ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методический рекомендации к самостоятельной работе студентов всех специальностей, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам, заочной формы обучения

Могилёв 2016

УДК 517
ББК 22.1я 73
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» января 2016 г., протокол № 5

Составители: Л. А. Данилович;
О. А. Маковецкая;
И. И. Маковецкий;
С. Ф. Плешкунова

Рецензент И. Д. Камчицкая

Приведены примеры решения типовых задач по изучаемым разделам курсов «Высшая математика», «Математика» и задачи для самостоятельной подготовки к аудиторной контрольной работе студентов всех специальностей.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная вёрстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 24.01.2014.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилёв.

1 Вопросы по программе курса

Тема 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1 Матрицы, основные понятия, линейные операции над матрицами. Произведение матриц. Транспонирование матрицы.

2 Определители второго и третьего порядков, их свойства. Определитель n-го порядка.

3 Обратная матрица и ее построение.

4 Ранг матрицы. Нахождение ранга.

5 Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия.

6 Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. Решение невырожденных систем матричным методом.

7 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

8 Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

9 Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

10 Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами.

11 Координаты векторов. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Понятие о базисе на плоскости и в пространстве.

12 Скалярное произведение двух векторов, его свойства, выражение в координатной форме, приложения.

13 Векторное произведение двух векторов, его свойства, выражение в координатной форме, приложения.

14 Смешанное произведение трех векторов, его свойства, геометрическое истолкование, выражение в координатной форме, приложения.

15 Полярная система координат. Связь между декартовыми и полярными координатами точки.

16 Прямая на плоскости, различные виды уравнения прямой. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.

17 Плоскость, различные виды уравнения плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

18 Прямая в пространстве, различные виды уравнений прямой. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

19 Окружность, эллипс, вывод канонического уравнения. Исследование формы эллипса.

20 Гипербола, вывод канонического уравнения. Исследование формы гиперболы, асимптоты гиперболы.

21 Парабола, вывод канонического уравнения. Исследование формы параболы.

22 Пространство R_n. Преобразования пространства. Линейное преобразование, линейный оператор.

23 Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.

24 Цилиндрические поверхности с образующими, параллельными одной из координатных осей.

25 Канонические уравнения алгебраических поверхностей второго порядка. Эллипсоид, гиперболоид, параболоид, конус, цилиндр. Метод сечений при исследовании формы поверхностей.

Тема 2. Введение в математический анализ

1 Понятие предела числовой последовательности. Предел функции в точке и на бесконечности.

2 Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции в точке и на отрезке.

3 Точки разрыва функции и их классификация. Непрерывность элементарных функций и их классификации.

4 Замечательные пределы.

5 Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции и их применение к вычислению пределов.

6 Функции, непрерывные на отрезке, их свойства.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1 Производная функции: определение, обозначение, геометрический и механический смысл. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой.

2 Непрерывность дифференцируемой функции.

3 Правила дифференцирования функции одной переменной.

4 Производные сложной и обратной функций.

5 Производные основных элементарных функций. Таблица производных.

6 Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

7 Дифференциал функции: определение, обозначение, связь с производной, свойства, инвариантность формы, геометрический смысл, применение в приближенных вычислениях значений функции.

8 Производные и дифференциалы высших порядков.

9 Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

10 Основные разложения элементарных функций по формуле Тейлора.

11 Правило Бернулли-Лопиталя, его применение к вычислению пределов.

12 Монотонность и экстремумы функции одной переменной.

13 Выпуклость и точки перегиба графика функции одной переменной.

14 Асимптоты графика функции.

15 Полное исследование и построение графика функции одной переменной.

2 Примеры решения задач

2.1 Линейная и векторная алгебра

Пример 1

Найти матрицу $3A - AB$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

При умножении матрицы на число получаем матрицу тех же размеров, причём все элементы матрицы умножаются на это число, следовательно,

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 9 & -6 & 6 \\ 12 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы получить элемент c_{ij} матрицы произведения $C = A \cdot B$, надо элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

$$AB=\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&-2&2\\4&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&-3&5\\3&-1&4\\5&7&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-4)+3\cdot3-1\cdot5 & 1\cdot(-3)+3\cdot(-1)-1\cdot7 & 1\cdot5+3\cdot4-1\cdot3\\ 3\cdot(-4)-2\cdot3+2\cdot5 & 3\cdot(-3)-2\cdot(-1)+2\cdot7 & 3\cdot5-2\cdot4+2\cdot3\\ 4\cdot(-4)+3\cdot3+5\cdot5 & 4\cdot(-3)+3\cdot(-1)+5\cdot7 & 4\cdot5+3\cdot4+5\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-13&14\\-8&7&13\\18&20&47\end{pmatrix}.$$

При сложении (вычитании) матриц нужно сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц.

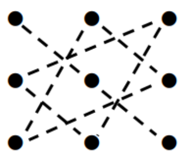
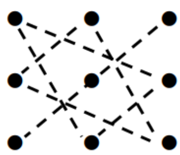
$$3A-AB=\begin{pmatrix}3&9&-3\\9&-6&6\\12&9&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-13&14\\-8&7&13\\18&20&47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&22&-17\\17&-13&-7\\-6&-11&-32\end{pmatrix}.$$

Пример 2

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-3&5\\-1&6&7\end{vmatrix}$.

Решение

Определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$$  $-$  $=$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

То есть

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&-3&5\\-1&6&7\end{vmatrix}=1\cdot(-3)\cdot7+4\cdot6\cdot3+2\cdot5\cdot(-1)-(-1)\cdot(-3)\cdot3-$$

$$-6\cdot5\cdot1-4\cdot2\cdot7=-54.$$

Пример 3

Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 & -8 \end{vmatrix}$.

Решение

Для вычисления определителя воспользуемся формулами Лапласа:

$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + a_{i4} \cdot A_{i4}$ – разложение определителя по элементам *i*-й строки;

$\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + a_{4j} \cdot A_{4j}$ – разложение определителя по элементам *j*-го столбца.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}.

Разложим определитель, например, по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+\ 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -8 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 48 + 50 + 48 - 30 - 60 - 64 +$$

$$+\ 2 \cdot (-32 - 25 - 32 + 20 + 40 + 32) + 3 \cdot (32 + 15 + 24 - 20 - 24 - 24) -$$

$$-\ 5 \cdot (20 + 12 + 12 - 16 - 12 - 15) = -8 + 6 + 9 - 5 = 2\,.$$

Пример 4

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, и сделать проверку.

Решение

Матрица A^{-1} называется обратной матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т. е. чтобы определитель матрицы $|A| \neq 0$. Обратная матрица определяется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A.

Покажем, что данная матрица невырожденная, тогда она имеет обратную матрицу. Действительно,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 8 - 18 - 0 - 3 + 18 = 5 \neq 0.$$

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 + 6) = 0;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-9 - 4) = 13;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 6) = -7;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-(3-8)=5;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0-6=-6.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 13 & 9\\ 0 & 5 & 5\\ 2 & -7 & -6\end{pmatrix}.$$

Проверим правильность полученного результата:

$$A^{-1}A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 13 & 9\\ 0 & 5 & 5\\ 2 & -7 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3+26-18 & -9+0+9 & -12+39-27\\ 0+10-10 & 0+0+5 & 0+15-15\\ 2-14+12 & 6+0-6 & 8-21+18\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Пример 5

Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 2 & -1 & 2\\ 8 & 5 & -3 & 4\\ 3 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

- перестановка строк и столбцов;
- умножение строк и столбцов на число, отличное от 0;

– прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число.

Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

С помощью элементарных преобразований над строками матрицы приведем ее к ступенчатому виду. Ранг матрицы при этом равен числу ненулевых строк.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-1&1\\4&2&-1&2\\8&6&-3&4\\3&3&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II}\\ \mathrm{I}\cdot(-4)+\mathrm{III}\\ \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{IV}\cdot 2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&-1&1\\0&-2&1&0\\0&-2&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\mathrm{II}-\mathrm{III}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&2&-1&1\\0&-2&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&-1&1\\0&-2&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=3.$$

Пример 6

Дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-2;\\4x_1-3x_2+x_3=1;\\2x_1+x_2-x_3=1.\end{cases}$$

Требуется:

1) решить СЛАУ по формулам Крамера;

2) записать СЛАУ в матричной форме и решить ее матричным способом;

3) решить СЛАУ методом Гаусса.

Решение

1 Решим систему по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta-$ главный определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных;

Δ_i $(i=\overline{1,3})-$ определитель системы, полученный путем замены i-го столбца главного определителя системы столбцом свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3+2-4-6-1+4 = -2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6-1+1-3+2+1 = -6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-4-4+2-1-8 = -16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3-8+2-12-1-4 = -26.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-26}{-2} = 13.$$

Итак, решение системы: $x_1 = 3, x_2 = 8, x_3 = 13.$

2 Решим СЛАУ матричным способом.

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда данную систему можно записать в виде $AX = B$, откуда $X = A^{-1}B$ (A^{-1} – обратная матрица по отношению к матрице A).

Найдем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} $\left(i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}\right)$ – алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{ij} матрицы A: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (M_{ij} – миноры, соответствующие элементам a_{ij} матрицы A).

$$|A| = \Delta = -2;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4-2 \\ -12+1-5 \\ -20+1-7 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$

Итак, решение системы: $x_1 = 3, x_2 = 8, x_3 = 13.$

3 Решим СЛАУ методом Гаусса.

С помощью элементарных преобразований строк расширенную матрицу системы $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ приведем к следующему виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{I}\cdot 4-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot 2-\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}-\mathrm{III}\cdot 7 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 26 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}:2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right).$$

Так как $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$, то система совместна и имеет решение. Полученной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ x_3 = -2; \\ \qquad 7\,x_2 - 5x_3 = -9; \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 13, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной. Из данной системы следует, что $x_3 = 13,\ x_2 = \dfrac{5x_3 - 9}{7} = 8,\ x_1 = -2 + x_3 - x_2 = -2 + 13 - 8 = 3.$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 8, x_3 = 13.$

Пример 7

Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Найти:

1) координаты вектора $4\vec{a} - 5\vec{b}$;

2) разложение вектора $\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

3) направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Решение

1 Пусть $\vec{a} = \left(x_1; y_1\ ; z_1\right), \vec{b} = \left(x_2; y_2\ ; z_2\right)$. Тогда $\lambda\vec{a} = \left(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\right)$, $\vec{a} + \vec{b} = \left(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\right)$.

По условию координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны: $\vec{a} = \left(2;3;-1\right)$, $\vec{b} = \left(0;-3;-2\right)$. Следовательно, координаты вектора $4\vec{a} - 5\vec{b}$ равны: $4\vec{a} - 5\vec{b} = \left(4\cdot 2 - 5\cdot 0; 4\cdot 3 - 5\cdot\left(-3\right); 4\cdot\left(1\right) - 5\cdot\left(-2\right)\right) = \left(8;27;6\right)$.

Итак, $4\vec{a} - 5\vec{b} = \left(8;27;6\right)$.

2 Разложение вектора $\vec{a} = \left(x_1; y_1\ ; z_1\right)$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$.

Разложим вектор $\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) + \left(-3\vec{j} - 2\vec{k}\right) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k} - 3\vec{j} - 2\vec{k} =$$

$$= \vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{5}{2}\vec{k}.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} - \dfrac{3}{2}\vec{j} - \dfrac{5}{2}\vec{k}$.

3 Направление вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ определяется углами α, β, γ, образованными вектором $\vec{a}$ с положительными направлениями осей

Ox, Oy и Oz соответственно. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора и определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \; \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

где $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$, то получаем

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}, \; \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}, \; \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{14}}{14}.$$

Пример 8

Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти:

1) длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$;
2) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
4) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
5) смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение

1 Длина вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}.$$

В нашем случае $\vec{a} + \vec{b} = (-4+3; 2-5; -1+2) = (-1; -3; 1)$. Следовательно, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$.

2 Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ найдем по формуле

$$(\vec{a}; \vec{\mathrm{b}}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Так как $\vec{a} = (-4; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; -5; 2)$, то $(\vec{a}; \vec{b}) = -4 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 2 = -24$.

Итак, $(\vec{a}; \vec{b}) = -24$.

3 Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\quad\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$

$$\left(\vec{a};\vec{b}\right)=-24,\ \left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(-4\right)^2+2^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{21};\qquad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+\left(-5\right)^2+2^2}=\sqrt{38}.$$

$$\cos\varphi=\frac{-24}{\sqrt{21}\sqrt{38}}=-\frac{24}{\sqrt{798}},\ \varphi=\arccos\left(-\frac{24}{\sqrt{798}}\right)=\pi-\arccos\frac{24}{\sqrt{798}}.$$

4 Векторное произведение векторов $\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ и $\vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$ найдем по формуле

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

В нашем случае $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 2 & -1\\ 3 & -5 & 2\end{vmatrix}.$

Вычислим определитель разложением по элементам первой строки.

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 2 & -1\\ 3 & -5 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -5 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}+5\vec{j}+14\vec{k}.$$

Итак, $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=-2\vec{i}+5\vec{j}+14\vec{k}$.

5 Смешанное произведение векторов $\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$ и $\vec{c}=\left(x_3;y_3;z_3\right)$ найдем по формуле

$$\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

$$\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}-4 & 2 & -1\\ 3 & -5 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=40-9+4-5+24-12=42.$$

Таким образом, $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)=42$.

Пример 9

Даны четыре точки: $A(4;1;0)$, $B(2;2;1)$, $C(6;3;1)$, $D(2,0,3)$.
Требуется:
1) найти внутренний угол треугольника ABC при вершине B;
2) найти площадь треугольника ABC;
3) найти объем пирамиды $ABCD$;
4) определить, образуют ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ базис.

Решение

1 Внутренний угол треугольника ABC при вершине B найдем как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Косинус угла α между векторами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ определяется по формуле

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{a};\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{MN}, M(x_1,y_1,z_1), N(x_2,y_2,z_2)$ находятся по формуле

$$\overrightarrow{MN}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA}=(4-2;1-2;0-1)=(2;-1;-1),\ \overrightarrow{BC}=(6-2;3-2;1-1)=(4;1;0).$$

$$\cos\angle BAC=\frac{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{2\cdot4-1\cdot1-1\cdot0}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+0^2}}=\frac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{17}}=\frac{7}{\sqrt{102}}.$$

$$\angle ABC=\arccos\frac{7}{\sqrt{102}}.$$

2 Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, определяется по формуле

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a};\vec{\mathrm{b}}\right]\right|.$$

Найдем площадь треугольника ABC как площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right]\right|.$$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

$$\left[\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = \vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Длина вектора $\left[\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right]$

$$\left|\left[\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right]\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{53}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{53}.$$

3 Объем пирамиды $ABCD$ вычислим по формуле

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|,$$

где $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ – смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2-4;\ 2-1;\ 1-0) = (-2;1;1),\ \overrightarrow{AC} = (2;2;1),\ \overrightarrow{AD} = (-2;-1;3).$$

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12-2-2+4-6-2 = -20.$$

Значит, $V_{ABCD} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$.

4 Три вектора образуют базис в пространстве, если они некомпланарны, т. е. их смешанное произведение не равно нулю. Так как $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12-2-2+4-6-2 = -20 \neq 0$, то векторы $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ некомпланарны и, значит, образуют базис в пространстве.

Пример 10

Найти скалярное произведение векторов $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(5\vec{a}-6\vec{b}\right)$, если $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=6$, $\widehat{\left(\vec{a};\vec{b}\right)}=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение

$$\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(5\vec{a}-6\vec{b}\right)=15\left(\vec{a};\vec{a}\right)-18\left(\vec{a};\vec{b}\right)-10\left(\vec{a};\vec{b}\right)+12\left(\vec{b};\vec{b}\right)=$$

$$=\left[\left(\vec{a};\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2,\left(\vec{b};\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|^2\right]=15\left|\vec{a}\right|^2-28\left(\vec{a};\vec{b}\right)+12\left|\vec{b}\right|^2=\left[\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\widehat{\left(\vec{a};\vec{b}\right)}\right]=$$

$$=15\cdot4^2-28\cdot4\cdot6\cdot\cos\frac{\pi}{3}+12\cdot6^2=240-672\cdot\frac{1}{2}+432=336.$$

2.2 Аналитическая геометрия на плоскости

Пример 11

Даны вершины треугольника ABC: $A(-2;-2)$, $B(1;7)$, $C(11;3)$.
Найти:
1) уравнение стороны AB и ее длину;
2) уравнение высоты CH;
3) уравнение медианы AM и ее длину;
4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

Решение

1 Уравнение прямой, проходящей через точки $M\left(x_1;y_1\right)$ и $M\left(x_2;y_2\right)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Тогда

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{9} \quad\Rightarrow\quad 3x-y+4=0$$ – уравнение прямой (стороны) AB.

2 Уравнение высоты CH получим, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ параллельно вектору $\vec{s}\left(a_1;a_2\right)$:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Так как $C(11;\ 3) \in CH,\ CH \perp AB$, то нормальный вектор $\vec{N}_{AB} = (3;-1)$ является направляющим для прямой *CH*, т. е. $\vec{s}_{CH} = (3;-1)$. Следовательно, $\dfrac{x - 11}{3} = \dfrac{y - 3}{-1} \Rightarrow x - 11 = 9 - 3y \Rightarrow x + 3y - 20 = 0 -$ уравнение стороны *CH*.

Длину высоты *CH* найдем как расстояние от точки *C* до прямой *AB*, используя формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $Ax + By + C = 0 -$ уравнение данной прямой;

$x_0, y_0 -$ координаты данной точки.

Имеем

$$|CH| = \frac{|3 \cdot 11 - 1 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{34}{\sqrt{10}} = \frac{17\sqrt{10}}{5}.$$

3 Так как *AM* – медиана, то точка *M* – середина отрезка *BC*. Координаты середины отрезка находим по формулам:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2};\ \ y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Тогда $x_M = \dfrac{1 + 11}{2} = 6;\ y_M = \dfrac{7 + 3}{2} = 5 \Rightarrow M(6;\, 5)$.

Уравнение прямой *AM*

$$\frac{x - (-2)}{6 - (-2)} = \frac{y - (-2)}{5 - (-2)} \quad \Rightarrow 7x - 8y - 2 = 0.$$

Длину медианы *AM* найдем как расстояние между двумя точками, используя формулу

$$d(M_1;\ M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

где $M_1(x_1; y_1),\ M_2(x_2; y_2)$.

Имеем $|AM| = d(A;M) = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}.$

4 Так как прямая, проходящая через точку *C* параллельно прямой *AB*, имеет тот же нормальный вектор, что и прямая *AB*, т. е. $\vec{N}_{AB} = \vec{N}_{CE} = (3; -1)$, то уравнение прямой *CE* запишем, используя

уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{N}=(A;B)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Следовательно, $3\cdot(x-11)-1\cdot(y-3)=0 \Rightarrow 3x-y-30=0-$ уравнение стороны AB.

Ответ: 1) AC: $5x-13y-16=0$; 2) CH: $x+3y-20=0$; $|CH|=\dfrac{17\sqrt{10}}{5}$; 3) AM: $7x-8y-2=0$; $|AM|=\sqrt{113}$; 4) CE: $3x-y-30=0$.

2.3 Аналитическая геометрия в пространстве

Пример 12

Даны четыре точки: $A(-1,3,4)$, $B(3,2,-4)$, $C(1,5,-1)$, $D(2,0,3)$.

Требуется:

1) составить уравнение прямой AB и указать ее направляющий вектор;

2) составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB;

3) найти угол между прямыми AB и CD;

4) составить уравнение плоскости ABC и указать ее нормальный вектор;

5) составить уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

6) найти угол между прямой AD и плоскостью ABC;

7) составить уравнение плоскости α, проходящей через точки A,C, параллельной прямой BD;

8) найти расстояние от точки B до плоскости α.

Решение

1 Канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Тогда

$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{-8}$ – канонические уравнения прямой AB;

$\vec{s}=(4,-1,-8)$ – направляющий вектор прямой AB.

2 Так как искомая плоскость перпендикулярна прямой AB, то

направляющий вектор прямой является нормальным вектором плоскости. Значит, $\vec{n}=\vec{s}=(4,-1,-8)$ – нормальный вектор плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A,B,C)$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Следовательно, искомое уравнение

$$4(x-2)-y-8(z-3)=0 \quad \text{или} \quad 4x-y-8z+16=0.$$

3 Косинус угла между прямыми найдем по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}},$$

где $\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2}$ – направляющие векторы прямых, $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$, $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

В нашем случае $\vec{s}_1=\overrightarrow{AB}=(4,-1,-8)$, $\vec{s}_2=\overrightarrow{CD}=(1,-5,4)$. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{4+5-32}{\sqrt{16+1+64}\sqrt{1+25+16}}=\frac{-23}{9\sqrt{42}};$$

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{23}{9\sqrt{42}}\right)=\pi-\arccos\frac{23}{9\sqrt{42}}.$$

4 Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Тогда $\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-4 \\ 4 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \quad 21(x+1)+4(y-3)+10(z-4)=0,$

$21x+4y+10z-31=0$ – общее уравнение плоскости ABC;

$\vec{n}=(21,4,10)$ – нормальный вектор плоскости.

5 Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=(m,n,p)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальный вектор плоскости ABC является направляющим вектором искомой прямой, т. е. $\vec{s}=\vec{n}=(21,4,10)$. Значит, $\frac{x-2}{21}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{10}$ – канонические уравнения прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC.

6 Синус угла между прямой и плоскостью найдем по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $\vec{n}-$ нормальный вектор плоскости, $\vec{n}=(A,B,C)$;

$\vec{s}-$направляющий вектор прямой, $\vec{s}=(m,n,p)$.

В нашем случае $\vec{n}=(21,4,10)$, $\vec{s}=\overrightarrow{AD}=(3,-3,-1)$.

Тогда

$$\sin\varphi=\frac{|63-12-10|}{\sqrt{441+16+100}\cdot\sqrt{9+9+1}}=\frac{41}{\sqrt{10583}};$$

$$\varphi=\arcsin\frac{41}{\sqrt{10583}}.$$

7 Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и параллельной вектору $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=0.$$

Искомая плоскость проходит через точки A,C и параллельна вектору $\overrightarrow{BD}=(-1,-2,7)$. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-4 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix}=0;\ 4(x+1)-9(y-3)-2(z-4)=0.$$

$4x-9y-2z+39=0-$ уравнение плоскости α .

8 Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ найдем по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следовательно, $d = \dfrac{|4 \cdot 3 - 9 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 39|}{\sqrt{16 + 81 + 4}} = \dfrac{41}{\sqrt{101}} \approx 4{,}1.$

2.4 Предел функции

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций ($\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$):

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2) $\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3) $1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;
4) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5) $\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
7) $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

Пример 13

Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{8 - x^3}$;
2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$;
3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$;
4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg} 3x}{\arcsin 2x}$;
5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x + 2}{3x - 1}\right)^{4x - 1}$.

Решение

1 Непосредственная подстановка в данное выражение предельного значения аргумента $x = 2$ приводит к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать (разложить на множители числитель и знаменатель).

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{8-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{(2-x)\left(4+2x+x^2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(5-x)}{4+2x+x^2}==\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

2 В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2+x}{x^4-3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}=3,$$

т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c}{x^n}=0\ (c\in R)$.

3 Непосредственная подстановка предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Используем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\arcsin 2x}=\left[\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \operatorname{tg}3x\sim 3x,\ \arcsin 2x\sim 2x\end{array}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2};$

5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)=1;\ \lim\limits_{x\to\infty}(4x-1)=\infty\right]=\left(1^\infty\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1+3}{3x-1}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3}{3x-1}\cdot(4x-1)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-3}{3x-1}}\ e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12-\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}}}=e^4.$$

2.5 Производная функции. Исследование функций с помощью производных

Правила дифференцирования.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

3) $(cu)' = c \cdot u'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Производная сложной функции.

Если $y = f(\varphi(x))$ − сложная функция, то, введя промежуточный аргумент $u = \varphi(x)$, получаем $y = f(u)$. Тогда $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Производная сложной функции равна произведению производной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента. Данное правило применимо и в случае нескольких промежуточных аргументов. Например, если $y = f(u)$, $u = u(v)$, $v = v(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Производные функции высших порядков.

Производная от первой производной $(y')'$ называется производной второго порядка и обозначается y'' или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично $y''' = (y'')'$, …, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные основных элементарных функций приведены в таблице 1.

Таблица 1

Производные основных элементарных функций	Производные сложных функций $(u = u(x))$
$(c)' = 0$	$(c)' = 0$
$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}u', \ (\alpha \in \mathbb{R})$
$(x)' = 1$	$(u)' = u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

Окончание таблицы 1

Производные основных элементарных функций	Производные сложных функций $(u = u(x))$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 14

Найти производные следующих функций:

1) $y = 3x^2 + \dfrac{1}{x^3} - 5\sqrt[3]{x} + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{2}{x} + 8;$

2) $y = x^2 \cdot \sin x;$

3) $y = \dfrac{\cos x}{x}.$

Решение

1) $$y = 3x^2 + \frac{1}{x^3} - 5\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{2}{x} + 8 = \left[\frac{1}{x^n} = x^{-n};\ \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{m}{n}}\right] =$$

$$= 3x^2 + x^{-3} - 5x^{\frac{1}{3}} + 4x^{-\frac{3}{5}} + 8.$$

$$y'=\left(3x^2+x^{-3}-5x^{\frac{1}{3}}+4x^{-\frac{3}{5}}+8\right)'=\left(3x^2\right)'+\left(x^{-3}\right)'-\left(5x^{\frac{1}{3}}\right)+\left(4x^{-\frac{3}{5}}\right)'+\left(8\right)'=$$

$$=3\cdot 2x-3\cdot x^{-4}-5\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)x^{-\frac{8}{5}}+0=6x-\frac{3}{x^4}-\frac{5}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}-\frac{12}{5x\cdot\sqrt[5]{x^3}};$$

2) $y=x^2\cdot\sin x$.

$$y'=\left(x^2\cdot\sin x\right)'=\left[(u\cdot v)'=u'v+uv';u=x^2,v=\sin x\right]=$$

$$=\left(x^2\right)'\cdot\sin x+x^2\cdot(\sin x)'=2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x;$$

3) $y=\dfrac{\cos x}{x}$

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\left[\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2};\ u=x^2,v=\sin x\right]=$$

$$=\frac{(\cos x)'\cdot x-\cos x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{-x\cdot\sin x-\cos x}{x^2}=-\frac{x\cdot\sin x+\cos x}{x^2}.$$

Пример 15

Найти производную и дифференциал функции $y=\ln\left(x^2+1\right)$ в точке $x_0=2$.

Решение

Принимая x^2+1 за u $\left(u=x^2+1\right)$ и применяя формулу $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$, имеем $y'=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2\right)'=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

При $x_0=2$ получаем $y'(2)=\dfrac{2\cdot 2}{2^2+1}=\dfrac{4}{5}=0{,}8$.

Дифференциал функции $y=f(x)$ находим по формуле $dy=f'(x)dx$. Тогда $dy=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$, $dy(2)=0{,}8dx$.

Пример 16

Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y = e^{\sin x}$.

Решение

Находим первую производную функции:

$$y' = \left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x}\left(\sin x\right)' = \cos x \cdot e^{\sin x}.$$

Находим вторую производную функции:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\cos x \cdot e^{\sin x}\right)' = \left(\cos x\right)' \cdot e^{\sin x} + \cos x\left(e^{\sin x}\right)' =$$

$$= -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos x \cdot e^{\sin x}\left(\sin x\right)' =$$

$$= -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x} = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right).$$

Дифференциал второго порядка обозначается $d^2 y$ и определяется по формуле $d^2 y = y'' dx^2$.

Тогда $d^2 y = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right) dx^2$.

2.6 Исследование функций на монотонность (возрастание и убывание) и экстремум

Критерий монотонности функции. Пусть функция $y = f\left(x\right)$ дифференцируема на интервале $\left(a;b\right)$. Тогда если $f'\left(x\right) > 0$ на $\left(a;b\right)$, то функция $y = f\left(x\right)$ возрастает на $\left(a;b\right)$; если же $f'\left(x\right) < 0$ на $\left(a;b\right)$, то функция $y = f\left(x\right)$ убывает на $\left(a;b\right)$.

Внутренние точки области определения функции $y = f\left(x\right)$, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называют *критическими точками 1-го рода.*

Достаточное условие экстремума. Пусть $x_0 -$ критическая точка функции $f(x)$. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка локального максимума; если же с минуса на плюс, то x_0 есть точка локального минимума (рисунок 1).

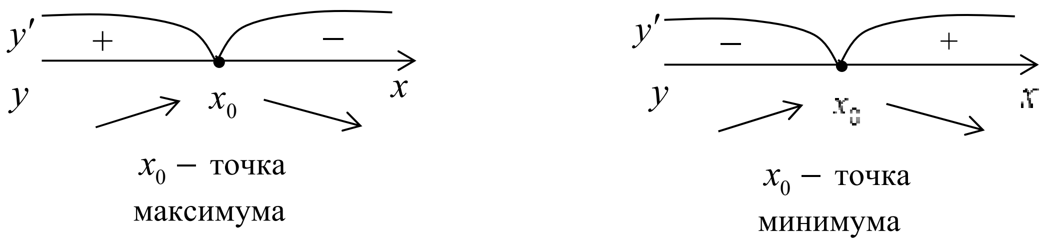


Рисунок 1

2.7 Выпуклые функции. Точки перегиба

Достаточное условие выпуклости. Если функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала $(a;b)$ имеет непрерывную вторую производную и $f''(x) \neq 0$, то на этом интервале функция выпуклая, причем:

- если $f''(x) > 0$, то выпукла вниз;
- если $f''(x) < 0$, то выпукла вверх.

Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется **точкой перегиба** функции, если в правой и левой окрестностях этой точки направления выпуклости противоположны (рисунок 2).

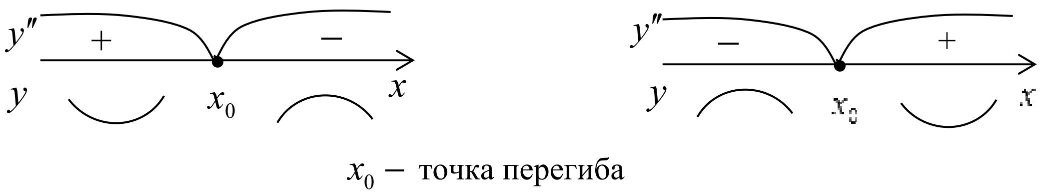


Рисунок 2

Пример 17

Дана функция $y = \dfrac{2x^2}{(x-1)^2}$. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции.

Решение

Область определения данной функции $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Находим критические точки:

$$y'=\left(\frac{2x^2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x^2)'\cdot(x-1)^2-(2x^2)\cdot\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{4x\cdot(x-1)^2-2x^2\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\cdot(4x^2-4x-4x^2)}{(x-1)^4}=\frac{-4x}{(x-1)^3}.$$

$y'=0$ при $x=0$, следовательно, $x=0$ – критическая точка функции. Других критических точек нет, так как точка $x=1$, в которой производная не существует, не принадлежит $D(y)$.

Исследуем знак производной функции на промежутках $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. Результаты исследования представлены на рисунке 3.

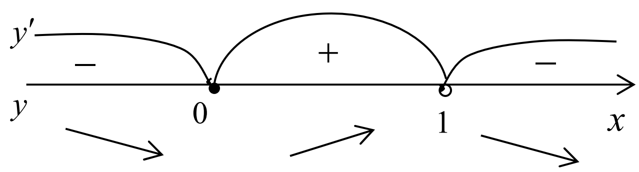


Рисунок 3

Функция убывает на интервалах $(-\infty;0)$ *и* $(1;+\infty)$, возрастает на интервале $(0;1)$. Таким образом, согласно достаточному признаку экстремума получаем, что $x=0$ – точка минимума, $y_{\min}=y(0)=0$.

2.7 Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она принимает на отрезке свое наибольшее и наименьшее значения, которые также называют глобальным максимумом и глобальным минимумом соответственно.

Правило отыскания глобального экстремума функции на отрезке $[a;b]$:

1) находим критические точки функции $f(x)$ внутри $[a;b]$;

2) вычисляем значения функции $f(x)$ в критических точках и значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$;

3) наибольшее из этих значений есть $y_{наиб}=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, а наименьшее – $y_{наим}=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Пример 18

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f\left(x\right)=3x-x^3$ на отрезке $\left[-2;3\right]$.

Решение

Находим критические точки $f\left(x\right)=3x-x^3$ внутри $\left[-2;3\right]$: $f'\left(x\right)=3-3x^2=3\left(1-x^2\right)=3\left(1-x\right)\left(1+x\right)$.

Так как $f'\left(x\right)=0$ при $x=-1$, $x=1$, то $x_1=-1,\ x_2=1$ – критические точки данной функции, причем обе они находятся внутри отрезка $\left[-2;3\right]$. Вычислив значение функции в этих точках и на концах отрезка, получим

$$f\left(-1\right)=-3+1=-2\ ;\ f\left(1\right)=3-1=2\ ;$$

$$f\left(-2\right)=3\left(-2\right)-\left(-2\right)^3=2\ ;\ f\left(3\right)=3\cdot 3-3^3=-18\ .$$

Следовательно, $y_{наиб}=\max\limits_{x\in\left[a;b\right]}f\left(x\right)=f\left(x\right)=2$, а $y_{наим}=\min\limits_{x\in\left[a;b\right]}f\left(x\right)=f\left(3\right)=-8.$

Пример 19

Дана функция $y=x^2+\dfrac{8}{x}$. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции.

Решение

Область определения данной функции $D(y)=\left(-\infty;\,0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

Найдем вторую производную:

$$y'=2x-\frac{8}{x^2}\ ,\ y''=2+\frac{16}{x^3}\ .$$

$y''=0$ при $x=-2$, следовательно, точка $x=-2$ есть точка, подозрительная на перегиб.

Точками 0 и –2 разбиваем область определения функции на интервалы. Определяем знак второй производной на каждом интервале (рисунок 4).

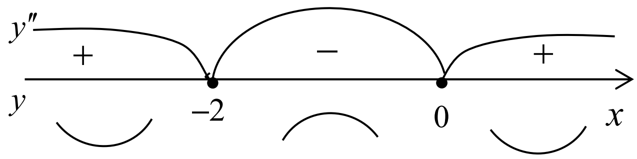


Рисунок 4

$y'' < 0$ при $x \in (-2, 0)$ и $y'' > 0$ при $x \in (-\infty, -2)$ и $x \in (0, +\infty)$, следовательно, функция выпукла вверх на интервале $(-2, 0)$ и выпукла вниз на интервалах $(-\infty, -2), (0; +\infty)$; $x = -2$ есть абсцисса точки перегиба. $y(2) = 2^2 + \frac{8}{2} = 8$. Следовательно, $M(2;8)$ – точка перегиба функции.

3 Задачи для самостоятельной работы

1 Найти матрицу $AB + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 26 & -22 & 22 \\ -9 & 3 & 27 \end{pmatrix}$.

2 Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Ответ: 9.

3 Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: –61.

4 Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, и сделать проверку.

Ответ: $-\dfrac{1}{26}\begin{pmatrix} -12 & -10 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & -11 \end{pmatrix}$.

5 Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $r(A)=3$.

6 Дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8; \\ 2x_1+4x_2-5x_3=11; \\ 4x_1-3x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

Требуется:

1) решить СЛАУ по формулам Крамера;

2) записать СЛАУ в матричной форме и решить ее матричным способом;

3) решить СЛАУ методом Гаусса.

Ответ: $(2;3;1)$.

7 Даны векторы $\vec{a}=5\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-6\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. Найти:

1) координаты вектора $3\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$;

2) разложение вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;

3) направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Ответ: 1) $3\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=(12;-8;4)$;

2) $2\vec{a}-\vec{b}=16\vec{i}-8\vec{j}+8\vec{k}$;

3) $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$; $\cos\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{38}}$; $\cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{38}}$.

8 Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$.

Найти:

1) длину вектора $\vec{a}-2\vec{b}$;

2) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

4) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

5) смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Ответ: 1) $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{17}$; 4) $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=8\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$;

2) $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=17$; 5) $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)=-23$.

3) $\arccos\dfrac{17}{\sqrt{406}}$;

9 Найти скалярное произведение векторов $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(4\vec{a}-5\vec{b}\right)$, если $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\widehat{\left(\vec{a};\vec{b}\right)}=\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: -109.

10 Даны четыре точки: $A(3,1,2)$, $B(-1,0,1)$, $C(-1,1,3)$, $D(0,-1,2)$.

Требуется:

1) найти внутренний угол треугольника ABC при вершине A;

2) найти площадь треугольника ABC;

3) найти объем пирамиды $ABCD$;

4) определить, образуют ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ базис.

Ответ: 1) $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{34}}$; 3) $\dfrac{13}{6}$;

2) $4{,}5$; 4) да.

11 Даны вершины треугольника ABC: $A(-3;-1)$, $B(3;2)$, $C(4;-3)$.

Найти:

1) уравнение стороны AB и ее длину;

2) уравнение высоты CH и ее длину;

3) уравнение медианы AM и ее длину;

4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

Ответ: 1) $x-2y+1=0;\ 3\sqrt{5}$; 3) $x-13y-10=0;\ \dfrac{\sqrt{170}}{2}$;

2) $2x+y-5=0;\ \dfrac{11}{\sqrt{5}}$; 4) $x-2y-10=0$.

12 Даны четыре точки: $A(3,-3,0)$, $B(2,-5,2)$, $C(3,1,-2)$, $D(4,1,3)$.

Требуется:

1) составить уравнение прямой AB и указать ее направляющий вектор;

2) составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB;

3) найти угол между прямыми AB и CD;

4) составить уравнение плоскости ABC и указать ее нормальный вектор;

5) составить уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

6) найти угол между прямой AD и плоскостью ABC;

7) составить уравнение плоскости α, проходящей через точки A, C, параллельной прямой BD;

8) найти расстояние от точки B до плоскости α.

Ответ: 1) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$; $\vec{s}(-1;-2;2)$;

2) $x+2y-2z=0$;

3) $\arccos\frac{3}{\sqrt{26}}$;

4) $2x+y+2z-3=0$; $\vec{n}(2;1;2)$;

5) $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}$;

6) $\arcsin\frac{4}{\sqrt{26}}$;

7) $4x-y-2z-15=0$;

8) $\frac{6}{\sqrt{21}}$.

13 Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-3}{3+2x-3x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6+7x^5-x^3-2}{11x^7-3x^2+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x-3}{3x^2-6x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{3x^2-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$; 6) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2-3x-27}{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+10}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3\sin 4x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{x^2-2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$.

Ответ: 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{7}{6}$; 5) $-\frac{9}{11}$; 6) 15; 7) $\frac{5}{4}$; 8) -2; 9) $e^{-\frac{15}{2}}$.

14 Найти производные функций:

1) $y = 2x - \dfrac{1}{4x^4} + \dfrac{2}{5x^5}$; 2) $y = \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3}$; 3) $y = \dfrac{2x+5}{x^2 - 4x + 3}$;

4) $y = e^{6x - x^2}$; 5) $y = \left(x^2 + 2\right) \cdot \sin 2x$; 6) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$; 7) $y = \ln^2 \operatorname{tg} x$;

8) $y = 5^{\sqrt{x-2}}$

Ответ: 1) $y' = 2 + \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{2}{x^6}$; 2) $y' = -\dfrac{6}{5\sqrt[5]{x^8}} + \dfrac{2}{9\sqrt[3]{x}}$; 3) $y' = \dfrac{-2x^2 - 6x - 14}{\left(x^2 - 4x + 3\right)^2}$;

4) $y' = (6 - 2x)e^{6x - x^2}$; 5) $y' = 2x\sin 2x + 2\left(x^2 + 2\right)\cos 2x$; 6) $y' = \dfrac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$;

7) $y' = \dfrac{2\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin x \cos x}$; 8) $y' = \dfrac{5^{\sqrt{x-2}} \ln 5}{2\sqrt{x-2}}$.

15 Найти производную и дифференциал функции $y = 5\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.

Ответ: $y'(4) = 0{,}25$, $dy = \dfrac{5dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$, $dy(4) = 0{,}25dx$.

16 Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y = x \cdot \arcsin 3x$.

Ответ: $y'' = \dfrac{6 - 27x^2}{\left(1 - 9x^2\right)\sqrt{1 - 9x^2}}$, $d^2 y = \dfrac{6 - 27x^2}{\left(1 - 9x^2\right)\sqrt{1 - 9x^2}} dx^2$.

17 Дана функция $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции.

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(-1; 1)$, убывает на интервалах $(-3; -1)$ и $(1; +\infty)$, $x = -1$ – точка минимума, $y_{\min} = y(-1) = -1$.

18 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Ответ: $y_{наиб} = \max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = 178$, а $y_{наим} = \min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(1) = -11$.

19 Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$.

Ответ: функция выпукла вверх на интервале $(-\infty;-2)$ и выпукла вниз на интервале $(-2;+\infty)$, $M(-2;48)$ – точка перегиба функции.

Список литературы

1 **Гурский, Е. И.** Руководство к решению задач по высшей математике : в 3 т. / Е. И. Гурский ; под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – Т. 1. – 350 с.

2 **Гусак, А. А.** Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – Т. 1. – 544 с.

3 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век, 2003. – Ч. 1. – 304 с.

4 **Демидович, Б. П.** Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Б. П. Демидович ; под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1970. – 472 с.

5 **Жевняк, Р. М**. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – Ч. 1. – 223 с.

6 **Жевняк, Р. М**. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – Ч. 2. – 221 с.

7 **Кручкович, Г. И.** Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович ; под ред. Г. И. Кручковича. – Минск : Выш. шк., 1973. – 516 с.

8 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1998. – Т. 1. – 432 с.

9 Определенные интегралы : метод. указания к практическим занятиям для студентов всех специальностей / Сост. Т. И. Червякова, Л. И. Сотская. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2014. – 40 с.

10 Высшая математика. Математика. Задания в тестовой форме для самостоятельной подготовки студентов к контрольным работам / Сост. А. М. Бутома [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2014. – 42 с.

11 Система упражнений по векторной алгебре : метод. указания к практическим занятиям для студентов всех специальностей / Сост. А. М. Бутома. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2014. – 28 с.

12 Система упражнений по аналитической геометрии : метод. указания к практическим занятиям для студентов всех специальностей / Сост. А. М. Бутома. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2014. – 43 с.

13 Векторы и элементы аналитической геометрии : метод. указания к практическим занятиям для студентов всех специальностей / И. У. Примак, Д. В. Роголев, А. Г. Козлов. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 39 с.

14 Высшая математика. Математика : метод. рекомендации к самостоятельной работе студентов, обучающихся по белорусским и российским образовательным программам / Сост. А. М. Бутома [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 45 с.