МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Могилев 2019

УДК 517
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» апреля 2019 г., протокол № 8

Составители: Л. И. Сотская; Е. Л. Старовойтова

Рецензент И. Д. Камчицкая

Даны задания для практических занятий по дисциплине «Определённые интегралы», а также приведены образцы решения примеров, перечень необходимой литературы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 105 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

1 Понятие определённого интеграла. Вычисление определённых интегралов

1.1 Теоретическая часть

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьем произвольным образом этот отрезок точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на n частичных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. Выберем на каждом из них точки ξ_i, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ (рисунок 1.1).

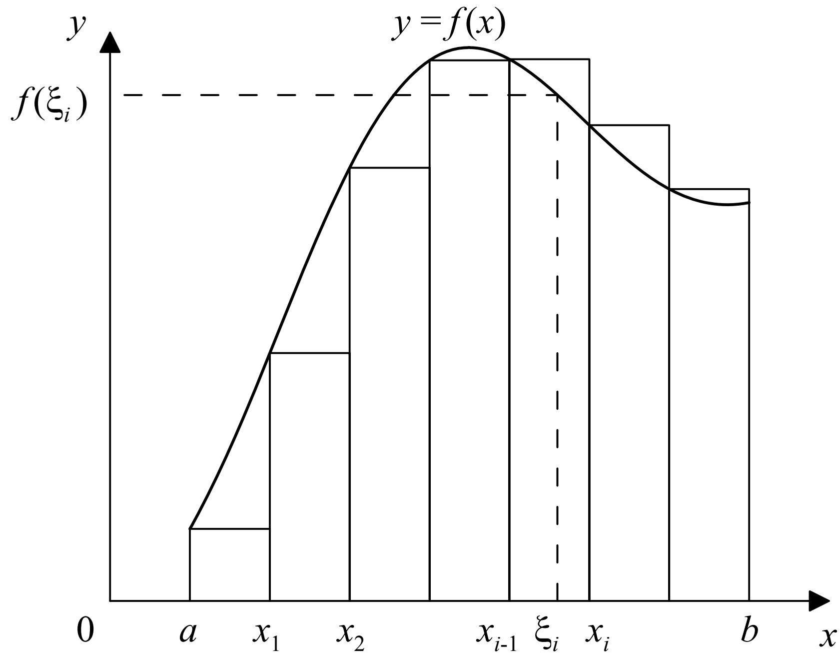

Рисунок 1.1

Сумма вида $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ называется n-й интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Геометрически сумма S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей прямоугольников, в основании которых лежат частичные отрезки длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а высоты их равны $f(\xi_i)$.

Предел интегральной суммы S_n, найденный при условии, что длина наибольшего частичного отрезка стремится к нулю, называется ***определённым интегралом*** от функции $y = f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, т. е. по определению $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Функция $y = f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением; $[a;b]$ – отрезком интегрирования, a – нижним, b – верхним пределом интегрирования.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$, т. е. предел интегральной суммы S_n существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки Δx_i, ни от выбора на них точек ξ_i.

Если $f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, то геометрически определённый интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью $0x$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. Эта фигура называется ***криволинейной трапецией***. В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на $[a;b]$ принимает значения разных знаков, определённый интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью $0x$ и под ней. Например, для функции, график которой изображён на рисунке 1.2, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3 .$$

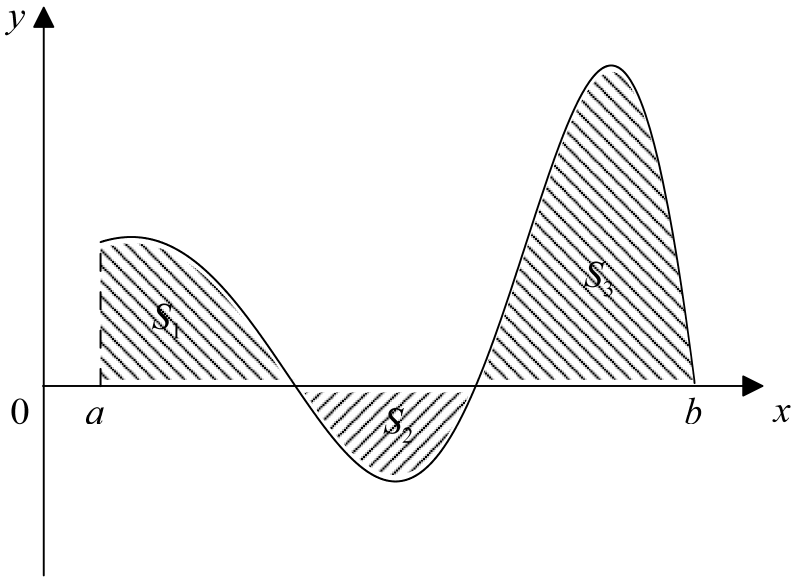

Рисунок 1.2

Перечислим основные свойства определённого интеграла:

– если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ интегрируемы на соответствующих отрезках, то

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx ;$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad (c = \text{const});$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx ;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

– если $f(x) \ge 0$ на $[a;b]$ и $a < b$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$;

– если $\varphi(x) \le f(x)$, $x \in [a;b]$, то $\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$;

– если $m = \min_{[a;b]} f(x)$, $M = \max_{[a;b]} f(x)$ и $a < b$, то

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b-a);$$

– если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка $x = c$, $a \le c \le b$, такая, что верно равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \le f(\mathrm{c}) \cdot (b-a);$$

– если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, то $\Phi'(x) = f(x)$, где $\Phi(x)$ – первообразная для $y = f(x)$. $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ – интеграл с переменным пределом;

– если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замечание: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \text{ – нечетная функция;} \\ 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ – четная функция.} \end{cases}$

1.2 Образцы решения примеров

1 Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 3(x-1)^2\,dx$.

Решение

$$\int_1^2 3(x-1)^2\,dx = 3 \cdot \int_1^2 (x-1)^2\,dx = 3 \cdot \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_1^2 = (x-1)^3\Big|_1^2 = (2-1)^3 - (1-1)^3 = 1.$$

2 Вычислить $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

Решение

$$\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\int\limits_0^8 \sqrt{2x}\,dx+\int\limits_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx=\sqrt{2}\int\limits_0^8 x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int\limits_0^8 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\sqrt{2}\cdot\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^8+\left.\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^8=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(8^{\frac{3}{2}}-0\right)+\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-0\right)=\frac{2\sqrt{2}\cdot 16\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{4}\cdot 16=\frac{64}{3}+\frac{48}{4}=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}.$$

3 Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$.

Решение

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

4 Вычислить $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\limits_{-1}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^{0}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

5 Вычислить $\int\limits_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx$.

Решение

Раскладываем подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{2x-1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+1\right)};$$

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & C=2, \\ x^0 & A=-1. \end{array}$$

Откуда $A=-1,\ B=1,\ C=2$.

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = -\int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = -\int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\cdot\int_1^2 \frac{2x\,dx}{x^2+1} + 2\int_1^2 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \left(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 2\,\mathrm{arctgx}\right)\Bigg|_1^2 = -\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 + 2\,\mathrm{arctg}\,2 -$$

$$-2\,\mathrm{arctg}\,1 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \ln 2 + 2\,\mathrm{arctg}\,2 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \ln\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + 2\,\mathrm{arctg}\,2 - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}38.$$

6 Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 3(x-1)^2\,dx$.

Решение

$$\int_1^2 3(x-1)^2\,dx = 3\cdot\int_1^2 (x-1)^2\,dx = 3\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_1^2 = (x-1)^3\Big|_1^2 = (2-1)^3 - (1-1)^3 = 1.$$

1.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить определённые интегралы:

1) $\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4}\right)dx$. Ответ: $\frac{21}{4}$;

2) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$. Ответ: $\frac{14}{3}$;

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Ответ: $\mathrm{arctg}\,3 - \mathrm{arctg}\,2 \approx 0{,}14$;

4) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$. Ответ: 2;

5) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$;

6) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$. Ответ: $\frac{4-\pi}{4}$;

7) $\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{1+x^2}\cdot x\cdot dx$. Ответ: $\frac{45}{8}$;

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$. Ответ: $\frac{2}{3}$;

9) $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$. Ответ: $\sqrt{5}-1$;

10) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$. Ответ: $1{,}5$;

11) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$. Ответ: 1;

12) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$. Ответ: $e-\sqrt{e}$;

13) $\int_0^3 f(x)\,dx$, если $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{при } 0\le x\le 1, \\ 2x+4 & \text{при } 1< x\le 3. \end{cases}$

Ответ: 17;

14) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

1.4 Домашнее задание

Вычислить определённые интегралы:

1) $\int_0^{0,5} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{3}$;

3) $\int_3^8 \sqrt{x+1}\,dx$. Ответ: $\frac{38}{3}$;

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} 3x\,dx$. Ответ: 0;

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot \sin x\,dx$. Ответ: $0{,}25$;

6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$. Ответ: $0{,}5$;

7) $\int_0^1 x^3\cdot\sqrt{5x^4+4}\,dx$. Ответ: $\frac{19}{30}$;

8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Ответ: $\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right)$.

2 Замена переменной в определённом интеграле. Интегрирование по частям

2.1 Теоретическая часть

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем для любого $t \in [\alpha;\beta]$ $\varphi(t) \in [a;b]$. Тогда если $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\,dt. \qquad (2.1)$$

Это ***формула замены переменной*** для определенного интеграла.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрез ке $[\,a\,;b\,]$. Тогда справедлива ***формула интегрирования по частям***

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

2.2 Образцы решения примеров

1 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение

Применим подстановку $t = \sqrt{1+x}$. Тогда $x + 1 = t^2$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$. При $x = 3$ $t = 2$, а при $x = 8$ $t = 3$.

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2t\,dt}{t} = 2\cdot\int_2^3 (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{27}{3} - 3\right) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) =$$

$$= 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = 12 - \frac{16}{3} + 4 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}.$$

2 Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$.

Решение

Применим подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Отсюда $x = 2\cdot\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. При $x = 0$ $t = 0$, при $x = \frac{\pi}{2}$ $t = 1$. Тогда имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{(1+t^2)\cdot\left(\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}+3\right)} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{2-2t^2+3+3t^2} = 2\cdot\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3 Вычислить $\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение

Применим подстановку $x=\sin t$. Тогда $dx=\cos t\,dt$. При $x=0$ $t=0$, при $x=1$ $t=\frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-\frac{1}{8}\left(0-\frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{16}.$$

4 Вычислить среднее значение функции $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ в интервале $(1;4)$.

Решение

Применим теорему о среднем: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$. Тогда $f(\mathrm{c}) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.

$$f(\mathrm{c}) = \frac{1}{4-1}\cdot\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{4}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot 8+4-\frac{2}{3}-2\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{14}{3}+2\right) = \frac{20}{9}.$$

5 Вычислить $\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=\cos x\,dx,\\ du=dx, & v=\sin x.\end{vmatrix}=x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=$$

$$=x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_0^{\pi}=\pi\cdot\sin\pi+\cos\pi-\cos 0-=-1-1=-2.$$

6 Вычислить $\int_1^e x\cdot\ln^2 x\,dx$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_1^e x\cdot\ln^2 x\,dx=\begin{vmatrix} u=\ln^2 x, & dv=x\,dx\\ du=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot dx, & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\ln x\,dx=\frac{e^2}{2}\cdot\ln^2 e-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\ln^2 1-\int_1^e x\cdot\ln x\,dx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & dv=x\,dx\\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{2}\cdot\ln e-\frac{1}{2}\cdot\ln 1-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{1}{4}(e^2-1).$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить определённые интегралы:

1) $\int_1^4 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4x+2}}$. Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$;

2) $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. Ответ: $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$;

3) $\int_1^3 \dfrac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+5x+1}}$. Ответ: $\ln\left(\dfrac{7+2\sqrt{7}}{9}\right)$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$. Ответ: $\dfrac{2}{3}$;

5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{1+2\cdot\sin^2 x}$. Ответ: $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$;

6) $\int_0^4 \dfrac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. Ответ: $2-\ln 2$;

7) $\int\limits_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$. Ответ: $3+4\ln 2$;

8) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}$. Ответ: 2;

9) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cdot\cos 2x\,dx$. Ответ: $\frac{\pi^2-8}{32}$;

10) $\int\limits_1^2 x\cdot\ln x\,dx$. Ответ: $2\ln 2-0,75$;

11) $\int\limits_0^1 x\cdot\operatorname{arc\,tg} x\,dx$. Ответ: $\frac{\pi-2}{4}$;

12) $\int\limits_{-3}^0 (x-2)\cdot e^{-\frac{x}{3}}\,dx$. Ответ: $-3-6e$;

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}$. Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$;

14) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. Ответ: $\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}$;

15) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{25-x^2}}$. Ответ: $0,5\cdot\ln 1,5$;

16) найти средние значения функций $f(x)=\sin x$ и $\varphi(x)=\sin^2 x$ для $x\in[0;\pi]$. Ответы: $\frac{2}{\pi}$; $0,5$.

2.4 Домашнее задание

Вычислить определённые интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx$. Ответ: $\frac{e-2}{e}$;

2) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$. Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}$;

3) $\int\limits_0^4 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$. Ответ: 4π;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx$. Ответ: $\frac{1-\ln 2}{2}$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$. Ответ: $\ln\frac{9}{8}$;

6) $\int\limits_0^{0,5} \arcsin x\,dx$. Ответ: $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$;

7) $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$. Ответ: $6-\frac{3\pi}{2}+6\,\mathrm{arctg}\,2$;

8) $\int\limits_0^2 x\cdot e^{x^2}\,dx$. Ответ: $0,5\left(e^4-1\right)$;

9) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$. Ответ: $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$;

10) найти среднее значение функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ для $x\in[0;1]$. Ответ: $\sqrt{2}-1$.

3 Геометрические приложения определённого интеграла

3.1 Теоретическая часть

Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$ для $x\in[a;b]$), прямыми $x=a$, $x=b$ и осью $0x$ (рисунок 3.1), выражается интегралом

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, непрерывной кривой $x=g(y)$ ($g(y)\geq 0$ для $y\in[c;d]$) и осью $0y$ (рисунок 3.2), выражается интегралом

$$S=\int\limits_c^d g(y)\,dy. \tag{3.2}$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\leq f_2(x)$ для $x\in[a;b]$) (рисунок 3.3), вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b \left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx. \tag{3.3}$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$ и двумя непрерывными кривыми $x=g_1(y)$ и $x=g_2(y)$ ($g_1(y)\le g_2(y)$ для $y\in[c;d]$), осью $0y$ (рисунок 3.4), вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d\left[g_2(y)-g_1(y)\right]dy. \tag{3.4}$$

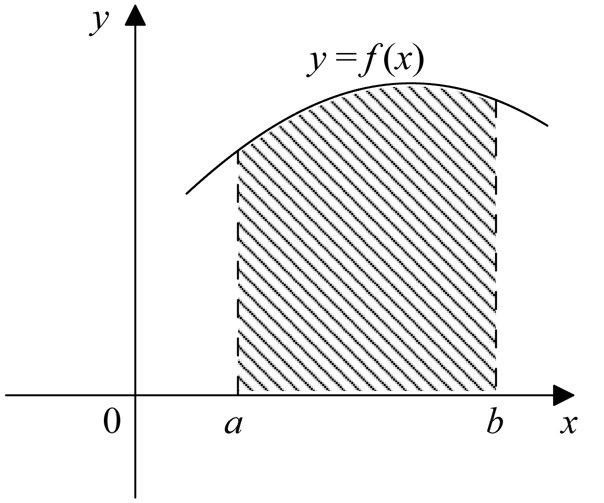

Рисунок 3.1

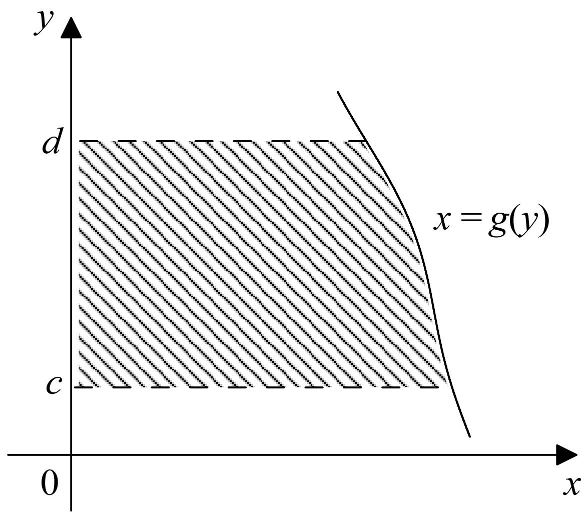

Рисунок 3.2

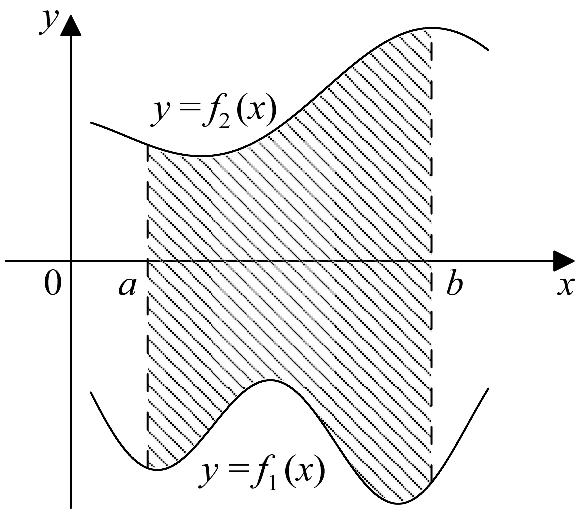

Рисунок 3.3

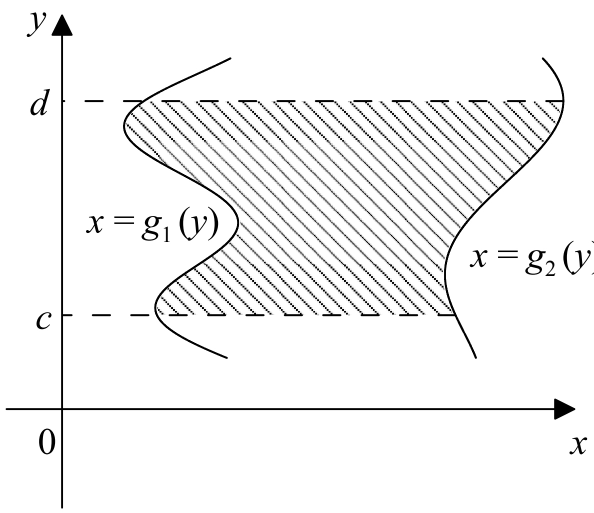

Рисунок 3.4

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$) (риснок 3.5), вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{3.5}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью $0x$ и кривой, вычисляется по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt\,, \tag{3.6}$$

где $x(\alpha) = a$, $y(\beta) = b$ ($y(t) \ge 0$ для $t \in [\alpha;\beta]$).

Вычисление объемов тел вращения.

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси $0x$ (рисунок 3.6), то объём тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\,. \tag{3.7}$$

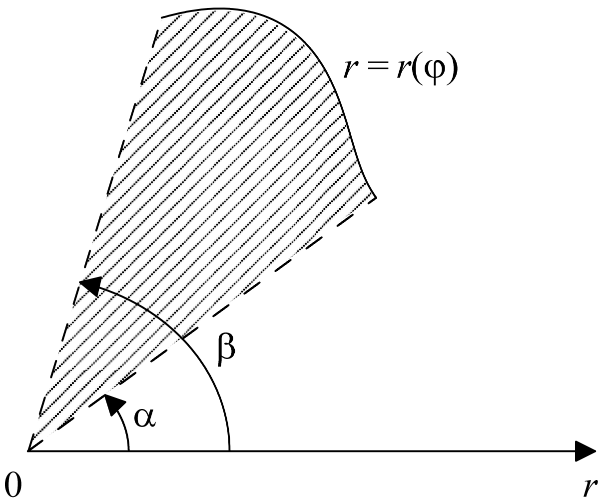

Рисунок 3.5

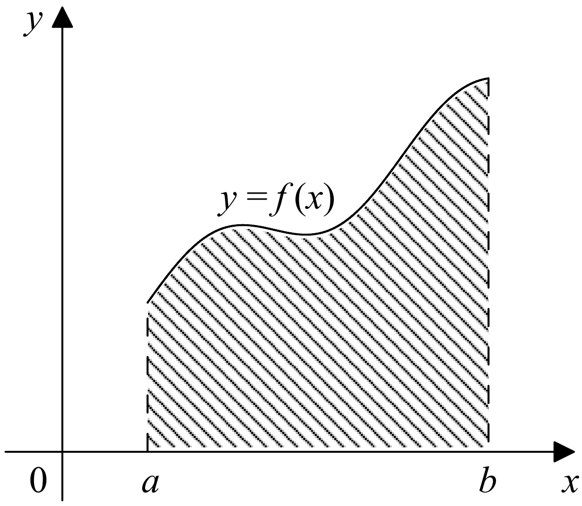

Рисунок 3.6

Если фигура, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($0 \le f_1(x) \le f_2(x)$ для $x \in [a;b]$) (рисунок 3.7), вращается вокруг оси $0x$, то объём тела находится по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx\,. \tag{3.8}$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = c$, $y = d$, непрерывной кривой $x = g(y)$ и отрезком оси $0y$ (рисунок 3.8), вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy\,. \tag{3.9}$$

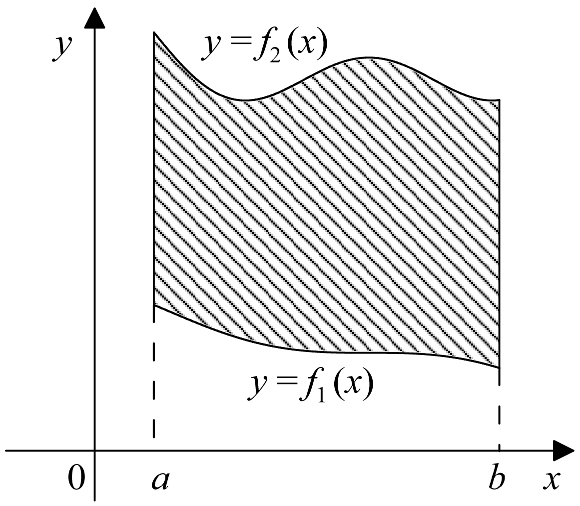

Рисунок 3.7

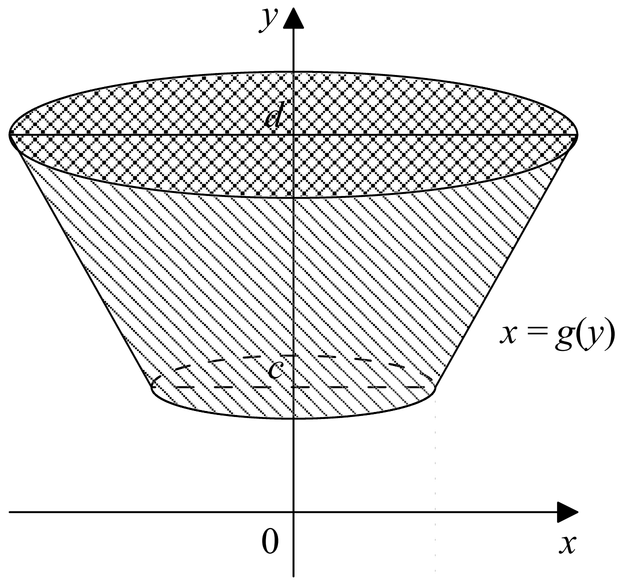

Рисунок 3.8

Если фигура, ограниченная прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ $(0 \le g_1(y) \le g_2(y)$ для $y \in [c;d])$, вращается вокруг оси $0y$, то объём тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d \left[g_2^2(y) - g_1^2(y) \right] dy. \tag{3.10}$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объём тела вращения выражается интегралом

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \cdot \sin\varphi \, d\varphi. \tag{3.11}$$

Вычисление дуги кривой.

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$ на $[a;b]$ и функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную на $[a;b]$, то длина дуги кривой, содержащейся между точками $x = a$, $x = b$, определяется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx. \tag{3.12}$$

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$ на $[c;d]$ и функция $x = g(y)$ имеет непрерывную производную на $[c;d]$, то длина дуги кривой находится по формуле

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2} \, dy. \tag{3.13}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [t_1;t_2]$, где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные дифференцируемые функции, то длина дуги кривой находится по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt. \tag{3.14}$$

Если задано полярное уравнение кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, где производная $r'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi. \tag{3.15}$$

Вычисление площади поверхности тела вращения.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $0x$ дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \tag{3.16}$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $0x$ дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$, вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt. \tag{3.17}$$

Площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin\varphi \cdot \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi. \tag{3.18}$$

3.2 Образцы решения примеров

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$ и $y = x^2$.

Решение

Найдём точки пересечения кривых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2; \end{cases} \quad x^2 = 2 - x^2; \quad 2x^2 = 2, \quad x^2 = 1; \quad \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Площадь фигуры (рисунок 3.9) находим по формуле (3.3):

$$S=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)\,dx=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)\,dx=\left(2x-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(2-\frac{2}{3}\right)-\left(-2+\frac{2}{3}\right)=$$

$$=2-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}=4-\frac{4}{3}=\frac{12-4}{3}=\frac{8}{3}\ \text{(ед. площади).}$$

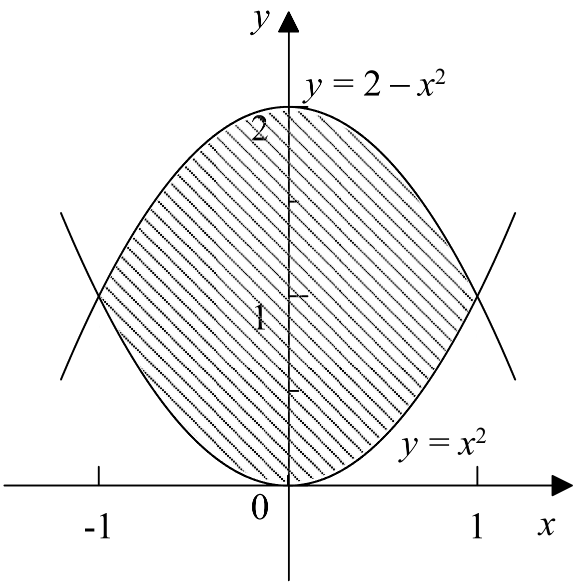

Рисунок 3.9

2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью $0x$ и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$$

Решение

Площадь фигуры (рисунок 3.10) найдём по формуле (3.5). Если $x=0$, то $t=0$; если $x=2\pi a$, то $t=2\pi$. Отсюда

$$S=\int_{0}^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=a^2\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos t)\,dt+a^2\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=a^2\,(t-2\sin t)\Big|_{0}^{2\pi}+\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=$$

$$=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2\quad\text{(ед. площади).}$$

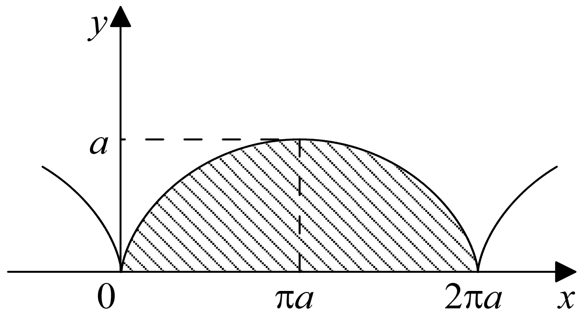

Рисунок 3.10

3 Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.

Решение

При вычислении объёмов тел вращения нет необходимости изображать сами тела; достаточно построить фигуры (см. рисунок 3.11), которые вращаются. $y = \dfrac{x^2}{2}$ – парабола; $2x + 2y - 3 = 0$ – прямая.

Найдем пределы интегрирования, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y = x^2, \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = x^2, \\ 2y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0, \\ y = \dfrac{3 - 2x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_1 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

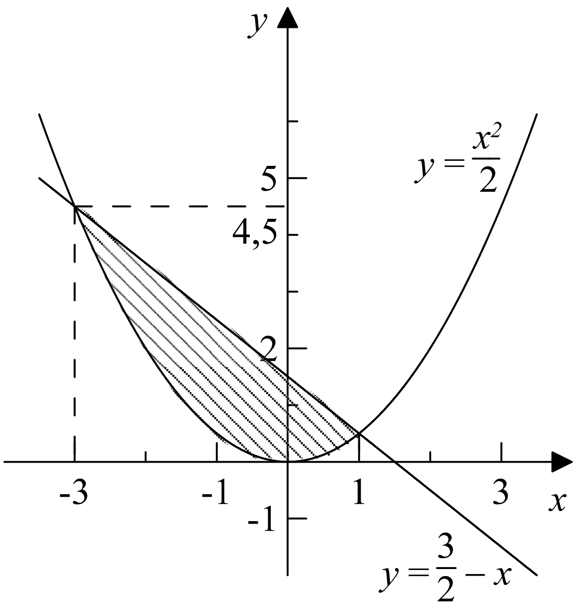

Рисунок 3.11

Применим формулу (3.8):

$$V_x = \pi\int_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}-x\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]dx = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{9}{4}-3x+x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{9}{4}x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \pi\cdot\left[\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{20}\right)-\left(\frac{-27}{4}-\frac{27}{2}-9+\frac{243}{20}\right)\right]=$$

$$=18\frac{2}{15}\pi \text{ (ед. объёма).}$$

4 Найти длину кардиоиды $r = a(1-\cos\varphi)$.

Решение

Применим формулу (3.15), где $r' = a\cdot\sin\varphi$.

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi = a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a\cdot\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a(\cos\pi-\cos 0) = -4a(-1-1) = 8a \text{ (ед. длины).}$$

5 Найти площадь поверхности вращения, полученной вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4ax$, $x = 0$, $x = 3a$, вокруг оси $0x$ (рисунок 3.12).

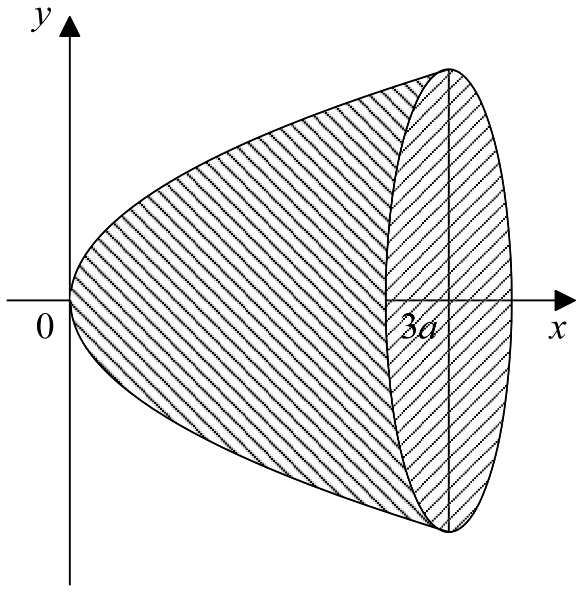

Рисунок 3.12

Решение

Применим формулу (3.16). $y = 2\sqrt{ax}$; $y' = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. Получим

$$S_x = 2\pi\int_0^{3a} 2\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2}\,dx = 4\pi\cdot\sqrt{a}\int_0^{3a}\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\cdot\sqrt{a}\int_0^{3a}(x+a)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 4\pi\sqrt{a}\cdot\left.\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{3a} = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left(4a\sqrt{4a} - a\sqrt{a}\right) = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\cdot 7a\sqrt{a} = \frac{56}{3}\pi a^2 \text{ (ед. площади).}$$

3.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = 6x - 7$. Ответ: $\dfrac{4}{3}$ ед. площади.

2 Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$. Ответ: $4{,}5$ ед. площади.

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Ответ: $8\ln 2$ ед. площади.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Ответ: $2a^2$ ед. площади.

5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cdot\cos^3 t$, $y = a\cdot\sin^3 t$. Ответ: $\dfrac{3\pi a^2}{8}$ ед. площади.

6 Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$:

а) вокруг оси $0x$;
б) вокруг оси $0y$.

Ответы: а) $\dfrac{128\pi}{7}$ ед. объёма; б) $\dfrac{64\pi}{5}$ ед. объёма.

7 Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси $0y$ фигуры, ограниченной линиями $y = x - x^2$ и $y = 0$. Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$ ед. объёма.

8 Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $x = 1$, $y = 0$. Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$ ед. объёма.

9 Найти длину дуги кривой $y=\ln\left(1-x^2\right)$ от $x_1=0$ до $x_2=\frac{1}{2}$. Ответ: $\ln 3-0{,}5$ ед. длины.

10 Найти длину дуги кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ от $y_1=1$ до $y_2=e$. Ответ: $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$ ед. длины.

11 Найти длину астроиды $\begin{cases} x=a\cdot\cos^3 t, \\ y=a\cdot\sin^3 t. \end{cases}$

Ответ: $6a$ ед. длины.

12 Найти длину гиперболической спирали $r=\frac{1}{\varphi}$ от $\varphi_1=\frac{3}{4}$ до $\varphi_2=\frac{4}{3}$. Ответ: $\left(\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}\right)$ ед. длины.

13 Найти площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси $0x$:

а) дуги кривой $y=0{,}5\sqrt{4x-1}$ от $x_1=1$ до $x_2=9$;

б) окружности $x^2+y^2=4$ $(y>0)$ от $x_1=-1$ до $x_2=1$;

в) кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси;

г) арки циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

Ответы: а) $\frac{104\pi}{3}$ ед. длины; б) 8π ед. длины; в) $\frac{32}{5}\pi a^2$ ед. длины; г) $\frac{32}{3}\pi a^2$ ед. длины.

14 Найти площадь поверхности тела, образованного при вращении лемнискаты $r^2=a^2\cdot\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси. Ответ: $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ ед. площади.

3.4 Домашнее задание

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2+6$ и $y=-5x$;

б) $y^2=2x+1$ и $x-y-1=0$.

Ответы: а) $\frac{1}{6}$ ед. площади; б) $\frac{16}{3}$ ед. площади.

2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1-\cos\varphi)$. Ответ: $\frac{3\pi a^2}{2}$ ед. площади.

3 Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси $0y$ фигуры,

ограниченной линиями $y = x^2$, $4x - y = 0$. Ответ: $\frac{20\pi}{3}$ ед. площади.

4 Найти объём тела, полученного при вращении вокруг оси $0x$ фигуры, лежащей в плоскости $x0y$ и ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$. Ответ: $\frac{3\pi}{10}$ ед. площади.

5 Найти длину эвольвенты окружности $\begin{cases} x = R(\cos t + t \cdot \sin t), \\ y = R(\sin t - t \cdot \cos t), \end{cases}$ где $t \in [0; \pi]$. Ответ: $\frac{\pi^2 R}{2}$ ед. длины.

6 Вычислить площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ дуги кривой $y^2 = x + 4$, отсечённой прямой $x = 2$. Ответ: $\frac{62}{3}\pi$ ед. площади.

4 Физические приложения определённого интеграла

4.1 Теоретическая часть

Вычисление пройденного пути по скорости.

Если $v = v(t)$ – скорость движения материальной точки вдоль некоторой прямой, то путь S, пройденный ею за промежуток времени $[t_1; t_2]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{4.1}$$

Вычисление работы переменной силы.

Пусть под действием силы $F(x)$ материальная точка движется вдоль прямой, параллельной оси $0x$. Работа силы на участке пути $[a;b]$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Вычисление силы давления жидкости на пластину.

Пусть пластина, погруженная вертикально в жидкость, ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$ и $x = b$. Тогда сила давления жидкости на пластину вычисляется по формуле

$$P = g\rho \cdot \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] x\,dx, \tag{4.3}$$

где g – ускорение свободного падения, $g \approx 9{,}8$ м/с^2;

ρ – плотность жидкости.

Вычисление статических моментов.

Пусть дана криволинейная трапеция (пластина), ограниченная линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Поверхностная плотность пластины постоянна и равна ρ. Тогда статические моменты плоской фигуры относительно осей координат $0x$ и $0y$ вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx; \tag{4.4}$$

$$M_y = \rho\int_a^b x\cdot f(x)\,dx. \tag{4.5}$$

Пусть дуга плоской материальной кривой задана уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, и имеет плотность $\rho = \rho(x)$. Тогда статические моменты относительно осей $0x$ и $0y$ вычисляются по формулам

$$M_x = \int_a^b \rho(x)\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx; \tag{4.6}$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x)\cdot x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{4.7}$$

Вычисление моментов инерции.

Моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, с плотностью $\rho = \rho(x)$ относительно осей $0x$ и $0y$

$$J_x = \int_a^b \rho(x)\cdot f^2(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx; \tag{4.8}$$

$$J_y = \int_a^b \rho(x)\cdot x^2\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx. \tag{4.9}$$

Момент инерции относительно оси $0x$ дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$, вычисляется по формуле

$$J_x = \rho\cdot\int_\alpha^\beta y^2(t)\cdot\sqrt{\left(x'_y\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt. \tag{4.10}$$

Вычисление координат центра масс.

Координаты центра масс дуги плоской кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$, с плотностью $\rho = \rho(x)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{M}; \qquad y_c = \frac{M_x}{M}, \tag{4.11}$$

массу дуги M находят по формуле

$$M = \int_a^b \rho(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{4.12}$$

или

$$M = \int_a^b \rho(t) \cdot \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, \tag{4.13}$$

если кривая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$. Координаты центра масс плоской пластины также вычисляют по формулам (4.11), но здесь

$$M = \rho \cdot \int_a^b f(x)\, dx. \tag{4.14}$$

4.2 Образцы решения примеров

1 Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t)$, м/с; $v(t) = \left(3t^2 + 2t + 1\right)$. Найти расстояние, пройденное точкой за промежуток времени $[0;3]$.

Решение

Согласно формуле (4.1) имеем

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 2t + 1)\, dt = \left(t^3 + t^2 + t\right)\Big|_0^3 = 27 + 9 + 3 = 39 \text{ м.}$$

2 Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которой находится на поверхности воды и равен 6 м. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Решение

Уравнение окружности с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R = 3$ имеет вид $x^2 + y^2 = 9$. Так как стенка (см. рисунок 4.1) имеет форму полукруга, то из формулы $x^2 + y^2 = 9$ выразим $y = \sqrt{9 - x^2}$. Применим формулу (4.3):

$$P = 2\int_0^3 \rho \cdot g \cdot x \cdot \sqrt{9-x^2}\,dx = 2\cdot 9{,}8\cdot 1000 \cdot \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\cdot x\,dx =$$

$$= 19600 \cdot \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]\Bigg|_0^3 = 176400 \text{ Н} = 176{,}4 \text{ кН}.$$

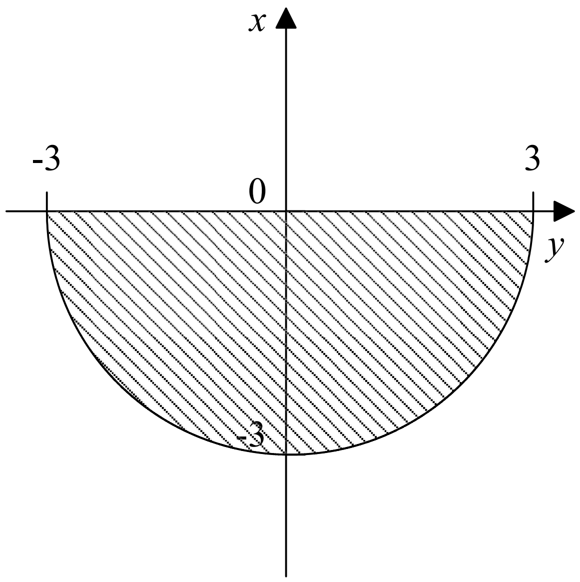

Рисунок 4.1

3 Найти статические моменты M_x, M_y и координаты центра тяжести треугольника, ограниченного прямыми $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$ $(\rho = 1)$.

Решение

Для нахождения координат центра тяжести треугольника (см. рисунок 4.2) применим формулы (4.4) и (4.5). Из условия следует, что $y = a - x$.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-x)^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{6};$$

$$M_y = \int_0^a x(a-x)\,dx = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}.$$

Применим формулу (4.14) и найдём массу треугольника:

$$M = \int_0^a (a-x)\,dx = \left(ax - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Координаты центра тяжести треугольника найдём по формулам (4.11):

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{a^3}{6} : \frac{a^2}{2} = \frac{a}{3}; \qquad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{a^3}{6} : \frac{a^2}{2} = \frac{a}{3}.$$

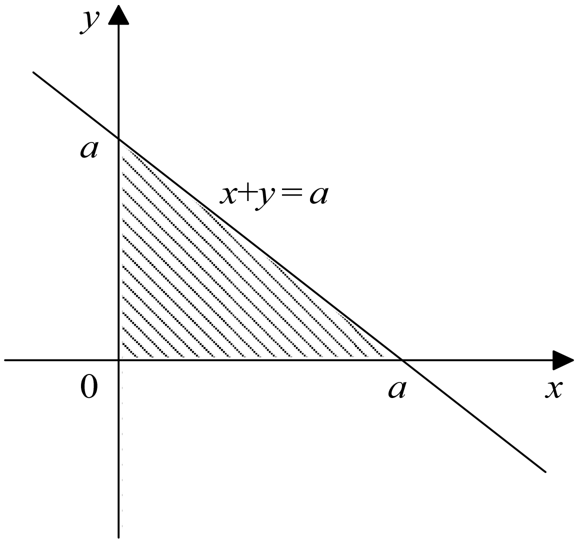

Рисунок 4.2

4 Найти координаты центра масс и момент инерции относительно оси $0x$ первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение

Центр масс однородной ($\rho(x) = \mathrm{const} = \rho$) дуги лежит на оси симметрии, поэтому $x_c = \pi a$. Координату y_c находим по формуле (4.11). Имеем

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \cdot \sin t.$$

При $t = 0 \quad x = 0$, при $t = 2\pi \quad x = 2\pi a$, поэтому получим

$$M_x = \rho \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a^2 \rho \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \cdot \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt =$$

$$= a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \rho \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}} dt = a^2 \sqrt{2} \cdot \rho \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 4a^2 \cdot \rho \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= -8 \cdot \rho \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = -8a^2 \cdot \rho \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -8a^2 \cdot \rho \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{32a^2\rho}{3}.$$

Найдём массу по формуле (4.13):

$$m = \rho \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a \cdot \rho \int \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2a \cdot \rho \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 4a \cdot \rho \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cdot \rho \cos \frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -4a \cdot \rho(-1-1) = 8a\rho.$$

$$y_c = \frac{4}{3}a.$$

Момент инерции найдём по формуле (4.8):

$$J_x = \rho\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a\sqrt{2-2\cos t}\,dt = \rho\cdot a^3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\,dt = \left[1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}\right] =$$

$$= \rho\cdot a^3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 4\sqrt{2}\sin^5\frac{t}{2}dt = \rho\cdot 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = -8\rho\cdot a^3\cdot 2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16a^3\rho\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos^2\frac{t}{2}+\cos^4\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16a^3\rho\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}+\frac{1}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -16a^3\rho\cdot\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{256}{15}a^3\rho.$$

5 Котёл имеет форму параболоида вращения. Радиус его основания $R = 3$ м, глубина $H = 5$ м. Котёл наполнен жидкостью, плотность которой $\rho = 0{,}8$ г/см^3. Найти работу по выкачиванию жидкости из котла.

Решение

Применим формулу $A = \int_a^b F(x)\,dx$. Сечение котла плоскостью $x0y$ есть парабола с уравнением $y = ax^2$, которому удовлетворяет точка $N(3;5)$. Имеем $5 = 9a$; $a = \frac{5}{9}$. Тогда уравнение данной параболы $y = \frac{5}{9}x^2$.

Разделим параболу (рисунок 4.3) на слои плоскостями, параллельными поверхности жидкости. Пусть толщина слоя на глубине $5-y$ равна dy. Слой можно приближенно считать цилиндром. Тогда его объём $dv = \pi x^2 dy$. Из уравнения параболы находим $x^2 = \frac{9}{5}y$. Тогда $dv = \pi\frac{9}{5}y dy$. Масса слоя жидкости $dm = \rho\cdot dv = \frac{9}{5}y\cdot\pi\rho\,dy$.

Работа по выкачиванию жидкости, которая состоит в том, что надо поднять все слои жидкости на высоту $5-y$,

$$A = \int_0^5 \frac{9}{5}\pi\rho g(5-y)\,y\,dy = \frac{9}{5}\pi\rho g\int_0^5(5y-y^2)\,dy = \frac{9}{5}\pi\rho g\left(\frac{5y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 =$$

$$= \frac{9}{5}\pi\rho g\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right) = \frac{9}{5}\pi\rho g\cdot\frac{125}{6} = \frac{75}{2}\pi\rho g.$$

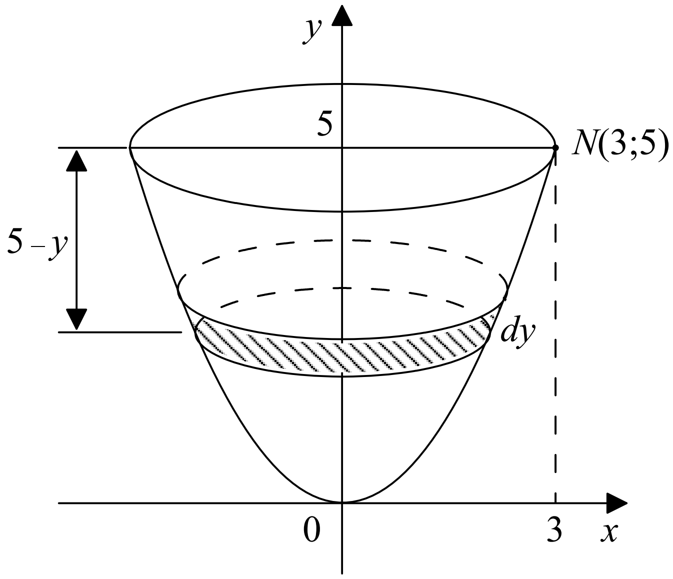

Рисунок 4.3

По условию $\rho = 0{,}8$ г/см^3, $g = 9{,}8$ м/с^2. Подставив эти значения в последнюю формулу, получим

$$A = \frac{75}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 800 \cdot 9{,}8 \approx 294300 \text{ Дж.}$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2$, $y = 2$. Ответ: $x_c = 0$, $y_c = 3{,}6$.

2 Скорость прямолинейного движения материальной точки v, м/с; $v = t \cdot e^{-0{,}01t}$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки. Ответ: 10^4 м.

3 Вычислить силу давления воды на каждую из сторон прямоугольника, вертикально погруженного в воду, если известно, что его основание равно 8 м, высота 12 м, верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 5 м. Плотность воды $\rho = 1$ т/м^3. Ответ: $1056g \approx 10359{,}4$ кН.

4 Найти координаты центра масс однородной дуги астроиды $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$, расположенной в первом квадранте. Ответ: $x_c = \frac{2}{5}a$, $y_c = \frac{2}{5}a$.

5 Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом R м. Плотность воды $\rho = 1$ т/м^3. Ответ: $250\pi R^4 g$ Дж.

6 Найти статический момент дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте, относительно оси $0x$. Ответ: $\frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ (где ε – эксцент-

риситет эллипса).

7 Найти координаты центра масс однородной дуги полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и момент инерции полуокружности относительно оси $0x$. Ответ: $x_c=0$, $y_c=\dfrac{2R}{\pi}$, $J_x=\dfrac{\pi R^2}{2}$.

4.4 Домашнее задание

1 Скорость движения точки v, м/с, задана формулой $v=\sqrt{1+t}$. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с от начала движения. Ответ: 23,7 м.

2 Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила в 10 Н растягивает её на 1 см? Ответ: 1,8 Дж.

3 Найти статические моменты прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон ($\rho=1$). Ответ: $M_a=\dfrac{ab^2}{2}$, $M_b=\dfrac{a^2b}{2}$.

4 Найти момент инерции полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ относительно оси $0x$ ($\rho=1$). Ответ: $J_x=\dfrac{\pi R^2}{2}$.

5 Найти статические моменты относительно осей $0x$ и $0y$ и координаты центра тяжести фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и отрезком оси $0x$ от точки $x=0$ до точки $x=\pi$ ($\rho=1$). Ответ: $M_x=\dfrac{\pi}{4}$, $M_y=\pi$, $x_c=\dfrac{\pi}{2}$, $y_c=\dfrac{\pi}{8}$.

5 Экономические приложения определённого интеграла

5.1 Теоретическая часть

Вычисление объёма выпускаемой продукции.

Если $f(t)$ – производительность труда в момент времени t, то объём выпускаемой продукции $Q(t_1;t_2)$, произведенной за промежуток времени $[t_1;t_2]$, равен определенному интегралу:

$$Q(t_1;t_2)=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \tag{5.1}$$

Учёт влияния различных факторов на изменение производительности производства возможен при использовании функций Кобба-Дугласа. В этом случае производительность труда $f(t)$ представляется в виде произведения:

$$f(t)=a_0A^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)K^{\gamma}(t),$$

где $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$ – величины затрат природных ресурсов, труда и капитала соответственно;

a_0 – общая продуктивность факторов;

α – технологический коэффициент;

β – коэффициент эластичности по труду;

γ – коэффициент эластичности по капиталу.

Например, равенство $f(t) = L^{0,73}(t) \cdot K^{0,27}(t)$ означает, что доля труда в производительности труда составляет 73 %, а доля капитала – 27 %.

Расчёт коэффициента Джини.

Пусть зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривая Лоренца) описывается кривой OBA на рисунке 5.1. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису OA. Степень неравенства в распределении доходов населения характеризуется коэффициентом Джини

$$K_G = \frac{S_{OBA}}{S_{\Delta OAC}}, \tag{5.2}$$

где S_{OBA} – площадь заштрихованной части между линией абсолютно равного распределения и линией фактического распределения (кривой Лоренца);

$S_{\Delta OAC}$ – площадь треугольника OAC; $S_{\Delta OAC} = 1/2$.

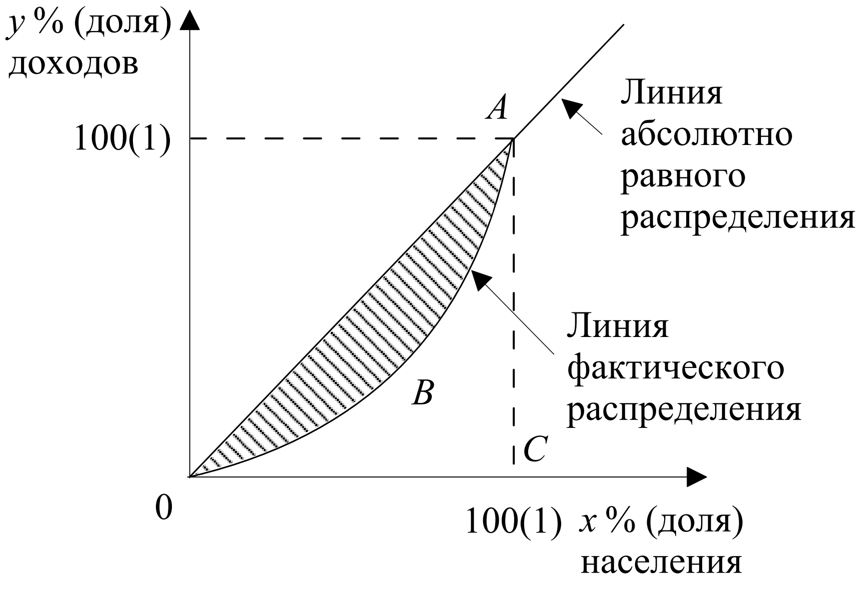

Рисунок 5.1

Дисконтирование денежных потоков.

Определение дисконтируемой (начальной) суммы K, так называемого дисконтированного дохода, по конечной величине K_t, полученной через время T, лет, при годовом проценте (процентной ставке) p, называется дисконтированием. Если поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной $i = \frac{p}{100}$, процент начисляется непрерывно, то дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt. \tag{5.3}$$

Вычисление среднего времени, затраченного на изготовление изделия.

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время t_{cp}, затраченное на изготовление изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx. \tag{5.4}$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, как правило, имеет вид:

$$t = ax^{-b},$$

где a – затраты времени на первое изделие;

b – показатель производственного процесса.

Вычисление выигрышей потребителей и поставщиков.

Пусть $p = f(x)$ – кривая спроса D на некоторый товар; $p = g(x)$ – кривая предложения S; p – цена на товар; x – величина спроса (предложения); $(x_0; p_0)$ – точка рыночного равновесия (см. рисунок 5.2).

Величина денежных средств

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 p_0 \tag{5.5}$$

сберегается потребителями, если предполагать продажу товара по равновесной цене p_0, поэтому C называется выигрышем потребителей. Аналогично величина

$$P = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx \tag{5.6}$$

называется выигрышем поставщиков. Величины C и P численно равны площадям соответствующих криволинейных треугольников (рисунок 5.2).

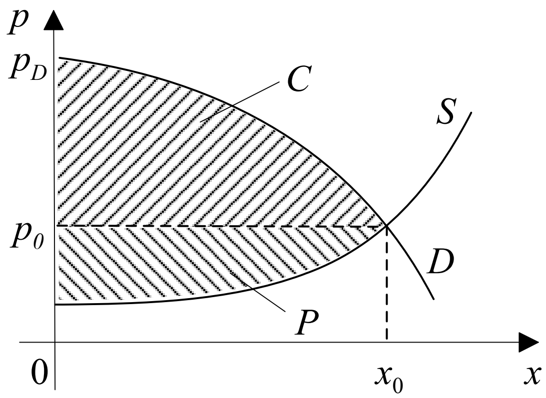

Рисунок 5.2

5.2 Образцы решения примеров

1 Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $f(t)=(1+t)e^{3t}$.

Решение

Для нахождения объема произведенной продукции Q применим формулу (5.1):

$$Q(0;4)=\int_0^4 (1+t)e^{3t}dt.$$

Используем метод интегрирования по частям:

$$\int_0^4 (1+t)e^{3t}dt=\left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu} \\ u=1+t & dv=e^{3t}dt \\ du=dt & v=\int e^{3t}dt=\frac{1}{3}e^{3t} \end{array}\right]=(1+t)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{1}{3}e^{3t}dt=$$

$$=(1+4)\frac{1}{3}e^{3\cdot4}-(1+0)\frac{1}{3}e^{3\cdot0}-\frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4=\frac{5}{3}e^{12}-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{9}e^{3\cdot4}-\frac{1}{9}e^{3\cdot0}\right)=$$

$$=\frac{5}{3}e^{12}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}e^{12}+\frac{1}{9}=\frac{14}{9}e^{12}-\frac{2}{9}\approx 2{,}53\cdot10^5 \text{ усл. ед.}$$

2 По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца OBA (см. рисунок 5.1) может быть описана уравнением $y=1-\sqrt{1-x^2}$ (где x – доля населения; y – доля доходов населения). Вычислить коэффициент Джини.

Решение

Для вычисления коэффициента Джини (см. рисунок 5.1) применим формулу (5.2):

$$K_G = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}\text{, т. к. } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

Площадь криволинейной трапеции находим по формуле (3.3):

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Поскольку

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \begin{vmatrix} x = \sin t, & t = \arcsin x, & a = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = \cos t \cdot dt, & & b = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \cdot dt == \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{4},$$

то

$$S_{OBAC} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Тогда коэффициент Джини

$$K_G = 1 - 2\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 1{,}57 - 1 \approx 0{,}57.$$

Достаточно высокое значение k показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

3 Определить дисконтированный доход за 3 года при ставке 8 %, если первоначальные капиталовложения составили 10 млн р. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн р.

Решение

Капиталовложения задаются формулой $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда по формуле (5.3) дисконтированная сумма

$$K=\int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}dt=\left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu} \\ & dv=e^{-0,08t}dt \\ u=10+t & v=\dfrac{1}{-0,08}e^{-0,08t}= \\ du=dt & =-12,5e^{-0,08t} \end{array}\right]=(-12,5)(10+t)\cdot e^{-0,08t}\Big|_0^3+$$

$$+\ 12,5\cdot\int_0^3 e^{-0,08t}dt=(-12,5)(13\cdot 0,786623-10)-12,5^2(0,786623-1)\approx 30,514 \text{ млн р.}$$

Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн р. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн р. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке.

4 Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1=100$ до $x_2=121$ изделий, полагая, что затраты времени на первое изделие $a=600$ мин, а показатель производственного процесса $b=0,5$.

Решение

Используя формулу (5.4), получаем

$$t_{cp}=\frac{1}{121-100}\int_{100}^{121}600x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{600}{21}2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121}=\frac{400}{7}\approx 57,2 \text{ мин.}$$

5 Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предложении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют следующий вид: $p=186-x^2$, $p=20+\dfrac{11}{6}x.$

Решение

Пусть $p=f(x)$ – кривая спроса D на некоторый товар, $p=g(x)$ – кривая предложения S; p – цена на товар; x – величина спроса (предложения). Для того чтобы найти точку рыночного равновесия $(x_0;p_0)$, надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} p=f(x), \\ p=g(x) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} p=186-x^2, \\ p=20+\dfrac{11}{6}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 20+\dfrac{11}{6}x=186-x^2, \\ p=20+\dfrac{11}{6}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 6x^2+11x-996=0, \\ p=20+\dfrac{11}{6}x. \end{cases}$$

Решая уравнение $6x^2-11x-996=0$, находим

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-4\cdot 6\cdot(-996)}}{12}=\frac{-11\pm 155}{12};$$

$$x_1=\frac{-11+155}{12}=12,\quad x_2=\frac{-11-155}{12}=-13,83.$$

Поскольку x – величина спроса (предложения) должна быть положительной, то точка равновесия $x_0=12$, $p_0=42$. Тогда, используя формулы (5.5) и (5.6), получаем

$$C=\int_0^{12}(186-x^2)dx-12\cdot 42=186x\Big|_0^{12}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{12}-504=1152\ \text{ден. ед.};$$

$$P=12\cdot 42-\int_0^{12}\left(20+\frac{11}{6}x\right)dx=504-20x\Big|_0^{12}-\frac{11}{6}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{12}=132\quad\text{ден. ед.}$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Производительность труда рабочего в течение дня задается функцией $f(t)=(-0{,}00625t^2+0{,}05t+0{,}5)$ ден. ед./ч (где t – время в часах от начала работы, $0\le t\le 8$). Найти функцию $u=u(t)$, выражающую объем продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

Ответ: $u(t)=-0{,}0020833t^3+0{,}025t^2+0{,}5t$, 4,53 ден. ед.

2 Стоимость перевозки 1 т груза на один километр (тариф перевозки) задается функцией $f(x)=\dfrac{10}{x+2}$ ден. ед./км. Определить затраты на перевозку одной тонны груза на расстояние 20 км. Ответ: 23,98 ден. ед.

3 Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $z=32-2^{-0,5t+5}$ (где t – время, мес.). Найти объем продукции, произведенной:

а) за первый месяц;

б) за третий месяц;

в) за шестой месяц;

г) за последний месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

Ответ: а) 4,95 усл. ед.; б) 18,48 усл. ед.; в) 27,22 усл. ед.; г) 31,4 усл. ед.

4 Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба-Дугласа $A(t)=e^t$, $L(t)=(t+1)^2$, $K(t)=(100-3t)^2$, $a_0=1$, $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0{,}5$ (где t – время, лет). Ответ: 64825 усл. ед.

5 По данным исследований о распределении доходов в одной из стран

кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \dfrac{x}{3-2x}$ (где $x \in [0;1]$). Вычислить коэффициент Джини K_G. Ответ: 0,352.

6 Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид: $p = 250 - x^2$, $p = \dfrac{1}{3}x + 20$. Ответ: 2250 ден. ед.; 37,5 ден. ед.

5.4 Домашнее задание

1 Определить объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности $f(t) = 11{,}3e^{-0{,}417t}$ (где t – время, ч). Ответ: 40 усл. ед.

2 Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 рабочих дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$ (где $1 \le t \le 8$, t – время, ч). Ответ: 42381 усл. ед.

3 При непрерывном производстве химического волокна производительность $f(t)$, т/ч, растёт с момента запуска 10 ч, а затем остается постоянной. Сколько волокна дает аппарат в первые сутки после запуска, если $f(t) = e^{\frac{t}{5}-1}$ при $t \in [0;10]$? Ответ: 11,392 т.

4 Найти объем выпуска продукции за четыре года, если в функции Кобба-Дугласа $A(t) = e^{3t}$, $L(t) = (t+1)$, $K(t) = 10$, $a_0 = \alpha = \beta = \gamma = 1$. Ответ: $2{,}529 \cdot 10^6$ усл. ед.

5 Кривые Лоренца распределения дохода в некоторых странах могут быть заданы уравнениями:

а) $y = 0{,}85x^2 + 0{,}15x$;

б) $y = 2^x - 1$;

в) $y = 0{,}7x^3 + 0{,}3x^2$.

Какую часть дохода получают 10 % наиболее низкооплачиваемого населения? Вычислить коэффициенты Джини для этих стран. Ответ: а) 0,0235; 0,283; б) 0,073; 0,114; в) 0,0037; 0,45.

6 Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70. Ответ: 341,3 ден. ед.

7 Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = \dfrac{100}{x+15}$. Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10. Ответ: 112,8 ден. ед.

8 Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид: $p = 240 - x^2$, $p = x^2 + 2x + 20$. Ответ: 667 ден. ед.; 767 ден. ед.

6 Несобственные интегралы

6.1 Теоретическая часть

Интегралы на бесконечном промежутке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ (рисунок 6.1).

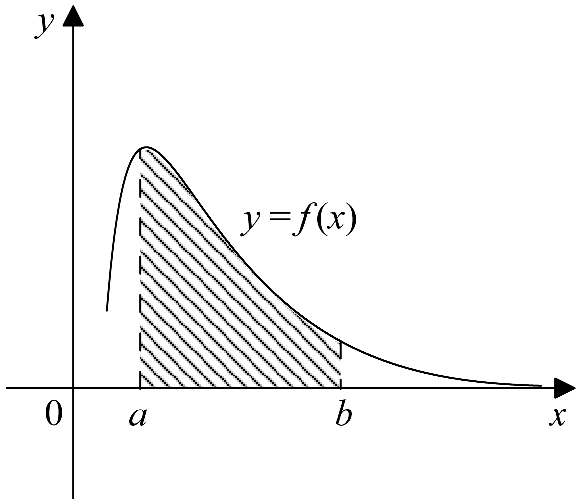

Рисунок 6.1

Тогда предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{6.1}$$

называется ***несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** или ***несобственным интегралом первого рода***. Если данный предел существует, то интеграл называется сходящимся; если же предел не существует, в частности, бесконечен, – расходящимся. Аналогично определяются несобственные ***интегралы с бесконечным нижним пределом*** и обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то интеграл (6.1) сходится ***абсолютно***.

Для установления сходимости интеграла (6.1) можно использовать следующие признаки сравнения:

1) если $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ для $\forall x \ge a$ и сходится $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, то сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$; если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ также расходится.

2) ***предельный признак сравнения***: если для $\forall x \ge a$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание: интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Интегралы от неограниченных функций.

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a;b]$, кроме $x = c \in [a;b]$, где она терпит разрыв (рисунок 6.2).

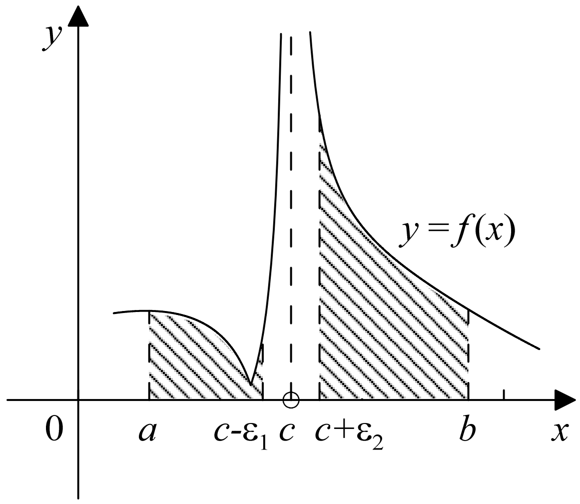

Рисунок 6.2

Тогда предел

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx \tag{6.2}$$

называется ***несобственным интегралом от разрывной функции*** или ***несобственным интегралом второго рода***.

Если оба предела, стоящие в левой части (6.2), существуют, то данный интеграл называется ***сходящимся***, а если хотя бы один из них не существует – ***расходящимся***. Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода аналогичны признакам сходимости интегралов первого рода.

6.2 Образцы решения примеров

1 Дан интеграл $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^m}$ $(m>0)$. Установить, при каких значениях m этот интеграл сходится, а при каких – расходится.

Решение

Пусть $(a>0)$, тогда

$$\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^m}=\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^{A}\frac{dx}{x^m}=\left|\begin{array}{l} m=1:\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|, \\ m\neq 1:\quad \int x^{-m}\,dx=\frac{x^{-m+1}}{-m+1}. \end{array}\right|=$$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{A\to\infty}\ln|x|\Big|_a^A=\lim\limits_{A\to\infty}(\ln|A|)-\ln|a|=\infty-\ln a=\infty & \text{при } m=1, \\ \lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{x^{-m+1}}{-m+1}\Bigg|_a^A=\dfrac{\lim\limits_{A\to\infty}A^{-m+1}}{-m+1}-\dfrac{a^{-m+1}}{-m+1} & \text{при } m\neq 1. \end{cases}$$

Если $m>1$, то

$$\frac{\lim\limits_{A\to\infty}A^{-m+1}}{-m+1}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\frac{1}{-m+1}\cdot\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A^{m-1}}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\frac{1}{\infty}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=0-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}$$

существует.

Если $m<1$, то

$$\frac{\lim\limits_{A\to\infty}A^{-m+1}}{-m+1}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\frac{1}{-m+1}\cdot\lim_{A\to\infty}A^{-m+1}-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\infty-\frac{a^{-m+1}}{-m+1}=\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^m}$, где $a>0$, сходится при $m>1$ и расходится при $m\leq 1$.

2 Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}.$$

Решение

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Bigg|_1^b=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+2}{3}-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

3 Установить сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\cdot e^x}$.

Решение

Сравним подынтегральную функцию $f(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot e^x}$ с функцией $\varphi(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Так, если $x\ge 1$ $e^x>1$, то $\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot e^x}<\frac{1}{\left(x^2+1\right)}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

т. е. интеграл сходится. По признаку сравнения исходный интеграл также сходится.

4 Установить, при каких значениях n интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^n}$ сходится и при каких – расходится.

Решение

Пусть $n\ne 1$. Тогда

$$\int_0^1\frac{dx}{x^n}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-n}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-n+1}}{1-n}\Bigg|_{0+\varepsilon}^1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\Bigg|_{0+\varepsilon}^1=\begin{cases}+\infty & \text{при} \quad n>1,\\ \dfrac{1}{1-n} & \text{при} \quad n<1.\end{cases}$$

При $n=1$ имеем $\int\limits_0^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_{0+\varepsilon}^1=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=+\infty.$

Итак, $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^n}=\begin{cases}\text{сходится при } n<1 \text{ и равен } \dfrac{1}{1-n},\\ \text{расходится при } n\ge 1.\end{cases}$

5 Исследовать интеграл на сходимость $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$.

Решение

Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^e \ln^{-3} x \, d(\ln x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln^{-2} x}{-2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^e =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\frac{1}{2\ln^2 e} + \frac{1}{2\ln^2(1+\varepsilon)} \right) = -\frac{1}{2} + \infty = +\infty.$$

Интеграл расходится.

6 Исследовать интеграл на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 2x^3}}$.

Решение

Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 0$. Тогда при $x \geq 0$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x + 2x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \text{ (сходится) (см. пример 4).}$$

По признаку сравнения и данный интеграл сходится.

6.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить несобственные интегралы первого рода или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} \, dx$. Ответ: $\frac{1}{2}$;

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2\,dx}{\sqrt{x}}$. Ответ: расходится;

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln 3$;

4) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$. Ответ: 1;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{3x^2 + 2}$. Ответ: расходится;

7) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$. Ответ: $1 - \ln 2$;

8) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2 + 3x - 10} dx$. Ответ: расходится;

9) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1} dx$. Ответ: расходится;

10) $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$. Ответ: расходится.

Вычислить несобственные интегралы второго рода или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$. Ответ: 2;

2) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$. Ответ: расходится;

3) $\int\limits_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$. Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$;

4) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$. Ответ: расходится;

5) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$. Ответ: $\frac{8}{3}$;

6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. Ответ: $-\frac{3}{2}$;

7) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$. Ответ: $2\ln 3$;

8) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3 - 6x^2}$. Ответ: расходится;

9) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. Ответ: расходится;

10) $\int\limits_{0}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Ответ: 3.

6.4 Домашнее задание

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{2x^2+3}$. Ответ: расходится;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. Ответ: π;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-3x}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{3e^3}$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$;

5) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. Ответ: $\frac{\pi^2}{8}$;

6) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Ответ: $\frac{3\pi^2}{8}$;

7) $\int\limits_{0}^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx$. Ответ: расходится;

8) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$. Ответ: -1;

9) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. Ответ: расходится;

10) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$. Ответ: расходится.

Список литературы

1 **Кожух, И. Г.** Математический анализ: учебное пособие для вузов / И. Г. Кожух. – Минск: Изд-во Гревцова, 2011. – 448 с.

2 **Минюк, С. А.** Математика для инженеров: учебник в 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский. – 4-е изд., стер. – Минск: Элайда, 2006. – Т. 2. – 600 с.

3 **Лунгу, К. Н.** Руководство к решению задач: учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров; под ред. В. Д. Кулиева. – 2-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2005. – 216 с.

4 **Виленкин, И. В.** Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: учебное пособие / И. В. Виленкин, В. М. Гробер. – 3-е изд., испр. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 414 с.

5 Высшая математика. Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск: Вышэйшая школа, 2000. – 351 с.

6 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник в 2 т. / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.

7 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

8 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.

9 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва: Высшая школа, 1973. – 176 с.

10 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – Москва: Высшая школа, 2005. – 479 с.

11 Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 475 с.

12 Высшая математика для экономистов: практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.