)^2.$$

Корреляционным моментом μ_{XY} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин:

$$\mu_{XY}=M\Big(\big(X-M(X)\big)\big(Y-M(Y)\big)\Big)=M(XY)-M(X)\cdot M(Y).$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}-M(X)\cdot M(Y),$$

а для непрерывных величин – формулу

$$\mu_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x-M(X)\big)\big(y-M(Y)\big)f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dxdy-M(X)M(Y).$$

Коэффициентом корреляции r_{XY} величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{XY}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y};\quad |r_{XY}|\le 1.$$

Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Для независимых случайных величин выполняются следующие свойства:

1) $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$;

2) $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Корреляционный момент μ_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY} служат для характеристики связи между величинами X и Y. Если X и Y независимы, то корреляционный момент равен нулю. Обратное верно не всегда: если $\mu_{XY}=0$, то не всегда X и Y независимы.

Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между X и Y. Если между случайными величинами существует строгая функциональная линейная зависимость $Y = aX + b$, то $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ и $r_{XY} = -1$ при $a < 0$, причем чем ближе абсолютная величина r_{XY} к единице, тем линейная связь сильнее. Если $r_{XY} = 0$, это означает только отсутствие линейной связи между случайными величинами. Любой другой вид связи при этом может присутствовать.

Примеры решения задач

Пример 1 – Матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X, Y) задана таблицей 11.2.

Таблица 11.2

X	Y		
	0	2	5
1	0,1	0,1	0,2
2	0,2	0,3	0,1

Найти числовые характеристики системы (X, Y).

Решение

$$M(X) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\left(x_i \sum_{j=1}^{3} p_{ij} \right) = x_1 \left(p_{11} + p_{12} + p_{13} \right) +$$

$$+ x_2 \left(p_{21} + p_{22} + p_{23} \right) = 1 \cdot \left(0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 \right) + 2 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 \right) = 1{,}6 .$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{3} y_j \sum_{i=1}^{2} p_{ij} = y_1 \left(p_{11} + p_{21} \right) + y_2 \left(p_{12} + p_{22} \right) + y_3 \left(p_{13} + p_{23} \right) =$$

$$= 0 \cdot \left(0{,}1 + 0{,}2 \right) + 2 \cdot \left(0{,}1 + 0{,}3 \right) + 5 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}1 \right) = 2{,}3 .$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i^2 p_{ij} - \left(M(X) \right)^2 = x_1^2 \left(p_{11} + p_{12} + p_{13} \right) +$$

$$+ x_2^2 \left(p_{21} + p_{22} + p_{23} \right) - \left(M(X) \right)^2 =$$

$$= 1^2 \cdot \left(0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 \right) + 2^2 \cdot \left(0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 \right) - \left(1{,}6 \right)^2 = 0{,}24 .$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}y_j^2 p_{ij}-\left(M(Y)\right)^2=y_j^2\left(p_{11}+p_{21}\right)+$$

$$+y_2^2\left(p_{12}+p_{22}\right)+y_3^2\left(p_{13}+p_{23}\right)-\left(M(Y)\right)^2=$$

$$=0^2\cdot\left(0{,}1+0{,}2\right)+2^2\cdot\left(0{,}1+0{,}3\right)+5^2\cdot\left(0{,}2+0{,}1\right)-\left(2{,}3\right)^2=3{,}81.$$

$$\mu_{XY}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}-M(X)\cdot M(Y)=x_1y_1p_{11}+x_1y_2p_{12}+x_1y_3p_{13}+$$

$$+x_2y_1p_{21}+x_2y_2p_{22}+x_2y_3p_{23}-M(X)\cdot M(Y)=$$

$$=1\cdot 0\cdot 0{,}1+1\cdot 2\cdot 0{,}1+1\cdot 5\cdot 0{,}2+2\cdot 0\cdot 0{,}2+2\cdot 2\cdot 0{,}3+2\cdot 5\cdot 0{,}1-1{,}6\cdot 2{,}3=$$

$$=3{,}4-3{,}68=-0{,}28.$$

Пример 2 – Пусть область D возможных значений двумерной случайной величины – треугольник с границами $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Плотность распределения имеет вид $f(x,y)=4\left(x+y^2\right)$. Найдем числовые характеристики системы.

Решение

$$M(X)=\iint_D x\cdot f(x,y)\,dxdy=4\int_0^1 x\cdot dx\int_0^{1-x}\left(x+y^2\right)dy=$$

$$=4\int_0 x\cdot dx\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}=4\int_0^1 x\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\frac{4}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}.$$

$$M(Y)=\iint_D y\cdot f(x,y)\,dxdy=4\int_0^1 ydy\int_0^{1-y}\left(x+y^2\right)dx=$$

$$=4\int_0^1 ydy\left(\frac{x^2}{2}+y^2x\right)\Bigg|_0^{1-y}=2\int_0^1\left(y-2y^2+3y^3-2y^4\right)dy=$$

$$=2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{2y^3}{3}+\frac{3y^4}{4}-\frac{2y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{11}{30}.$$

$$D(X)=\iint_D x^2 f(x,y)\,dxdy-\left(M(X)\right)^2=4\int_0^1 y^2dy\int_0^{1-y}\left(x+y^2\right)dx-\left(\frac{11}{30}\right)^2=\frac{59}{900}.$$

$$\mu_{XY} = \iint_D xyf(x,y)\,dxdy - M(X)\cdot M(Y) =$$

$$= \iint_D xy\left(x+y^2\right)dxdy - \frac{2}{5}\cdot\frac{11}{30} = \int_0^1 x\left(2x\left(1-x^2\right)+\left(1-x\right)^4\right)dx - \frac{22}{150} =$$

$$= \int_0^1 \left(x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x\right)dx - \frac{22}{150} = -\frac{7}{150}.$$

$$r_{XY} = -\frac{7}{150} : \sqrt{\frac{14}{225}\cdot\frac{59}{900}} \approx -0{,}73.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Закон распределения двумерной случайной величины задан таблицей 11.3.

Таблица 11.3

X	Y	
	0	2
0	0,15	0,25
1	0,2	0,15
2	0,05	0,2

Требуется:

а) определить закон распределения случайной компоненты X. Найти $M(X)$, $D(X)$;

б) проделать то же самое для компоненты Y;

в) найти коэффициент корреляции.

2 Бросаются две неразличимые игральные кости. Пусть X – сумма выпавших очков, а Y – разность между большим и меньших числом очков на костях.

Требуется:

а) построить двумерный ряд распределения;

б) определить математическое ожидание и дисперсию компонент;

в) найти коэффициент корреляции системы (X, Y).

3 Решить предыдущую задачу в предположении, что кости помеченные, а СВ Y – разность очков на костях.

4 Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям.

Найти:

а) двумерную плотность вероятности системы;

б) плотности распределения составляющих.

Показать, что СВ X и Y – независимы и $r_{XY} = 0$.

5 Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi} \text{ внутри эллипса } \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1; \\ 0 \text{ вне этого эллипса.} \end{cases}$$

Требуется:

а) найти плотности распределения составляющих и показать, что X и Y – зависимые;

б) найти корреляционный момент μ_{XY}.

Указание – Воспользоваться свойством определенного интеграла: если подынтегральная функция нечетна и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, то определенный интеграл равен нулю.

6 Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y): $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\sin(x+y)$ – в квадрате $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$; вне квадрата $f(x,y) = 0$. Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

7 Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) \text{ при } (x,y) \in D; \\ 0 \text{ при } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где D – треугольная область плоскости, координаты точек которой положительны, но лежат ниже прямой $x + y = 1$.

Определить:

а) нормировочный множитель k;

б) математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y;

в) коэффициент корреляции между X и Y;

г) вероятность события $X + Y < \dfrac{1}{2}$;

д) плотность распределения СВ X.

8 Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины

$$f(x,y) = \begin{cases} k \cdot x \cdot y \text{ при } (x,y) \in D; \\ 0 \text{ при } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$.

Определить:

а) нормировочный множитель k;

б) математические ожидания и дисперсии X и Y;

в) коэффициент корреляции между X и Y;

г) вероятность $P\left(X < \frac{a}{2}\right)$;

д) функцию распределения случайной величины Y.

Домашнее задание

1 Какие числовые характеристики можно найти, зная закон распределения двумерной случайной величины?

2 Что такое корреляционный момент случайных величин X и Y?

3 Что называется коэффициентом корреляции случайных величин X и Y?

4 Какие случайные величины называются независимыми?

5 Дискретная двумерная случайная величина задана матрицей распределения (таблица 11.4).

Таблица 11.4

X	Y		
	0	2	3
1	0,1	0,15	p_{13}
4	0,2	0,3	0,1

Найти неизвестное значение вероятности p_{13}, числовые характеристики составляющих X и Y, корреляционный момент и коэффициент корреляции.

6 Непрерывная двумерная случайная величина задана двумерной плотностью распределения $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \text{ при } x^2 + y^2 \le 1; \\ 0 \text{ при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

Найти числовые характеристики составляющих X и Y, корреляционный момент и коэффициент корреляции.

12 Условные законы распределения вероятностей и условные числовые характеристики составляющих двумерной случайной величины. Регрессия

Пусть составляющие X и Y дискретные и их возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Условным распределением составляющей X при $Y = y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1 \mid y_j)$, $p(x_2 \mid y_j)$, …, $p(x_n \mid y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей *Y*.

Условные вероятности вычисляются по формулам

$$p\left(x_i \mid y_j\right)=\frac{p\left(x_i, y_j\right)}{p\left(y_j\right)}; \qquad p\left(y_j \mid x_i\right)=\frac{p\left(x_i, y_j\right)}{p\left(x_i\right)}.$$

Пусть (*X*, *Y*) – непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $f(x, y)$.

Условной плотностью $\varphi(x, y)$ распределения составляющей X при заданном значении $Y=y$ называют

$$\varphi(x \mid y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx}.$$

Аналогично определяется условная плотность вероятности составляющей *Y* при заданном значении $X = x$:

$$\psi(y \mid x)=\frac{f(x, y)}{f_1(x)}=\frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy}.$$

Если *X* и *Y* – ***независимые*** случайные величины, то $f(x, y)=f_1(x) \cdot f_2(y)$, т. е. для независимых случайных величин условные плотности распределения вероятностей равны их безусловным плотностям $f_1(x)=\varphi(x \mid y)$, $f_2(y)=\psi(y \mid x)$.

Условным математическим ожиданием одной из случайных величин, входящих в систему (*X*, *Y*), называется ее математическое ожидание, вычисленное в предположении, что другая случайная величина приняла определенное значение, т. е. найденное на основе условного закона распределения.

Для дискретных случайных величин

$$M\left(Y \mid X=x_i\right)=\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p\left(y_j \mid x_i\right); \qquad M\left(X \mid Y=y_j\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p\left(x_i \mid y_j\right).$$

Для непрерывных величин

$$M(Y \mid X=x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \psi(y \mid x)\,dy; \qquad M(X \mid Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x \mid y)\,dx.$$

Условное математическое ожидание $M(Y \mid X=x)$ есть функция от *x*: $M(Y \mid X=x)=f(x)$, которую называют ***функцией регрессии*** *Y* на *X*. Аналогично функция регрессии *Y* на *X* – это функция $M(X \mid Y=y)=\varphi(y)$. Графики данных функций называются линиями регрессии или «кривыми регрессии».

Примеры решения задач

Пример 1 – Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y) (таблица 12.1).

Таблица 12.1

X	Y		
	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти:
а) условный закон распределения составляющей X при условии $Y = 0{,}4$;
б) условный закон распределения Y при условии $X = 5$.

Решение

Найдем условные вероятности:

а) $$P\left(X=2\,|\,Y=4\right)=\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\frac{3}{16};$$

$$P\left(X=5\,|\,Y=0{,}4\right)=\frac{0{,}3}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\frac{3}{8};$$

$$P\left(X=8\,|\,Y=0{,}4\right)=\frac{0{,}35}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\frac{7}{16}.$$

Искомый условный закон распределения X следующий (таблица 12.2).

Таблица 12.2

$X\|Y = 0{,}4$	2	5	8
$P(X\|Y = 0{,}4)$	3/16	3/6	7/16

б) $$P\left(Y=0{,}4\,|\,X=5\right)=\frac{0{,}3}{0{,}3+0{,}12}=\frac{5}{7};$$

$$P\left(Y=0{,}8\,|\,X=5\right)=\frac{0{,}12}{0{,}3+0{,}12}=\frac{2}{7}.$$

Условный закон распределения составляющей Y приведен в таблице 12.3.

Таблица 12.3

$Y\|X = 5$	0,4	0,8
$P(Y\|X = 5)$	5/7	2/7

Пример 2 **–** Двумерная дискретная случайная величина задана табличным законом распределения (таблица 12.4).

Таблица 12.4

X	Y		
	0	3	5
1	0	0,05	0,1
5	0,1	0,1	0,15
12	0,1	0,15	0,25

Построить линии регрессии Y на X.

Решение

Найдем условные законы Y при $X = 1$, $X = 5$ и $X = 12$.

$$P(Y=0\,|\,X=1)=\frac{0}{0+0{,}05+0{,}1}=0;$$

$$P(Y=3\,|\,X=1)=\frac{0{,}05}{0{,}15}=\frac{1}{3};\ P(Y=5\,|\,X=1)=\frac{0{,}1}{0{,}15}=\frac{2}{3}.$$

Условный закон распределения составляющей Y при $X = 1$ имеет следующий вид (таблица 12.5).

Таблица 12.5

Y	0	3	5
$P(Y\|X = 1)$	0	1/3	2/3

$$M(Y\,|\,X=1)=3\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{2}{3}=\frac{13}{3}. \qquad P(Y=0\,|\,X=5)=\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}1+0{,}15}=\frac{2}{7};$$

$$P(Y=3\,|\,X=5)=\frac{0{,}1}{0{,}35}=\frac{2}{7}; \qquad P(Y=5\,|\,X=5)=\frac{0{,}15}{0{,}35}=\frac{3}{7}.$$

Условный закон распределения составляющей Y при $X = 5$ имеет следующий вид (таблица 12.6).

Таблица 12.6

Y	0	3	5
$P(Y\|X = 5)$	2/7	2/7	3/7

$$M(Y\,|\,X=5)=3\cdot\frac{2}{7}+5\cdot\frac{3}{7}=3. \qquad P(Y=0\,|\,X=12)=\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}15+0{,}12}=\frac{2}{9};$$

$$P(Y=3\,|\,X=12)=\frac{0{,}15}{0{,}45}=\frac{1}{3};\ P(Y=5\,|\,X=12)=\frac{0{,}2}{0{,}45}=\frac{4}{9}.$$

Условный закон распределения составляющей Y при $X = 12$ имеет следующий вид (таблица 12.7).

Таблица 12.7

Y	0	3	5
$P(Y\|X = 12)$	2/9	1/3	2/9

$$M(Y \mid X = 12) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{9} = \frac{29}{9}.$$

Линия регрессии имеет следующий вид (рисунок 12.1).

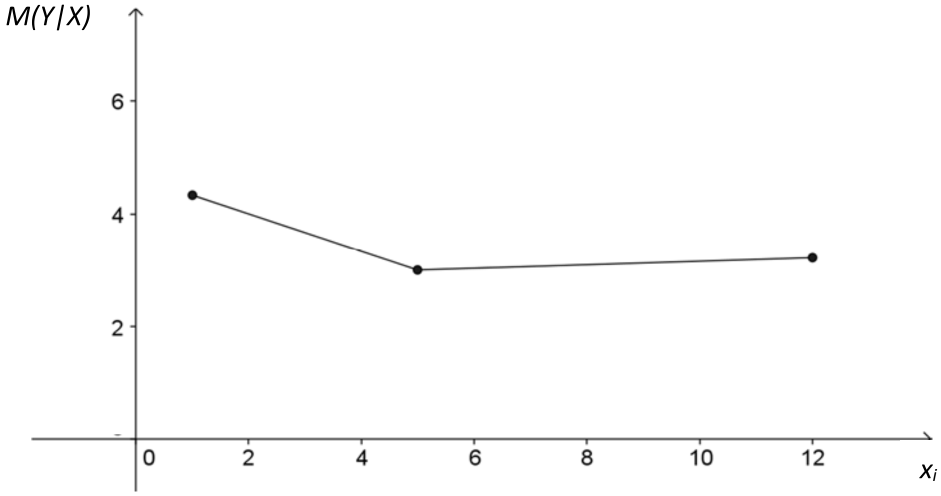

Рисунок 12.1

Пример 3 – Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) $f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{2}}$.

Найти:
а) плотности распределения составляющих;
б) условные плотности распределения составляющих.

Решение

Найдем плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2xy + 5y^2}{2}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{10}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{2}y + \sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2} d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y + \sqrt{\frac{2}{5}}x\right) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\right] = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} e^{-0{,}4x^2}.$$

Аналогично найдем плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}.$$

Найдем условные плотности распределения составляющих:

$$\varphi(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}e^{-2y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+2xy+y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}};$$

$$\psi(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{5\pi}}{\sqrt{2}e^{-0,5x^2}}=\sqrt{\frac{5}{2\pi}}e^{-0,1(x+5y)^2}.$$

Пример 4 – Задана плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ \text{при}\ (x,y)\in D;\\ 0\ \text{при}\ (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y): x\geq y, y\geq 0, x\leq 2\}$.

Найти линию регрессии СВ X на СВ Y.

Решение

Найдем условную плотность распределения X на Y (рисунок 12.2).

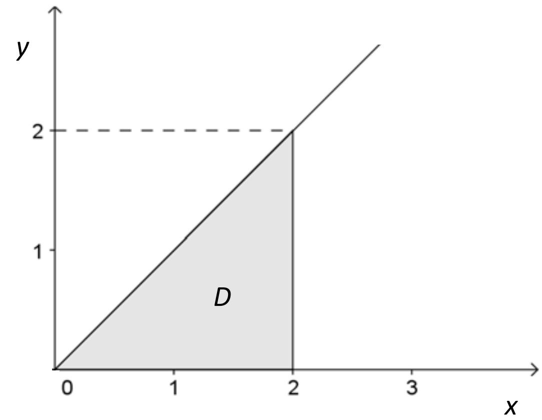

Рисунок 12.2

Из рисунка области D (см. рисунок 12.2) видно, что $0\leq y\leq 2$.

$$\varphi(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{2}:\left(\int_y^2\frac{1}{2}dx\right)=\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}x\right)\Big|_y^2=\frac{1}{2-y}.$$

$$M(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x\mid y)dx=\int_y^2\frac{xdx}{2-y}=\frac{1}{2-y}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_y^2=\frac{4-y^2}{2(2-y)}=\frac{2+y}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y) (таблица 12.8).

Таблица 12.8

X	Y	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти условный закон распределения Y при условии, что $X = 6$. Построить линию регрессии X на Y.

2 Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) равномерно распределена внутри прямоугольного треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(0,8)$, $B(8,0)$.

Найти двумерную плотность вероятности системы, плотности и условные плотности распределения составляющих.

3 Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) $f(x,y) = Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$.

Найти постоянный множитель C, плотность распределения составляющих, условные плотности распределения составляющих.

4 Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} \text{ при } x^2 + y^2 \le r^2; \\ 0 \text{ при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Найти условные законы распределения вероятностей составляющих.

5 Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y$ – в квадрате $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$; вне квадрата $f(x,y) = 0$. Доказать, что X и Y – независимые случайные величины. Найти линию регрессии Y на X.

6 Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины

$$f(x,y) = \begin{cases} 3(x+y) \text{ при } (x,y) \in D; \\ 0 \text{ при } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y) : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$.

Найти функцию регрессии X на Y.

Домашнее задание

1 Что называется условным распределением составляющей двумерной случайной величины?

2 Как вычисляются условные вероятности?

3 Что такое условная плотность распределения составляющей непрерывной двумерной случайной величины?

4 Что такое условное математическое ожидание и как оно связано с функцией регрессии между составляющими двумерной случайной величины?

5 Дискретная двумерная случайная величина задана матрицей распределения (таблица 12.9).

Таблица 12.9

X	Y		
	0	2	3
1	0,1	0,15	p_{13}
4	0,2	0,3	0,1

Найти неизвестное значение вероятности p_{13}, условные законы распределения составляющих, линию регрессии Y на X.

6 Непрерывная двумерная случайная величина задана двумерной плотностью распределения $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} \text{ при } x^2+y^2\le 1;\\ 0 \text{ при } x^2+y^2>1.\end{cases}$

Найти условные плотности вероятности составляющих X и Y, уравнение линии регрессии X на Y.

13 Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

Рассмотрим случайную величину X, имеющую дисперсию $DX=\sigma^2$. Дисперсия является показателем разброса X вокруг математического ожидания MX. Однако с точки зрения исследователя разброс естественнее характеризовать вероятностью $P(|X-MX|\ge\varepsilon)$ отклонения случайной величины X от MX на величину, большую некоторого заданного ε. Следующее неравенство позволяет оценить эту вероятность через дисперсию σ^2.

Неравенство Чебышева.

Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию $DX=\sigma^2$, при любом $\varepsilon>0$ справедливо неравенство $P(|X-MX|\ge\varepsilon)\le\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Ясно, что применять неравенство Чебышева имеет смысл только тогда, когда $\varepsilon > \sigma$; в противном случае оно даёт тривиальную оценку.

Рассмотрим теперь последовательность X_1, X_2, …, X_n, … независимых одинаково распределённых случайных величин. Скажем, что эта последовательность удовлетворяет *закону больших чисел*, если для некоторого a и любого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - a\right| \ge \varepsilon\right) = 0$. Иными словами, выполнение закона больших чисел отражает предельную устойчивость средних арифметических случайных величин: при большом числе испытаний они практически перестают быть случайными и с большой степенью достоверности могут быть предсказаны.

Теорема (закон больших чисел). Если последовательность X_1, X_2, …, X_n, … независимых одинаково распределённых случайных величин такова, что существуют $MX = m$ и $DX = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - m\right| \ge \varepsilon\right) = 0.$

Замечание – Доказательство данной теоремы выступает элементарным следствием неравенства Чебышева. Вообще говоря, существование дисперсии является достаточным, но не необходимым условием для выполнения закона больших чисел. Можно показать, что достаточным условием является существование математического ожидания, которое в этом случае выступает в качестве предельной постоянной *a*. Более того, существуют последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, даже не имеющих математического ожидания, но тем не менее удовлетворяющих закону больших чисел.

Если мы будем последовательно наблюдать случайные величины X_1, $\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, …, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, …, то закон больших чисел ещё не гарантирует, что $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ будет стремиться к a для любого элементарного исхода ω. Выделим элементарные исходы, для которых $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ не сходится к a, в отдельное событие A. Если при выполнении закона больших чисел вероятность события A равна нулю, то говорят, что для последовательности X_1, X_2, …, X_n, … выполнен *усиленный закон больших чисел*. Условие выполнения усиленного закона больших чисел содержится в следующей теореме, доказанной А. Н. Колмогоровым.

Теорема (усиленный закон больших чисел). Существование математического ожидания является необходимым и достаточным условием выполнения усиленного закона больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, …, X_n, … . Постоянная a в этом случае совпадает с математическим ожиданием MX_i.

Если от случайных величин X_i потребовать существования не только математического ожидания, но и дисперсии, то можно получить теорему, позволяющую описать предельное поведение распределений центрированных сумм $\sum_{i=1}^{n} X_i - nm = S_n - nm$.

Центральная предельная теорема. Пусть X_1, X_2, …, X_n, … – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин; $MX_i = m$; $DX_i = \sigma^2$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Центральная предельная теорема выявляет ту роль, которую играет нормальное распределение. Оно обычно возникает в явлениях, подверженных большому числу малых случайных воздействий. Уже само название «нормальный закон» объясняется тем широким распространением, которое он находит на практике в самых различных областях научных исследований.

Примеры решения задач

Пример 1 – Доказать неравенство Чебышева в форме

$$P\left(\left|X - MX\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Решение

Воспользовавшись тем, что события $\left|X - MX\right| < \varepsilon$ и $\left|X - MX\right| \ge \varepsilon$ – противоположные, при любом $\varepsilon > 0$ получаем

$$P\left(\left|X - MX\right| < \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|X - MX\right| \ge \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Пример 2 – Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна $0,05$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется:

а) меньше двух;

б) не меньше двух.

Решение:

а) обозначим через X дискретную случайную величину – число отказавших элементов за время T. Тогда

$$MX = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5,$$

$$DX = npq = 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475.$$

Воспользовавшись неравенством Чебышева при $\varepsilon = 2$, получим

$$P\left(\left|X - 0{,}5\right| < 2\right) \geq 1 - 0{,}475/4 = 0{,}88;$$

б) $P\left(\left|X - 0{,}5\right| \geq 2\right) < 1 - 0{,}88 = 0{,}12$.

Пример 3 – Вероятность появления события A в каждом испытании равна $1/2$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение

Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в 100 независимых испытаниях: $MX = np = 100 \cdot 1/2 = 50$; $DX = npq = 100 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 25$. Найдем максимальную разность между заданным числом появлений события и математическим ожиданием $MX = 50$: $\varepsilon = 60 - 50 = 10$. Воспользовавшись неравенством Чебышева при $\varepsilon = 10$, получим $P\left(\left|X - 50\right| < 10\right) \geq 1 - 25/10^2 = 0{,}75$.

Пример 4 – Дискретная случайная величина X принимает значения $0{,}3$ и $0{,}6$ с вероятностями $0{,}2$ и $0{,}8$ соответственно. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|X - MX\right| < 0{,}2$.

Решение

Найдём математическое ожидание и дисперсию величины X:

$$MX = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}54;$$

$$DX = MX^2 - \left(MX\right)^2 = \left(0{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}8\right) - 0{,}54^2 = 0{,}0144.$$

Воспользовавшись неравенством Чебышева при $\varepsilon = 0{,}2$, получим

$$P\left(\left|X - 0{,}54\right| < 0{,}2\right) \geq 1 - 0{,}0144/0{,}2^2 = 0{,}64.$$

Пример 5 – Рассмотрим схему Бернулли, состоящую из n экспериментов, и пусть случайная величина X_i – число успехов в i-м эксперименте. Применив к последовательности случайных величин X_1, X_2, …, X_n, … закон больших чисел и центральную предельную теорему, получить утверждения теоремы Бернулли и интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Решение

Случайная величина X_i принимает значения 0 и 1 с вероятностями $q = 1 - p$ и p соответственно. Число m успехов в схеме Бернулли, состоящей из n экспериментов, равно $\sum_{i=1}^{n} X_i$. Среднее арифметическое $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{m}{n}$ представляет собой частоту успехов в n экспериментах. Случайные величины X_1, X_2, …, X_n, … независимы и одинаково распределены, математическое ожидание $MX_i = p$, дисперсия $DX_i = pq$. Тогда, в силу закона больших чисел, для любого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ (теорема Бернулли), а в силу центральной предельной теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (интегральная теорема Муавра-Лапласа). Используя неравенство Чебышева и учитывая, что $M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n\right) = p$, $D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n\right) = \frac{pq}{n}$, получим также формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

или

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не меньше, чем на два средних квадратических отклонения. Ответ: меньше либо равно 0,25.

2 В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется:

а) меньше трех;

б) не меньше трех.

Ответ: а) больше либо равно 0,64; б) меньше либо равно 0,36.

3 Вероятность появления события в каждом испытании равна $1/4$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний. Ответ: больше либо равно 0,94.

4 Дискретная случайная величина X принимает значения $0,1$, $0,4$ и $0,6$ с вероятностями $0,2$, $0,3$ и $0,5$ соответственно. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - MX| < \sqrt{0,4}$. Ответ: больше либо равно 0,909.

5 Для правильной организации сборки узла необходимо оценить вероятность, с которой размеры деталей отклоняются от середины поля допуска не более чем на 2 мм. Известно, что середина поля допуска совпадает с математическим ожиданием размеров обрабатываемых деталей, а среднее квадратическое отклонение равно $0,25$ мм. Ответ: больше либо равно 0,984375.

6 Можно ли утверждать, ссылаясь на закон больших чисел, что при подбрасывании монеты достаточно большое количество раз число выпавших гербов и цифр будет примерно одинаковым?

7 Для определения потребности в жидком металле и сырье выборочно устанавливают средний вес отливки гильзы к автомобильному двигателю, так как вес отливки, рассчитанный по металлической модели, отличается от фактического веса. Сколько нужно взять отливок, чтобы с вероятностью более $0,9$ можно было утверждать, что средний вес отобранных отливок отличается от расчётного веса, принятого за математическое ожидание, не более чем на $0,2$ кг? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса равно $0,45$ кг. Ответ: больше 50.

8 Из 1000 изделий, отправляемых в сборочный цех, обследованию было подвергнуто 200 отобранных случайным образом изделий. Среди них оказалось 25 бракованных. Приняв долю бракованных изделий среди отобранных за вероятность изготовления бракованного изделия, оценить вероятность того, что во всей партии окажется бракованных изделий не более $15\,\%$ и не менее $10\,\%$. Ответ: больше либо равно 0,825.

9 Какое число подбрасываний симметричной монеты надо произвести, чтобы наблюденная частота выпадения герба отличалась от вероятности выпадения герба не более чем на $0,01$ с вероятностью $0,99$? Ответ: 16641.

10 Для определения скорости v движения объекта выполняется n измерений v_1, v_2, …, v_n, причём i-е измерение производится со случайной ошибкой δ_i (т. е. $v_i = v + \delta_i$). Предполагая, что ошибки измерений δ_i независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием $M\delta_i = 0$ (отсутствуют систематические ошибки наблюдений) и дисперсией $D\delta_i = \sigma^2$, оценить вероятность того, что средняя наблюденная скорость будет отличаться от истинной скорости v не более чем на ε.

11 Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна $0,7$.

Найти вероятность того, что событие появится:

а) не менее 1470 и не более 1500 раз;

б) не менее 1470 раз;

в) не более 1469 раз.

Ответ: а) $0,4236$; б) $0,5$; в) $0,5$.

12 Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна $0,5$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на $0,02$. Ответ: $0,7698$.

Список литературы

1 **Белько, И. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи : учебное пособие / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : Новое знание, 2007. – 251 с.

2 **Бочаров, П. П.** Теория вероятностей. Математическая статистика / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – Москва : Физматлит, 2005. – 296 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Задачи и упражнения по теории вероятностей : учебное пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Кнорус, 2016. – 496 с.

4 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Кнорус, 2016. – 480 с.

5 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. – Москва : Юрайт, 2017. – 404 с.

6 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. – Москва : Юрайт, 2017. – 479 с.

7 **Гурский, Е. И.** Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для втузов / Е. И. Гурский. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 223 с.

8 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика : учебное пособие для втузов в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1988. – Ч. 5. – 253 с.

9 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2015. – 287 с.

10 **Розанов, Ю. А.** Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика : учебник / Ю. А. Розанов. – Москва : Наука, 1985. – 320 с.

11 Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / Под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1992. – 189 с.

12 **Севастьянов, Б. А.** Сборник задач по теории вероятностей : учебное пособие для вузов / Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, А. М. Зубков. – Москва : Наука, 1980. – 224 с.