ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИК А

Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам

Могилев 2016

УДК 517
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» января 2015 г., протокол № 6

Составители: А. М. Бутома; Л. А. Данилович; А. Г. Козлов;
Т. Ю. Орлова; С. Ф. Плешкунова

Рецензент А. Е. Науменко

Методические рекомендации к самостоятельной работе по математике и высшей математике предназначены для студентов всех специальностей.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Введение

В методических рекомендациях к самостоятельной работе по высшей математике и математике представлены тесты по следующим разделам:

1) неопределенный и определенный интегралы;
2) приложения определенного интеграла;
3) двойной интеграл;
4) тройной интеграл;
5) криволинейный интеграл;
6) дифференциальные уравнения;
7) функции нескольких переменных;
8) ряды.

В таблицах 1–6 даны правильные ответы к тестам.

Тест 1. Неопределенный и определенный интегралы. Приложения определенного интеграла

1 Найти интеграл $\int x^5 dx$:

а) $5x^4 + C$;
в) $\frac{x^6}{6} + C$;
б) $\frac{x^4}{4} + C$;
г) $\frac{x^5}{5} + C$.

2 Найти интеграл $\int \left(2x^3 + 3\right) dx$:

а) $6x^2 + C$;
в) $\frac{x^4}{2} + C$;
б) $\frac{x^4}{4} + 3x + C$;
г) $\frac{x^4}{2} + 3x + C$.

3 Найти интеграл $\int \left(7\sqrt[4]{x^3} - 2\right) dx$:

а) $x\sqrt[4]{x^3} - 2x + C$;
в) $4x\sqrt[4]{x^3} + C$;
б) $4x\sqrt[4]{x^3} - 2x + C$;
г) $\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{7} - 2x + C$.

4 Найти интеграл $\int \left(\frac{6}{x^7} - \frac{3}{\sin^2 x}\right) dx$:

а) $x^6 - 3\operatorname{ctg} x + C$;
в) $-\frac{1}{x^6} - 3\operatorname{ctg} x + C$;
б) $\frac{1}{x^6} - 3\operatorname{ctg} x + C$;
г) $-\frac{1}{x^6} + 3\operatorname{ctg} x + C$.

5 Найти интеграл $\int \left(\frac{4}{x^2 + 16} + 5^x\right) dx$:

а) $4\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{5^{x+1}}{x+1} + C$;
в) $\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + 5^x \ln 5 + C$;
б) $\ln\left(x^2 + 16\right) + \frac{5^x}{\ln 5} + C$;
г) $\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{5^x}{\ln 5} + C$.

6 Найти интеграл $\int \left(\frac{4}{x} - \frac{5}{\cos^2 x}\right) dx$:

а) $4\ln|x| - 5\operatorname{tg} x + C$;
в) $4\ln|x| - 5\operatorname{ctg} x + C$;
б) $4\ln|x| + 5\operatorname{tg} x + C$;
г) $-\frac{4}{x^2} - 5\operatorname{tg} x + C$.

7 Найти интеграл $\int\left(3e^x-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$:

а) $3e^x-\arcsin\frac{x}{2}+C$;
в) $3e^x-2\arcsin\frac{x}{2}+C$;
б) $3e^x-\ln\left|x+\sqrt{4-x^2}\right|+C$;
г) $3e^x-2\arcsin 2x+C$.

8 Найти интеграл $\int\left(2x^5-\frac{2}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx$:

а) $10x^4-2\arcsin\frac{x}{3}+C$;
в) $\frac{x^6}{6}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$;
б) $\frac{x^6}{3}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$;
г) $\frac{x^6}{3}-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

9 Найти интеграл $\int\left(4\sin x-\frac{1}{x^2-9}\right)dx$:

а) $-4\cos x-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$;
в) $-4\cos x-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;
б) $4\cos x-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$;
г) $-4\cos x-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$.

10 Найти интеграл $\int e^{4x}dx$:

а) $e^{4x}+C$;
в) $\frac{1}{4}e^{4x}+C$;
б) $4e^{4x}+C$;
г) $\frac{1}{4}e^{x}+C$.

11 Найти интеграл $\int\cos 3x dx$:

а) $3\sin x+C$;
в) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$;
б) $3\sin 3x+C$;
г) $\frac{1}{3}\sin x+C$.

12 Найти интеграл $\int\frac{4dx}{3x+2}$:

а) $\frac{4}{3}\ln|3x+2|+C$;
в) $\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$;
б) $4\ln|3x+2|+C$;
г) $3\ln|3x+2|+C$.

13 Найти интеграл $\int \frac{10dx}{\cos^2(5x-1)}$:

а) $5\operatorname{tg}(5x-1)+C$; в) $-2\operatorname{ctg}(5x-1)+C$;

б) $10\operatorname{tg}(5x-1)+C$; г) $2\operatorname{tg}(5x-1)+C$.

14 Найти интеграл $\int \frac{3+\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$:

а) $x-3\operatorname{ctg} x+C$; в) $3\operatorname{ctg} x+x+C$;

б) $3\operatorname{ctg} x+C$; г) $x-\operatorname{ctg} x+C$.

15 Найти интеграл $\int \frac{3x^3+4x^2-5}{x}dx$:

а) $x^3-2x^2-5\ln|x|+C$; в) $\frac{3x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-5x+\ln|x|+C$;

б) $x^3+2x^2-5\ln|x|+C$; г) $\frac{3x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-5x-\ln|x|+C$.

16 Найти интеграл $\int \frac{3x+4}{x+2}dx$:

а) $2x+\ln|x+2|+C$; в) $3x+4\ln|x+2|+C$;

б) $2x-3\ln|x+2|+C$; г) $3x-2\ln|x+2|+C$.

17 Найти интеграл $\int \frac{2xdx}{x^2+9}$:

а) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; в) $\ln(x^2+9)+C$;

б) $2\ln(x^2+9)+C$; г) $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+C$.

18 Найти интеграл $\int x^2\sqrt{x^3+3}dx$:

а) $\frac{2}{3}(x^3+3)^{\frac{3}{2}}+C$; в) $2(x^3+3)^{\frac{3}{2}}+C$;

б) $\frac{2}{9}(x^3+3)^{\frac{3}{2}}+C$; г) $\frac{3}{2}(x^3+3)^{\frac{3}{2}}+C$.

19 Найти интеграл $\int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$:

а) $\frac{\arcsin^5 x}{5}+C$; б) $\arcsin^5 x+C$;

в) $\frac{\arcsin^3 x}{3}+C$; г) $5\arcsin^5 x+C$.

20 Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{9+\sin^2 x}dx$:

а) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(\sin x)+C$; в) $\ln(9+\sin^2 x)+C$;

б) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{3}\right)+C$; г) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{3}\right)+C$.

21 Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$:

а) $\ln(\ln|x|)+C$; б) $\frac{1}{\ln|x|}+C$;

в) $\frac{2}{\ln|x|}+C$; г) $-\frac{1}{\ln|x|}+C$.

22 Найти интеграл $\int \cos^2 x\sin x dx$:

а) $\frac{\cos^3 x}{3}+C$; в) $-\frac{\cos^3 x}{3}+C$;

б) $2\cos x\sin x+C$; г) $3\cos^3 x+C$.

23 Найти интеграл $\int \frac{xdx}{1+x^4}$:

а) $\ln(1+x^4)+C$; в) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2+C$; б

) $\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$; г) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$.

24 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$:

а) $\sqrt{\operatorname{ctg} x}+C$; в) $2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+C$;

б) $-\sqrt{\operatorname{ctg} x}+C$; г) $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+C$.

25 Найти интеграл $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{25-e^{2x}}}$:

а) $\arcsin\left(\frac{e^x}{5}\right)+C$; в) $\ln\left|e^x+\sqrt{25-e^{2x}}\right|+C$;

б) $\frac{1}{5}\arcsin\left(\frac{e^x}{5}\right)+C$; г) $\ln\left|e^{2x}+\sqrt{25-e^{2x}}\right|+C$.

26 Найти интеграл $\int x\sin xdx$:

а) $x\cos x+C$; в) $-x\cos x+\sin x+C$;
б) $x\cos x+\sin x+C$; г) $x\cos x-\sin x+C$.

27 Найти интеграл $\int x\cos 4xdx$:

а) $\frac{x}{4}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 4x+C$; в) $\frac{x}{4}\sin 4x+\frac{1}{4}\cos 4x+C$;
б) $\frac{x}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C$; г) $x\cos 4x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$.

28 Найти интеграл $\int (x+1)e^{2x}dx$:

а) $e^{2x}(2x+4)+C$; в) $e^{2x}(x+1)+C$;
б) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x+1)$; г) $\frac{1}{2}e^{2x}(2x+1)+C$.

29 Найти интеграл $\int (5x+2)\cos 3xdx$:

а) $(5x+2)\sin 3x+\cos 3x+C$; в) $\frac{(5x+2)}{3}\sin 3x+\frac{5}{9}\cos 3x+C$;
б) $(5x+2)\cos 3x-5\sin 3x+C$; г) $\frac{(5x+2)}{3}\sin 3x+\frac{5}{3}\cos 3x+C$.

30 Найти интеграл $\int x^2e^{2x}dx$:

а) $(x-1)^2e^{2x}+C$; в) $(x^2+2x+2)e^{2x}+C$;
б) $\frac{1}{2}(2x^2-1)e^{2x}+C$; г) $\frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+C$.

31 Найти интеграл $\int x^2\ln xdx$:

а) $x^3\ln x-9x^3+C$; в) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$;
б) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{6}+C$; г) $x^3\ln x+9x^3+C$.

32 Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$:

а) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+C$; в) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}\ln x-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x}+C$;
б) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}(\ln x-1)+C$; г) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}(\ln x-1)+C$.

33 Найти интеграл $\int \arcsin x dx$:

а) $x\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$; в) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$;

б) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$; г) $x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + C$.

34 Найти интеграл $\int \mathrm{arctg}\, 3x dx$:

а) $x\,\mathrm{arctg}\, 3x + \frac{1}{9}\ln\left(9x^2+1\right) + C$; в) $x\,\mathrm{arctg}\, 3x - \frac{1}{6}\ln\left(9x^2+1\right) + C$;

б) $x\,\mathrm{arctg}\, 3x + \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+1\right) + C$; г) $x\,\mathrm{arctg}\, 3x - \frac{1}{6}\ln\left(6x^2+1\right) + C$.

35 Найти интеграл $\int e^{2x}\cos x dx$:

а) $e^{2x}\left(\cos x + 2\sin x\right) + C$; в) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(\cos x + 2\sin x\right) + C$;

б) $\frac{1}{5}e^{2x}\left(2\cos x + \sin x\right) + C$; г) $e^{2x}\left(2\cos x - \sin x\right) + C$.

36 Найти интеграл $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$:

а) $x\,\mathrm{tg}\, x + \ln\left|\sin x\right| + C$; в) $x\,\mathrm{tg}\, x - \ln\left|\cos x\right| + C$;

б) $x\,\mathrm{tg}\, x - \ln\left|\sin x\right| + C$; г) $x\,\mathrm{tg}\, x + \ln\left|\cos x\right| + C$.

37 Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$:

а) $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$; в) $\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right| + C$;

б) $2\ln\left|x^2+5x+6\right| + C$; г) $\ln\left|x^2+5x+6\right| + C$.

38 Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$:

а) $\ln\left|x^2+4x+8\right| + C$; в) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{2} + C$;

б) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right| + C$; г) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{4} + C$.

39 Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$:

а) $2\sqrt{x^2-6x+8} + C$; в) $\arcsin\left(x-3\right) + C$;

б) $\sqrt{x^2-6x+8} + C$; г) $\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right| + C$.

40 Найти интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+3x-10}$:

а) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x-10\right|-\frac{3}{14}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$;

б) $\ln\left|x^2+3x-10\right|-\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$;

в) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x-10\right|-\frac{3}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$;

г) $\ln\left|x^2+3x-10\right|-\frac{1}{14}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$.

41 Найти интеграл $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2+6x+13}$:

а) $2\ln\left(x^2+6x+13\right)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$;

б) $2\ln\left(x^2+6x+13\right)-\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$;

в) $\ln\left(x^2+6x+13\right)-3\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$;

г) $\ln\left(x^2+6x+13\right)+3\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$.

42 Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\left(x^2+16\right)}$:

а) $4\ln\left|\frac{x}{x^2+16}\right|+C$;

б) $\ln\left|\frac{x}{x^2+16}\right|+C$;

в) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{16}\ln\left|x^2+16\right|+C$;

г) $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{32}\ln\left|x^2+16\right|+C$.

43 Найти интеграл $\int \sin^2 xdx$:

а) $\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\sin 2x+C$;

б) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

в) $\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\sin 2x+C$;

г) $x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

44 Найти интеграл $\int 3\cos^3 xdx$:

а) $\cos x-3\cos^3 x+C$;

б) $\sin x+3\sin^3 x+C$;

в) $3\sin x-\sin^3 x+C$;

г) $3\sin x+\cos^3 x+C$.

45 Найти интеграл $\int \sin x \cos 3x dx$:

а) $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$; в) $\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + C$;

б) $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + C$; г) $\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$.

46 Найти интеграл $\int \cos 5x \cos 3x dx$:

а) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$; в) $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$;

б) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$; г) $\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 8x + C$.

47 Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$:

а) $\operatorname{tg}^3 x + C$; в) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$;

б) $3\operatorname{tg}^3 x + C$; г) $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$.

48 Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$:

а) $\operatorname{arctg}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$; в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 1) + C$;

б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + 1) + C$; г) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) + C$.

49 Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x + 16}$:

а) $2\sqrt{x} - 8\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{4} + C$; в) $2\sqrt{x} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{4} + C$;

б) $\sqrt{x} - 4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{4} + C$; г) $2\sqrt{x} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{4} + C$.

50 Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 + \sqrt{2x+1}}$:

а) $2\sqrt{2x+1} + \ln\left|3 + \sqrt{2x+1}\right| + C$;

б) $2\sqrt{2x+1} - \ln\left|3 + \sqrt{2x+1}\right| + C$;

в) $\sqrt{2x+1} + \ln\left|3 + \sqrt{2x+1}\right| + C$;

г) $\sqrt{2x+1}-3\ln\left|3+\sqrt{2x+1}\right|+C.$

51 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \left(3x^2+4x+3\right)dx$:

а) 5; б) 4; в) 6; г) 7.

52 Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \left(2x^3+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^4}\right)dx$:

а) $\frac{53}{8}+4\ln 2$; б) $\frac{63}{8}+4\ln 2$; в) $\frac{67}{8}+4\ln 2$; г) $\frac{53}{8}+\ln 2$.

53 Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$:

а) $\ln 5$; б) $5\ln 2$; в) $\frac{1}{5}\ln 2$; г) $\frac{1}{2}\ln 5$.

54 Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{12}$.

55 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 1.

56 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{16}} \frac{dx}{\cos^2 4x}$:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\sqrt{3}$.

57 Вычислить интеграл $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x-1}$:

а) $\ln 2$; б) $\ln 4$; в) $\ln 3$; г) $\ln 5$.

58 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{x^4+1}$:

а) $\ln 4$; б) $\frac{1}{2}\ln 2$; в) $\frac{1}{4}\ln 2$; г) $\frac{1}{4}\ln 3$.

59 Вычислить интеграл $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + 4}$:

а) $\ln\frac{3}{2}$; б) $\ln 2$; в) $\ln 3$; г) 1.

60 Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{3\cos x dx}{9+\sin^2 x}$:

а) $\mathrm{arctg}\, 3$; б) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$; в) $\mathrm{arctg}\, 2$; г) 0.

61 Вычислить интеграл $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$:

а) $2+\ln 2$; б) $2+\ln\frac{3}{2}$; в) $2-\ln\frac{3}{2}$; г) $2-\ln 2$.

62 Вычислить интеграл $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{2x+9}}$:

а) $3\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2}$; в) 2; г) $4\sqrt{2}$.

63 Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{2dx}{1+\sqrt[3]{x}}$:

а) 3; б) $6\ln 2 - 3$; в) $4-\ln 2$; г) $4+\ln 3$.

64 Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$:

а) $\pi - 1$; б) $\pi + 1$; в) $\frac{\pi}{2} - 1$; г) $\frac{\pi}{2}$.

65 Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x dx$:

а) 1; б) $e-1$; в) $e+1$; г) $2e$.

66 Вычислить интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$:

а) $\frac{\pi}{2}+1$; б) $\pi - 1$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{2} - 1$.

67 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$:

а) ∞; б) 1; в) 2; г) -1.

68 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx$:

а) ∞; б) 1; в) 2^{-1}; г) 3^{-1}.

69 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{1+x^2}$:

а) ∞; б) π; в) 0; г) $-\infty$.

70 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{(x-2)^2}$:

а) ∞; б) 1; в) 0; г) 2.

71 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}dx$:

а) ∞; б) 1; в) 0,5; г) 2.

72 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$:

а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{8}{3}$; в) 4; г) 2.

73 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$:

а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{32}{3}$; в) 16; г) 32.

74 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$:

а) 4,5; б) 6; в) 3,5; г) 2,5.

75 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0,25x^2$, $y = 2\sqrt{x}$:

а) $\frac{16}{5}$; б) $\frac{16}{7}$; в) $\frac{16}{3}$; г) $\frac{16}{9}$.

76 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{3}{x}$, $x+y=4$:

а) $\ln 3$; б) $3\ln 3$; в) $3\ln 3-4$; г) $4-3\ln 3$.

77 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^3=x$, $y=1$, $x=8$:

а) $\frac{13}{6}$; б) $\frac{17}{6}$; в) $\frac{19}{4}$; г) $\frac{17}{4}$.

78 Вычислить длину дуги линии $y=x\sqrt{x}$ от $x_1=0$ до $x_2=3$:

а) $\frac{14\sqrt{14}-14}{27}$; в) $\frac{31\sqrt{31}-8}{27}$;

б) $\frac{8\sqrt{31}-8}{17}$; г) $\frac{31\sqrt{31}+8}{27}$.

79 Вычислить длину дуги линии $y=\ln\cos x$ от $x_1=0$ до $x_2=\frac{\pi}{3}$:

а) $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$; в) $\ln\left(3+\sqrt{2}\right)$;

б) $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$; г) $\ln\left(3-\sqrt{2}\right)$.

80 Вычислить длину дуги линии $y=\frac{x^2}{4}$ от $x_1=0$ до $x_2=2$:

а) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$;

б) $\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$; г) $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Таблица 1 – Ответы

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	в	12	г	23	г	34	в
2	г	13	г	24	г	35	б
3	б	14	а	25	а	36	г
4	г	15	б	26	в	37	а
5	г	16	г	27	б	38	в
6	а	17	в	28	б	39	г
7	в	18	б	29	в	40	а
8	б	19	а	30	г	41	б
9	а	20	б	31	в	42	г
10	в	21	г	32	а	43	б
11	в	22	в	33	в	44	в

Окончание таблицы 1

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
45	а	54	г	63	б	72	б
46	в	55	б	64	в	73	б
47	б	56	а	65	а	74	а
48	г	57	в	66	г	75	в
49	а	58	в	67	б	76	г
50	г	59	а	68	г	77	г
51	в	60	г	69	г	78	в
52	в	61	б	70	а	79	а
53	а	62	в	71	в	80	г

Тест 2. Двойной интеграл

1 Если область *D* правильная в направлении оси *Ox*, то любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области и параллельная оси *Ox*, пересекает ее границу:

а) в двух точках; в) в одной точке;
б) в четырех точках; г) не пересекает.

2 Функция $f(x,y) \geq 0$ непрерывна в замкнутой области D. Формула $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ верна, если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:

а) непрерывны и $\varphi_1(x) \geq 0, \varphi_2(x) \leq 0$ для всех $x \in [a,b]$;
б) любые;
в) непрерывны и $\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a,b]$;
г) непрерывны и $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a,b]$.

3 Областью интегрирования двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ является:

а) отрезок оси *Ox* или *Oy*;
б) поверхность пространства *Oxyz*;
в) непрерывная кривая плоскости *Oxy*;
г) замкнутая область плоскости *Oxy*.

4 Внешние пределы в повторном интеграле:

а) только переменные величины;
б) только постоянные величины;
в) могут быть переменными, могут быть постоянными величинами;

г) один является постоянной, другой переменной величиной.

5 При переходе в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ из декартовой в полярную систему координат по формулам $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ модуль якобиана преобразования равен:

а) 1; б) ρ; в) $\rho^2\sin\varphi$; г) 0.

6 Область интегрирования D в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$ задается системой неравенств:

а) $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 2-y\le y\le\sqrt{y}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ \sqrt{y}\le x\le 2-y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ 2-y\le x\le\sqrt{y}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ \sqrt{y}\le y\le 2-y. \end{cases}$

7 Область интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{e^x} f(x,y)\,dy$ задается системой неравенств:

а) $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 1\le y\le e^x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ e^x\le x\le 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ 1\le x\le e^x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ e^x\le y\le 1. \end{cases}$

8 Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$:

а) $\int\limits_y^{\sqrt{y}} dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$; в) $\int\limits_y^{\sqrt{y}} dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$;

б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\,dx$; г) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$.

9 Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2}^1 f(x,y)\,dx$:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{-\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{1} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{1} f(x,y)dy$;

г) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{1} f(x,y)dy$.

10 Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{0} f(x,y)dy$:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{0} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{0}^{y+1} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{0}^{y-1} f(x,y)dx$;

г) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{0}^{x-1} f(x,y)dx$.

11 Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1}^{e^x} f(x,y)dy$:

а) $\int\limits_1^e dy \int\limits_{e^x}^{1} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_1^e dy \int\limits_{0}^{1} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$;

г) $\int\limits_1^e dy \int\limits_{e^y}^{1} f(x,y)dx$.

12 В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ область *D*, ограниченная параболой $y = 0,5x^2$ и прямой $y = x$, задается системой неравенств:

а) $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ \dfrac{x^2}{2} \le y \le x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ x \le y \le \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

13 В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ область *D*, ограниченная линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$, задается системой неравенств:

а) $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x^2 \le y \le 2 - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{y} \le x \le 2 - y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0 \le y \le 2, \\ 0 \le x \le 2 - y. \end{cases}$

14 В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ область *D*, ограниченная линиями $y=-x$, $(x+1)^2+y^2=1$, $y=0$, задается системой неравенств:

а) $\begin{cases} -2\le x\le 0, \\ 0\le y\le 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -1\le x\le 0, \\ -x\le y\le \sqrt{1-(x+1)^2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ -y\le x\le -1+\sqrt{1-y^2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0\le y\le 1, \\ -y\le x\le -1-\sqrt{1-y^2}. \end{cases}$

15 В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ область *D*, ограниченная линиями $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{2-y^2}$, $x=0$, задается системой неравенств:

а) $\begin{cases} 0\le x\le \sqrt{2}, \\ x^2\le y\le \sqrt{2-x^2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ x^2\le y\le \sqrt{2-x^2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0\le x\le 1, \\ 0\le y\le \sqrt{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0\le x\le \sqrt{2}, \\ 0\le y\le \sqrt{2-x^2}. \end{cases}$

16 Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^3 dx\int\limits_5^7 dy$:

а) 2; б) 4; в) 6; г) 8.

17 Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\cos x} dy$:

а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\sqrt{2}$.

18 Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy$:

а) $\frac{63}{2}$; б) $\frac{9}{4}$; в) $-\frac{9}{4}$; г) $3\ln 2-\frac{63}{2}$.

19 Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2+y^2}$:

а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{3}$.

20 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$ по области $D: x+y=2$, $x>0,\ x^2+y^2=2y$:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{8}$.

21 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D ydxdy$ по области D: треугольник с вершинами в точках : $A(1,1), B(1,0), O(0,0)$:

а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{2}$.

22 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dxdy$ по области $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2,\ x\geq 0$:

а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{13}{3}$; в) $\frac{13}{6}$; г) 3.

23 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,\ \ D: x^2+y^2=R^2$; $y\geq 0$, перейдя к полярным координатам:

а) $\frac{\pi R^4}{4}$; б) $\frac{\pi R^4}{2}$; в) πR^3; г) $\frac{\pi R^3}{3}$.

24 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,\ \ D: x^2+y^2=4x$, перейдя к полярным координатам:

а) 12π; б) 24π; в) 36π; г) 48π.

25 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy,\ \ D: x^2+y^2=e^2$; $x^2+y^2=e^4$, перейдя к полярным координатам:

а) πe^2; б) $3\pi e^2$; в) $\pi e^2\left(3e^2-1\right)$; г) $3\pi e^4$.

26 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D dxdy,\ \ D: x^2+y^2=2y$; $x^2+y^2=4y$, перейдя к полярным координатам:

а) π; б) 3π; в) 2π; г) 4π.

27 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=4, x+y=5$:

а) $7{,}5-4\ln 4$; б) $7{,}5$; в) $7{,}5+4\ln 4$; г) $8{,}5-4\ln 4$.

28 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x,\quad y=x, y=0$:

а) $\frac{3\pi}{16}$; б) $\frac{3\pi+6}{8}$; в) $\frac{3\pi+6}{16}$; г) $\frac{3\pi}{8}$.

29 Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x=0, y=0, z=0,\ x+y+z=1$:

а) $\frac{1}{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{2}$.

30 Найти объём тела, ограниченного поверхностями $y=x^2, y=1, z=0,\ x+y+z=4$:

а) $\frac{68}{5}$; б) 68; в) $\frac{68}{15}$; г) $\frac{34}{15}$.

31 Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4x,\ 2z=x^2+y^2,\ z=0$:

а) 16π; б) 12π; в) 24π; г) 8π.

32 Масса пластинки, ограниченной линиями $y=x,\quad y=1,\quad x=0$, с плотностью масс $\gamma(x,y)=x+y$, равна:

а) 1; б) 0,5; в) $\frac{7}{6}$; г) 2.

33 Найти координаты центра масс однородной пластины ($\gamma(x,y)=1$), ограниченной линиями $y^2=x, y=x^2$:

а) $\left(\frac{3}{20},\frac{3}{20}\right)$; б) $\left(\frac{9}{20},\frac{9}{20}\right)$; в) $\left(\frac{1}{20},\frac{1}{20}\right)$; г) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

34 Найти координаты центра масс однородной пластины ($\gamma(x,y)=1$), ограниченной линиями $y=0$ и одной полуволной синусоиды $y=\sin x$.

а) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{8}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)$; в) $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$; г) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

Таблица 2 – Ответы

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	а	6	в	11	в	16	в
2	г	7	а	12	а	17	б
3	г	8	г	13	в	18	б
4	б	9	а	14	г	19	в
5	б	10	б	15	в	20	б

Окончание таблицы 2

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
21	в	26	б	31	б		
22	г	27	а	32	б		
23	а	28	в	33	б		
24	б	29	в	34	а		
25	в	30	в				

Тест 3. Тройной интеграл

1 Областью интегрирования тройного интеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$

$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2} f(x,y,z)\,dz$ является:

а) параллелепипед; в) пирамида;
б) цилиндр; г) плоскость.

2 Областью интегрирования тройного интеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$

$= \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} dy \int\limits_{0}^{2-x-y} f(x,y,z)\,dz$ является:

а) параллелепипед; в) пирамида;
б) цилиндр; г) плоскость.

3 Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ для области $V: 2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0,\ z=0$:

а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} dy \int\limits_{0}^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz$; в) $\int\limits_{0}^{6} dx \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} f(x,y,z)\,dz$;

б) $\int\limits_{0}^{6} dx \int\limits_{0}^{4-\frac{2x}{3}} dy \int\limits_{0}^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x,y,z)\,dz$; г) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{12-2x} dy \int\limits_{0}^{12-2x-3y} f(x,y,z)\,dz$.

4 Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ для области $V: y^2+2z^2=4x,\ x=2$:

а) $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} dz \int\limits_{2}^{y^2+2z^2} f(x,y,z)dx$; в) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_{-2}^{2} f(x,y,z)dz$;

б) $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\frac{\sqrt{8-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{8-y^2}}{2}} dz \int\limits_{2}^{\frac{y^2+2z^2}{4}} f(x,y,z)dx$; г) $\int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\frac{\sqrt{8-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{8-y^2}}{2}} dz \int\limits_{\frac{y^2+2z^2}{4}}^{2} f(x,y,z)dx$.

5 Вычислить повторный интеграл $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} dx \int\limits_{-1}^{3} dy \int\limits_{0}^{16-y^2} \cos x dz$:

а) $-\frac{16}{3}$; б) 64; в) $-\frac{164}{3}$; г) $\frac{108}{3}$.

6 Вычислить интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz$ по параллелепипеду, ограниченному плоскостями $x=1,\ x=-1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2$:

а) 1; б) 2; в) 0; г) 0,5.

7 Вычислить $\iiint\limits_V \frac{z}{z^2+1} dxdydz$, где область V ограничена плоскостями $x=1,\ x=4,\ y=-2,\ y=3,\ z=\sqrt{e-1},\ z=\sqrt{e^2-1}$:

а) 15; б) 8; в) 7,5; г) 14.

8 Вычислить $\iiint\limits_V xdxdydz$, где область V ограничена плоскостями $x=0,\ y=0,\ y=3,\ z=0,\ x+z=2$:

а) 6; б) 2; в) 8; г) 4.

9 Вычислить $\iiint\limits_V zdxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x=2,\ y=0,\ y=3x,\ z=0,\ z=xy$:

а) 16; б) 48; в) 12; г) $\frac{3}{4}$.

10 Вычислить $\iiint\limits_V z(3x-y)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $y=0,\ y=\sqrt{x},\ z=0,\ z=\sqrt{5},\ x=4$:

а) 66; б) 72; в) 54; г) 86.

11 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x-y)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=x^2+y^2,\ 0\le x\le 1$:

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{12}$; в) 1; г) $-\frac{5}{12}$.

12 Расставить пределы интегрирования в цилиндрических координатах в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $y \ge 0,\ x \ge 0,\ z = 4,\ 4z = x^2 + y^2$:

а) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} d\rho \int\limits_{\rho^2}^{4} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot \rho dz$;

б) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{4} d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{4}}^{4} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) dz$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4} d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{4}}^{4} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot \rho dz$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2} d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{4}}^{4} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot \rho dz$.

13 Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2 = 2x, y=0, z=0, z=a$:

а) $\frac{8a^2}{9}$; б) a^2; в) $\frac{9a^2}{8}$; г) $\frac{4a^2}{3}$.

14 Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+z^2)\,dxdydz, \quad V: x^2+z^2 = 2y, y = 2$:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) 4π; в) $\frac{17\pi}{3}$; г) $\frac{16\pi}{3}$.

15 Перейдя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V z\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2 \le R^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$:

а) $\frac{\pi R^4}{16}$; б) $\frac{\pi R^4}{8}$; в) $\frac{\pi R^4}{4}$; г) $\frac{\pi R^4}{2}$.

16 Перейдя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x^2+y^2+z^2 = 5$:

а) 12π; б) 24π; в) 36π; г) 48π.

17 Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $2x+3y+4z=12,\ x=0,\quad y=0,\quad z=0$:

а) 12; б) 24; в) 36; г) 48.

18 Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z^2=x^2+y^2,\ z=3$:

а) 27π; б) 3π; в) 8π; г) 9π.

19 Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $2z=x^2+y^2, z=2$:

а) 2π; б) 3π; в) 4π; г) 6π.

20 Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=2\left(x^2+y^2\right),\quad y=x,\quad y^2=x$:

а) $\dfrac{9}{35}$; б) $\dfrac{3}{35}$; в) $\dfrac{2}{15}$; г) $\dfrac{19}{105}$.

21 Найти статический момент однородного (плотность $\gamma=1$) прямоугольного параллелепипеда с ребрами 2, 3 и 4 относительно плоскости Oxz.

а) 24; б) 36; в) 48; г) 64.

22 Найти массу неоднородного куба с ребром 2, если плотность в каждой его точке равна расстоянию до плоскости Oyz.

а) 16; б) 24; в) 12; г) 8.

23 Вычислить координаты центра масс однородного (плотность $\gamma=1$) тела, занимающего область V, ограниченную поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=4$:

а) $(3,0,0)$; б) $(3,3,0)$; в) $(3,3,3)$; г) $(0,0,3)$.

Таблица 3 – Ответы

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	а	7	в	13	а	19	в
2	в	8	г	14	г	20	б
3	б	9	б	15	а	21	б
4	г	10	г	16	б	22	г
5	в	11	б	17	а	23	г
6	в	12	в	18	г		

Тест 4. Криволинейный интеграл

1 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$, $A(1;2)$:

а) $\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; б) $\sqrt{5}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; в) $\ln\left(3+\sqrt{5}\right)$; г) $\sqrt{5}\ln\left(3+\sqrt{5}\right)$.

2 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{y^2+\ln y/x}}$, если L – часть кривой $y=e^x$, заключенная между точками $A(1,e)$ и $B\left(2,e^2\right)$:

а) 0; б) 0,5; в) 1; г) 1,5.

3 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L 12\cos(x+y)\,dl$, если $L: y=\frac{x}{2}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$:

а) 0; б) $-6\sqrt{5}$; в) $6\sqrt{5}$; г) $4\sqrt{5}$.

4 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+y)\,dl$, если L – контур треугольника с вершинами $(0;0),(1;0),(0;1)$:

а) 0; б) $1+\sqrt{2}$; в) 1; г) $0{,}5+\sqrt{2}$.

5 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L \left(y+x^2\right)dx+(2x-y)\,dy$, если L – дуга параболы $y=2x-x^2$, пробегаемая от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;-3)$:

а) $\frac{44}{3}$; б) $-\frac{44}{3}$; в) -15; г) 15.

6 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, если L – верхняя половина эллипса $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ пробегаемая по ходу часовой стрелки:

а) $\frac{4ab^2}{3}$; б) $\frac{4a^2b}{3}$; в) $\frac{4ab}{3}$; г) 0.

7 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L} x(y-2)dx + y(2-x)dy,$ если L – контур треугольника с вершинами $(0;0),(-2;0),(0;1)$, пробегаемый против хода часовой стрелки:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) $-\frac{2}{3}$.

8 Найти работу силы $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - y\vec{j}$ при перемещении вдоль отрезка MN от точки $M(-1;0)$ к точке $N(0;1)$:

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{15}$; г) $-\frac{5}{12}$.

9 Найти работу силы $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 + y^2\right)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y \geq 0$ от точки $M(3;0)$ к точке $N(-3;0)$:

а) 2; б) -2; в) 13; г) -12.

10 Найти работу силы $\vec{F} = x^2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ от точки $M(3;0)$ к точке $N(0;3)$:

а) 27; б) -18; в) 18; г) 0.

11 С помощью формулы Грина вычислить $\oint\limits_{L} (x-y)dx + (x+y)dy,$ L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$:

а) $2\pi R^2$; б) πR^2; в) $0,5\pi R^2$; г) 0.

12 С помощью формулы Грина вычислить $\oint\limits_{L} \left(y - x^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy,$ L – контур кругового сектора радиуса R и с углом φ $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$:

а) $2\pi R^2$; б) πR^2; в) $0,5\pi R^2$; г) 0.

Таблица 4 – Ответы

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	а	5	б	9	б
2	в	6	а	10	в
3	г	7	а	11	а
4	б	8	г	12	а

Тест 5. Дифференциальные уравнения

1 Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, функцию $y(x)$ и:

а) константу c;

б) n произвольных констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$;

в) x', y';

г) $x', x'', \ldots, x^{(n)}, y', y'', \ldots, y^{(n)}$;

д) $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

2 Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего …, называется задачей Коши. Вставьте пропущенные слова.

а) данному уравнению при любом c;

б) условию $y'(0) = 0$;

в) условию $f(x_0) = y_0$.

г) условию $f(x, y) = c_0$;

д) условию $f(x_0, y_0) = y_0$.

3 Какие из следующих дифференциальных уравнений:

1) $M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0$;

2) $y' = M(x) \cdot N(y)$;

3) $x' = M(x) \cdot N(y)$;

4) $y' = M(x) + N(y)$

есть уравнения с разделяющимися переменными:

а) все; б) 4; в) 1, 2, 3; г) 1 и 2.

4 Какие из следующих уравнений:

1) $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$; 2) $y' = f\left(\dfrac{y^2}{x^2 - y^2}\right)$; 3) $y' = f\left(\dfrac{y}{x + y}\right)$:

есть однородные ДУ 1-го порядка (y – функция аргумента x):

а) 1; б) 2; в) 3; г) 2 и 3; д) ни одно.

5 Какие из следующих уравнений:

1) $y'(x) + P(x) \cdot y = Q(y)$;

2) $y'(x) + P(x) \cdot y = Q(x)$;

3) $y'(x) + P(y) \cdot y = Q(x)$

есть линейные ДУ первого порядка:

а) все; б) ни одно; в) только 1; г) только 2; д) только 3.

6 Для того, чтобы ДУ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, где $P(x,y), Q(x,y)-$ непрерывные функции, было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно выполнение условия:

а) $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$;

б) P'_y, Q'_x − непрерывные функции;

в) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$;

г) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(x,y)$;

7 Определить тип ДУ $e^{x+3y}dy=x\cdot dy$:

а) с разделяющимися переменными;
б) однородное;
в) линейное;
г) в полных дифференциалах;
д) Бернулли.

8 Определить тип ДУ $\left(x+1\right)y'+y=x^3+x^2$:

а) с разделяющимися переменными;
б) однородное;
в) линейное;
г) в полных дифференциалах;
д) Бернулли.

9 Определить тип ДУ $xy'-y=x\cdot tg\frac{y}{x}$:

а) с разделяющимися переменными;
б) однородное;
в) линейное;
г) в полных дифференциалах;
д) Бернулли.

10 Определить тип ДУ $y'-2xy-6x^2y^3=0$:

а) с разделяющимися переменными;
б) однородное;
в) линейное;
г) в полных дифференциалах;
д) Бернулли.

11 Найти общее решение ДУ $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) + 1$:

а) $y = \ln|cx| + 1$;

б) $\frac{x}{y - x} = \ln|cx|$;

в) $\frac{x}{x - y} = \ln|xc|$;

г) $\frac{x - y}{x} = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$;

д) $y = cx^3 + 2\ln|x|$.

12 Найти общее решение ДУ $y' + 2y = e^{3x}$:

а) $y = e^{3x} + \frac{c}{e^{2x}}$;

б) $y = \frac{e^{3x}}{5} + \frac{c}{e^{2x}}$;

в) $y = 5e^{3x} + \frac{c}{e^{2x}}$;

г) $y = \frac{1}{3}e^{3x-2} + c$;

д) $y = e^{3x} + ce^{2x}$.

13 Решить ДУ $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x)dy = 0$:

а) $\frac{x^3}{3} + 2xy + 3x\frac{y^2}{2} = c$;

б) $2x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$;

в) $\frac{x^3}{3} + y^2 x + xy = c$;

г) $x^2 + y^2 + y + 2xy + x = c$;

д) $x^2 y + y^2 x + 2xy = c$.

14 Решение ДУ $y^{(n)} = f(x)$ находится:

а) n-кратным интегрированием;
б) (n – 1)-кратным интегрированием;
в) (n + 1)-кратным интегрированием;
г) методом вариации произвольных постоянных.

15 Найти общее решение ДУ $y''' = 2^x$:

а) $y = \ln^3 2 \cdot 2^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$;

б) $y = 2^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$;

в) $y = \dfrac{2^x}{\ln 2} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$;

г) $y = \dfrac{2^x}{\ln^3 2} + c_1 \dfrac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$.

16 Указать метод решения ДУ $xy'' = y'$:

а) непосредственное интегрирование;

б) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(x)$;

в) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(y)$;

г) с помощью подстановки $y'' = p(y)$;

д) с помощью подстановки $y'' = p(x)$.

17 Решить ДУ $y' = x \cdot y'' + y''$ при заданных начальных условиях: $y(0) = \dfrac{1}{2}$; $y'(0) = 1$:

а) $2y = x^2 + x + 1$;

б) $y = \dfrac{x^2}{2}$;

в) $2y = (x+1)^2$;

г) $y + \dfrac{1}{2} = (x+1)^2$;

д) $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2}{2} + x$.

18 Указать метод решения ДУ $(y')^2 + 2yy'' = 0$:

а) непосредственное интегрирование;

б) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(x)$;

в) понижение порядка с помощью подстановки $y' = p(y)$;

г) с помощью подстановки $y'' = p(y)$;

д) с помощью подстановки $y'' = p(x)$.

19 Решить ДУ $y'' - 4y \cdot y' = 0$ при заданных начальных условиях: $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$:

а) $\operatorname{arctg}(y) = 2x$;

б) $y = 2\operatorname{tg}(4x)$;

в) $2y^3 = 3y$;

г) $\operatorname{arctg}(\frac{y}{2}) = 2x$;

д) $y = 2\operatorname{tg}(2x)$.

20 Линейным однородным ДУ *n*-го порядка (*y* – функция независимой переменной *x*) с постоянными коэффициентами a_1, a_2, …, a_n называется уравнение вида:

а) $F(x, y^n, a_1 \cdot y^{(n-1)}, ..., a_{n-1} \cdot y', a_n y) = 0$;

б) $y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-1)} \cdot y' + a_n y) = 0$;

в) $x + y^n + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$;

г) $y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n y) = f(x)$;

д) $y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n(x) y = 0$.

21 Если $y_1, y_2, ..., y_n -$ линейно-независимые решения ДУ $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ $(a_0 \neq 0)$, то общее решение этого уравнения имеет вид ($c_1, .., c_n -$ произвольные постоянные):

а) $y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n$;

б) $y = e^x (c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + ... + c_n \cdot y_n)$;

в) $y = e^{c_1 x} \cdot y_1 + ... + e^{c_n x} \cdot y_n$;

г) $y = c_1 \cdot e^{y_1} + c_2 \cdot e^{y_2} + ... + c_n \cdot e^{y_n}$;

д) $y = e^{c_1 y_1 + .. + c_n y_n}$.

22 Характеристическое уравнение, соответствующее ДУ $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, имеет вид:

а) $e^{kx}(1 + a_1 + ... + a_{n-1} x + a_n) = 0$;

б) $e^{kx}(x^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n) = 0$;

в) $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n k = 0$;

г) $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$;

д) $nk^n + (n-1) a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0.$

23 Характеристическое уравнение, соответствующее ДУ $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, имеет действительные кратные корни $k_1 = k_2 = k$. Частными решениями ДУ будут функции:

1) e^{kx}; 2) $k \cdot e^{kx}$; 3) $x \cdot e^{kx}$.

Какие выражения верны:

а) 1 и 2; б) 2 и 3; в) только 3; г) все верны; д) 1 и 3.

24 Найти общее решение ДУ $y'' - 2y' + y = 0$:

а) $y = c_1 e^x + c_2$;

б) $y = c_1 e^x + c_2$;

в) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$;

г) $y = e^{-x}(c_1 x + c_2)$;

д) $y = e^x (c_1 x + c_2)$.

25 Если характеристическое уравнение, соответствующее ДУ $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, имеет два различных действительных корня k_1 и k_2, то фундаментальная система решений состоит из функций:

а) $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$;

б) $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$;

в) $k_1 \cdot e^{k_1 x}$, $k_2 \cdot e^{k_2 x}$;

г) $e^{k_1 x} \cdot \cos x$, $e^{k_2 x} \cdot \sin x$;

д) $e^x \cdot \cos k_1 \cdot x, e^x \cdot \sin k_2 \cdot x$.

26 Найти общее решение ДУ $y'' - 3y' + 2y = 0$:

а) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$;

б) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$;

в) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$;

г) $y = c_1 e^x + c_2 x e^{2x}$.

27 Если характеристическое уравнение, соответствующее ДУ $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, имеет комплексно-сопряженные корни: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, то фундаментальная система решений состоит из функций:

а) $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$;

б) $e^{\alpha} \cdot \cos \beta x, e^{\alpha} \cdot \sin \beta x$;

в) $e^{\beta x} \cdot \cos \alpha x, e^{\beta x} \cdot \sin \alpha x$;

г) $e^{(\alpha+\beta)x}$, $e^{(\alpha-\beta)x}$.

28 Общее решение ДУ $y'' + y = 0$ имеет вид:

а) $y = c_1 \sin \dfrac{x}{2} + c_2 \cos \dfrac{x}{2}$;

б) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$;

в) $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$;

г) $y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$;

д) $y = c_1 \sin \dfrac{x}{3} + c_2 \cos \dfrac{x}{3}$.

29 Общее решение ДУ $y'' - y' = e^{-x}$, имеет вид:

а) $y = c_1 + c_2 e^{x} + 2e^{-x}$;

б) $y = c_1 + c_2 e^{x} + e^{-x}$;

в) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 0,5e^{-x}$;

г) $y = c_1 + c_2 e^{x} + 0,5e^{-x}$;

д) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + xe^{-x}$.

30 Общее решение ДУ $y'' - 2y' + y = e^{2x}$, имеет вид:

а) $y = e^{2x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$;

б) $y = (c_1 + c_2) e^{x} + 2e^{2x}$;

в) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x}$;

г) $y = (c_1 + c_2) e^{-x} + e^{2x}$;

д) $y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + e^{2x}$.

Таблица 5 – Ответы

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	д	11	в	21	а
2	в	12	а	22	г
3	в	13	в	23	д
4	г	14	а	24	д
5	б	15	г	25	а
6	в	16	б	26	а
7	а	17	д	27	а
8	в	18	в	28	б
9	б	19	б	29	г
10	д	20	б	30	г

Тест 6. Функции нескольких переменных

1 Указать функцию двух переменных:

а) $y = 5x^2 - 4x$; б) $z = xy^2$; в) $u = x^2 + y^2 - 3z$; г) $y = e^{-x}$.

2 Указать функцию трех переменных:

а) $y = 5x^2 - 4x$; б) $z = xy^2$; в) $u = x^2 + y^2 - 3z$; г) $y = e^{-x}$.

3 Частная производная z'_x функции $z = x^2 + 8y^3 - 4xy + 1$ имеет вид:

а) $2x + 24y - 4$; б) $2x - 4y$; в) $24y^2 - 4x$; г) $x^2 - 4y + 1$.

4 Частная производная z'_y функции $z = x^2 + 8y^3 - 4xy + 1$ имеет вид:

а) $2x + 24y - 4$; б) $2x - 4y$; в) $24y^2 - 4x$; г) $x^2 - 4y + 1$.

5 Сумма частных производных $z'_x + z'_y$ функции $z = (2x + y)(x - 2y)$ равна:

а) $x - 7y$; б) $4x - 3y$; в) $-3x - 4y$; г) $2x - 2y$.

6 Частная производная z'_y функции $z = \dfrac{x - y}{x + y}$ имеет вид:

а) $\dfrac{x - y}{(x + y)^2}$; б) $\dfrac{-2x - 2y}{(x + y)^2}$; в) $\dfrac{2y}{(x + y)^2}$; г) $\dfrac{-2x}{(x + y)^2}$.

7 Частная производная z'_x функции $z = \ln(xy)$ имеет вид:

а) $\dfrac{1}{xy}$; б) $\dfrac{x + y}{xy}$; в) $\dfrac{1}{x^2 y^2}$; г) $\dfrac{1}{x}$.

8 Частная производная z'_y функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет вид:

а) $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; б) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; в) $\dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; г) $\dfrac{y}{x + y}$.

9 Частная производная z'_x функции $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$ имеет вид:

а) $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; б) $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; в) $-\dfrac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$; г) $\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

10 Сумма частных производных $z'_x + z'_y$ функции $z = \cos^2 x + \sin^2 x$ имеет вид:

а) $2\cos x + 2\sin y$; в) $(\cos x + \sin y)^2$;

б) $\sin 2y - \sin 2x$; г) $2\sin x + 2\cos y$.

11 Частная производная z'_x функции $z = x^3 + 12xy$ в точке M(1;1) равна:

а) 15; б) 12; в) 13; г) 14.

12 Частная производная z'_y функции $z = x^3 + 12xy$ в точке M(1;1) равна:

а) 15; б) 12; в) 13; г) 14.

13 Сумма частных производных $z'_x + z'_y$ функции $z = 3 - 2x^3 - y^2$ в точке M(1;2) равна:

а) –4; б) –8; в) –14; г) –10.

14 Сумма частных производных $z'_x + z'_y$ функции $z = xy + \dfrac{x}{y}$ в точке M(–2; –1) равна:

а) –2; б) 0; в) 4; г) 2.

15 Сумма частных производных $z'_x + z'_y$ функции $z = x^{2y}$ в точке M(1;1) равна:

а) –2; б) 0; в) 4; г) 2.

16 Полный дифференциал функции $z = x^2 + 3xy + y^3 - x$ имеет вид:

а) $dz = \left(x^2 - x\right)dx + y^3 dy$;

б) $dz = \left(2x + 3y + 3y^2 - 1\right)dx + (3x + y^3)dy$;

в) $dz = x^2 dx + (3xy + y^3)dy$;

г) $dz = \left(2x + 3y - 1\right)dx + (3x + 3y^2)dy$.

17 Площадь фигуры, представляющей область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, равна:

а) 2π; б) 4π; в) π; г) 16π.

18 Координаты $\left(x_0; y_0\right)$ критической точки функции $z = 2x + x^2 + y^2$ равны:

а) (–1;0); б) (0; –1); в) (1; 0); г) (0; 1).

19 Пусть $\left(x_1; y_1\right)$ и $\left(x_2; y_2\right)$ – координаты критических точек функции $z = x^3 + y^2 - 2xy + 1$. Найти $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$:

а) 0; б) $\dfrac{4}{3}$; в) $\dfrac{4}{9}$; г) $\dfrac{5}{6}$.

20 Локальный экстремум функции $z = 4x + 4y - x^2 - y^2$ равен:

а) –8; б) 4; в) –4; г) 8.

21 Частная производная второго порядка z''_{xx} функции $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ имеет вид:

а) $6x^2 - 6y$; б) $12x$; в) -6; г) $12y$.

22 Частная производная второго порядка z''_{yy} функции $z = \cos x \cdot \left(4x - 3y^2\right)$ имеет вид:

а) $-6\cos x$; б) $-6y \cdot \cos x$; в) $-6y$; г) $4\cos x - 6y$.

23 Частная производная второго порядка z''_{xy} функции $z = e^{xy}$ имеет вид:

а) xe^{xy}; б) ye^{xy}; в) $e^{xy}\left(1 + xy\right)$; г) $e^{xy}\left(y + x\right)$.

24 Частная производная второго порядка z''_{xx} функции $z = xy\left(x - y\right)$ равна:

а) 2; б) –2; в) 0; г) 4.

25 Сумма частных производных второго порядка $z''_{xy} + z''_{yy}$ в точке M(–1;0) равна:

а) 14; б) 12; в) 13; г) 15.

26 Функция двух переменных имеет вид: $z = x^3 y - xy^3$. Найти значение выражения $\dfrac{z'_x + z'_y}{z''_{xx} \cdot z''_{yy} + 25}$ в точке M(1;2):

а) $\dfrac{1}{13}$; б) $\dfrac{1}{14}$; в) $\dfrac{1}{12}$; г) $\dfrac{1}{15}$.

27 Функция трех переменных имеет вид: $u = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$. Найти значение выражения $u'_x + u'_y + u'_z$ в точке M(1;1;1).

а) $\dfrac{7}{4}$; б) $\dfrac{1}{4}$; в) $\dfrac{5}{4}$; г) $\dfrac{3}{2}$.

28 Координаты градиента функции $z = 7 - x^2 - y^2$ в точке M(1;2) равны:

а) (2; –4); б) (2;4); в) (–2;4); г) (–2; –4).

29 Координаты градиента функции $z = \left(x - y\right)^2$ в точке M(0;3) равны:

а) (0;-3); б) (–6;6); в) (–2;2); г) (0;6).

30 Длина вектора $\overrightarrow{grad}\, z$ функции $z = x + e^{x+5y}$ в точке M(0;0) равна:

а) $\sqrt{29}$; б) 1; в) $\sqrt{26}$; г) 5.

31 Производная функции $u = 2x^2 + y^2 - z^2$ в точке М(1;1;1) по направлению вектора $\vec{s} = (4;0;3)$ равна:

а) –2; б) 2; в) 5; г) 4.

32 Производная функции $u = xy^2 - y\sqrt{z}$ в точке А(1;-2;1) по направлению к точке В(4; –2;5) равна:

а) 1,6; б) 1,2; в) 4; г) 3,2.

33 Наибольшее значение функции $z = xy + x^2$ в области D, ограниченной прямыми, заданными уравнениями $x = -1$, $x = 1$; $y = -2$; $y = 1$, равно:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

34 Сумма наибольшего и наименьшего значений функции $z = x^2 - y^2 + 6x$ в области D, ограниченной прямыми, заданными уравнениями $x = 0$; $y = 0$; $y - x = 5$, равно:

а) –25; б) 30; в) 55; г) –30.

35 Составить функцию Лагранжа для функции $z = 2x + y$, имеющей условный экстремум при $x^2 + y^2 = 1$:

а) $2x + y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$; в) $\lambda(2x + y + x^2 + y^2 - 1)$;

б) $2x + y + \lambda\left(x^2 + y^2\right)$; г) $\lambda(2x + y + x^2 + y^2)$.

36 Найти $L'_x + L'_y + L'_z$ для функции $u = 2x + y - 2z$ при условии, что $x^2 + y^2 + z^2 = 36$:

а) $-2 + 2z\lambda$; в) $2 + 2x\lambda$;

б) $1 + 2\lambda \cdot (x + y + z)$; г) $1 + 2y\lambda$.

37 Функция $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ имеет условный экстремум при условии, что $x + y = 2$. Координаты точки, подозрительной на условный экстремум, равны:

а) (1;0); б) (1;1); в) (–1;0); г) (–1; –1).

38 Функция $z = x + 2y$ имеет условный экстремум при условии, что $x + y = 2$. Найти $\lambda_1 \cdot \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 – множители Лагранжа:

а) $-\dfrac{1}{4}$; б) 0; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $-\dfrac{1}{2}$.

39 Условный максимум функции $z = xy$ при $x^2 + y = 3$ равен:

а) 0; б) –2; в) 1; г) 2.

40 Сумма частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке M(1;–2;2) для функции $z^3-4xz+y^2-4=0$ равна:

а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{2}$; г) -1.

41 Частная производная $\frac{\partial z}{\partial u}$ сложной функции $z=xy$; $\begin{cases} x=u^2+v^2, \\ y=u^2-v^2 \end{cases}$ имеет вид:

а) u^3+v^3; б) u^4-v^4; в) $4u^3-4v^3$; г) $4u^3$.

42 Частная производная $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z=\ln(2x+y)$, $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-t-1 \end{cases}$ имеет вид:

а) $\frac{1}{t^2-1}$; б) $\frac{1}{t-1}$; в) $\frac{1}{t+1}$; г) $\frac{2}{t^2-1}$.

43 Уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2-y^2$ (гиперболический параболоид) в точке M(1;1;0) имеет вид:

а) $2x-2y-z=0$; в) $2x-2y-z=3$;

б) $-2x-2y-z=-3$; г) $2x-2y+z=5$.

44 Уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2yz+2x^2z-3xyz+2=0$ в точке M(1;0;–1) имеет вид:

а) $2x-2y-z=0$; в) $2x-2y-z=3$;

б) $-2x-2y-z=-3$; г) $2x-2y+z=5$.

45 Уравнение нормали к поверхности $z=x^2-y^2$ (гиперболический параболоид) в точке M(1;1;0) имеет вид:

а) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$; в) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$;

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$; г) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-1}$.

Таблица 6 – Ответы

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
1	б	4	в	7	г
2	в	5	б	8	а
3	б	6	г	9	в

Окончание таблицы 6

Задание	Ответ	Задание	Ответ	Задание	Ответ
10	в	22	а	34	б
11	а	23	в	35	а
12	б	24	б	36	в
13	г	25	г	37	б
14	а	26	а	38	а
15	г	27	г	39	г
16	г	28	в	40	в
17	б	29	б	41	г
18	а	30	а	42	в
19	в	31	б	43	а
20	г	32	г	44	б
21	б	33	в	45	г

Тест 7. Ряды

1 Найти пятый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+8}$:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{32}{33}$; г) $\frac{31}{29}$; д) $\frac{32}{45}$.

2 Найти пятый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{120}$; в) $\frac{1}{25}$; г) $\frac{1}{240}$; д) 5.

3 Дан ряд $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots$. Найти общий член данного ряда:

а) $\frac{2n-1}{2^n}$; б) $\frac{n+1}{2^n}$; в) $\frac{n}{2^n}$; г) $\frac{1}{2^n}$; д) $\frac{2n+1}{4^n}$.

4 Дан ряд $\frac{1}{9}+\frac{4}{25}+\frac{9}{49}+\frac{16}{81}+\ldots$. Найти общий член данного ряда:

а) $\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$; в) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; д) $\frac{2n}{n^2+1}$.

б) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$; г) $\frac{n}{2n-1}$;

5 Если последовательность частичных сумм S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ предела не имеет при $n \to \infty$, то ряд называется:

а) расходящимся;
б) сходящимся;
в) геометрическим;
г) остаточным.

6 Закончить утверждение: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

7 Какие из данных рядов удовлетворяют необходимому условию сходимости:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$:

а) 1, 5; б) 2, 3; в) 2, 3, 4; г) 5.

8 Указать ряды, для которых выполняется необходимое условие сходимости, но они являются расходящимися:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^7}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^2+3n+1}$:

а) 3, 5; б) 1, 4; в) 1, 2, 4; г) 1, 2, 4, 5; д) 1, 2, 3, 5.

9 Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = q$, то:

а) $q = \infty$; б) $q = 0$; в) $q < 1$; г) $q \geq 1$.

10 Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является:

а) достаточным;
б) необходимым;
в) необходимым и достаточным.

11 Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, (a_n > 0)$ сходится, а $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = q$, где R_n – остаток ряда, то:

а) $q = 0$; б) $q = 1$; в) $q = \infty$; г) $q = -\infty$.

12 Установить, для каких рядов выполняется необходимый признак сходимости:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}:$$

а) 1, 2; б) 2, 3; в) 1, 2, 3, 4; г) 4.

13 По признаку Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\left(a_n>0\right)$ сходится, если:

а) $q>1$; б) $q\le 1$; в) $q<1$; г) $q=1$.

14 Установить, какие из рядов сходятся:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^2};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{n!};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{2^n}:$$

а) 1, 2; б) 2, 3; в) 1, 2, 3, 4; г) 4.

15 Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\left(a_n>0\right)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то этот ряд сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$. Данный признак называется признаком:

а) Даламбера; в) интегральным;
б) Коши; г) сравнения.

16 Установить, какие из рядов сходятся:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n;\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n;\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}:$$

а) 1, 2; б) 2, 3; в) 1, 2, 3, 4; г) 4.

17 Если для знакоположительных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ отношение $\frac{a_n}{b_n}$ стремится к некоторому положительному и конечному пределу при $n\to\infty$, то:

а) ряды сходятся;
б) о поведении рядов ничего нельзя сказать;
в) ряды сходятся или расходятся одновременно;
г) один из рядов сходится, а другой расходится.

18 Установить, какие из рядов сходятся:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}}{n^2}\ ;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi n}{3}}{2^n}\ ;\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln\left(n!\right)}\ ;\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+1}\ :$$

а) 1, 2; б) 2, 3; в) 1, 2, 3, 4; г) 4.

19 Закончить утверждение: обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится:

а) при $p \ge 1$; в) при $p > 1$;
б) при $p \le 1$; г) при $0 < p < 1$.

20 Пусть для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n > 0$ выполнены условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд … , причем его сумма S ...

а) сходится, $0 < S < a_1$; д) сходится, $S < 0$;
б) сходится, $S \ge a_1$; г) сходится, $S = a_n$.
в) расходится, $S \ge a_1$;

21 Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ с точностью 0,01:

а) 0,37; б) 0; в) 0,83; г) 8,21; д) 0,51.

22 Если знакочередующийся ряд сходится условно, то ряд составленный из положительных членов …, ряд составленный из отрицательных членов … :

а) расходится, расходится;
б) сходится, расходится;
в) сходится, сходится;
г) расходится, сходится.

23 Указать ряды, которые сходятся условно:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+4};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n;$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n!$:

а) все; б) 1, 2, 4; в) 4, 5; г) 1, 2; д) 3, 5.

24 Если областью сходимости степенного ряда является одна точка x_0, то радиус сходимости $R = \ldots$:

а) 0; б) ∞; в) x_0.

25 Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ можно найти по формуле:

а) $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$; в) $R = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|}$; д) $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$.

б) $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$; г) $R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}$;

26 Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ сходится при $x = x_0$, то он абсолютно сходится и при любом x, таком что:

а) $|x| < |x_0|$; б) $|x| > |x_0|$; в) $x < x_0$; г) $x > x_0$.

27 Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n \cdot n!}{2n(n+1)}x^n$:

а) 2; б) 0; в) 1; г) 5.

28 Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}$:

а) $(-2;\, 2)$; в) $[-2;\, 2)$; д) $(-\infty;\, +\infty)$.

б) $(-2;\, 2)$; г) $(-2;\, 2]$;

29 Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, |x| < \infty$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}, |x| < \infty$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, |x| < \infty$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!}, |x| < \infty$.

Список литературы

1 **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2005. – 315 с.

2 Высшая математика. Общий курс : учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск : Выш. шк., 2000. – 351 с.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика : учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.

4 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

6 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : учебник для вузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 356 с.

7 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.

8 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болтов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – Т. 1. – 464 с.

9 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – М. : Высш. шк., 1973. – 478 с.

10 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 т. / Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 1991. – Т. 2–3.

11 **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с.