МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Могилев 2021

УДК 517
ББК 22.1я 73
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» декабря 2020 г., протокол № 4

Составители: Т. Ю. Орлова;
Д. В. Роголев

Рецензент И. И. Маковецкий

Изложены теоретические вопросы, даны образцы решения задач, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная вёрстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Криволинейные интегралы первого рода

1.1 Теоретическая часть

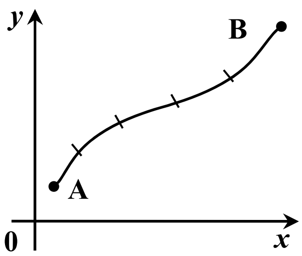

Рисунок 1.1

Пусть функция $f(P)=f(x,y)$ есть функция, непрерывная в некоторой области на плоскости xOy, и L – некоторая гладкая или кусочно-гладкая кривая, расположенная в этой области. Разобьём кривую системой точек на элементарные дуги $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (рисунок 1.1). На каждой из дуг $l_i\,(i=\overline{1,n})$ выберем произвольную точку $P_i(x_i;y_i)$ и умножим значение функции в этой точке на длину Δl_i элементарной дуги l_i. Сумма таких произведений по всем элементарным дугам $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\cdot\Delta l_i$ называется *интегральной суммой*. Обозначим наибольшую из длин элементарных дуг $\Delta=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$.

Криволинейным интегралом первого рода (КРИ-1) от функции $f(P)$ по длине дуги кривой L называется предел интегральных сумм при условии $\Delta\to 0$:

$$\int\limits_L f\left(P\right)dl=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right)\cdot\Delta l_i\,. \tag{1.1}$$

КРИ-1 обладает следующими свойствами:

1) $\int\limits_L\left(k_1 f_1\left(P\right)\pm k_2 f_2\left(P\right)\right)dl=k_1\int\limits_L f_1\left(P\right)dl\pm k_2\int\limits_L f_2\left(P\right)dl$, где k_1, k_2 – некоторые числа;

2) если $L=L_1+L_2$, то $\int\limits_L f\left(P\right)dl=\int\limits_{L_1} f\left(P\right)dl+\int\limits_{L_2} f\left(P\right)dl$;

3) $\int\limits_{AB} f\left(P\right)dl=\int\limits_{BA} f\left(P\right)dl$, т. е. интеграл не зависит от направления дуги интегрирования.

Для вычисления КРИ-1 пользуются формулами:

– если кривая задана уравнением $y=\varphi(x)$, где $a\le x\le b$, то $dl=\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}\,dx$ и

$$\int\limits_L f\left(P\right)dl=\int\limits_a^b f\left(x,\varphi\left(x\right)\right)\cdot\sqrt{1+\varphi'\left(x\right)^2}\,dx\,; \tag{1.2}$$

– если кривая задана уравнением $x = g(y)$, где $c \le y \le d$, то $dl = \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\,dy$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_c^d f\left(g(y), y\right) \cdot \sqrt{1 + g'(y)^2}\,dy; \tag{1.3}$$

– если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt; \tag{1.4}$$

– если кривая задана в полярной системе координат (ПСК) уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то $dl = \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) \cdot \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \tag{1.5}$$

Аналогично определяются КРИ-1 от непрерывной в некоторой пространственной области функции $f(M) = f(x, y, z)$ по длине дуги пространственной кусочно-гладкой кривой L, расположенной в этой области:

$$\int_L f(M)\,dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta l_i. \tag{1.6}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt. \tag{1.7}$$

1.2 Образцы решения примеров

1.2.1 Вычислить $I = \int_L \dfrac{dl}{2x - 3y}$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(0;3)$ и $B(1;5)$.

Решение

Напишем уравнение прямой AB по двум точкам: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

$$AB:\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{5-3};\ \frac{x}{1}=\frac{y-3}{2};\ \ y=2x+3;\ \ y'=2;\ dl=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\sqrt{5}dx.$$

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt{5}dx}{2x-3\left(2x+3\right)}=\sqrt{5}\int_0^1\frac{dx}{-4x-9}=-\frac{\sqrt{5}}{4}\ln\left|4x+9\right|\Big\|_0^1=$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\ln 13-\ln 9\right)=-\frac{\sqrt{5}}{4}\ln\frac{13}{9}.$$

1.2.2 Вычислить $I=\int\limits_L ydl$ по параболе $y^2=2x$ от точки $O\left(0;0\right)$ до точки $A(2;2)$.

Решение

Выразим из уравнения параболы x: $x=y^2/2$, $x'=y$; $dl=\sqrt{1+\left(x'\right)^2}dy=\sqrt{1+y^2}dy.$

$$I=\int\limits_L ydl=\int_0^2 y\sqrt{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+y^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(5^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}.$$

1.2.3 Вычислить $I=\int\limits_L\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl,$ где L – дуга кривой, заданной параметрически: $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi.$

Решение

Применим формулу (1.7).

$$x'(t)=\cos t-t\sin t,\quad y'(t)=\sin t+t\cos t,\ z'(t)=1,$$

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt=\sqrt{\left(\cos t-t\sin t\right)^2+\left(\sin t+t\cos t\right)^2+1}dt=$$

$$=\sqrt{\cos^2 t-2t\sin t\cos t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t+2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t+1}dt=$$

$$=\sqrt{2+t^2}dt,$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left(2t-\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}\right)\cdot\sqrt{2+t^2}dt=\int_0^{2\pi}t\cdot\sqrt{2+t^2}dt=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\left(2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(2+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

1.2.4 Вычислить $I=\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}dl,$ где AB – часть гиперболической спирали $\rho=\dfrac{1}{\varphi}$ от $\varphi_1=\sqrt{3}$ до $\varphi_2=2\sqrt{2}.$

Решение

Линия AB задана в ПСК. Применим формулу (1.5).

$$dl=\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}d\varphi=\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^2}d\varphi=\sqrt{\frac{\varphi^2+1}{\varphi^4}}d\varphi=\frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi^2}d\varphi,$$

$$I=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi^2}d\varphi=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{-3}\cdot\frac{\sqrt{\varphi^2+1}}{\varphi^2}d\varphi=$$

$$=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\varphi\cdot\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi=\frac{1}{3}\left.\left(1+\varphi^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(27-8\right)=\frac{19}{3}.$$

1.2.5 Вычислить $I=\int\limits_{L}xydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(5;0)$, $B(5;3)$, $C(0;3)$.

Решение

Сделаем рисунок (рисунок 1.2). Применим свойство 2 КРИ-1 и вычислим интегралы по каждому из отрезков OA, AB, BC, CO:

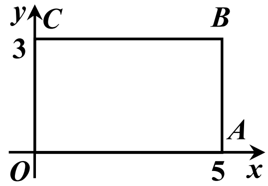

Рисунок 1.2

а) OA: $y=0$, $y'=0$, $0\le x\le 5$, $I_1=\int\limits_0^5 x\cdot 0\sqrt{1+0}dx=0$;

б) AB: $x=5$, $x'=0$, $0\le y\le 3$, $I_2=\int\limits_0^3 5y\sqrt{1+0}dy=\left.\frac{5y^2}{2}\right|_0^3=\frac{45}{2}$;

в) BC: $y=3$, $y'=0$, $0\le x\le 5$, $I_3=\int\limits_0^5 3x\sqrt{1+0}dx\left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^5=\frac{75}{2}$;

г) CO: $x=0$, $x'=0$, $0\le y\le 3$, $I_4=\int\limits_0^3 y\cdot 0\sqrt{1+0}dy=0$;

$I=I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{45}{2}+\frac{75}{2}=60.$

1.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить КРИ-1.

1.3.1 $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где L – отрезок прямой, заключённой между точками $A(0;4)$ и $B(4;0)$. Ответ: 0.

1.3.2 $\int\limits_L ydl$, где L – дуга параболы $y^2=2x/3$ между точками $O(0;0)$ и $B(35/6;\sqrt{35}/3)$. Ответ: $215/27$.

1.3.3 $\int\limits_L ydl$, где L – дуга астроиды $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,$ заключённая между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$. Ответ: 0,6.

1.3.4 $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl,$ где L – дуга кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi/2$. Ответ: $(\pi+4)\sqrt{2}-8$.

1.3.5 $\int\limits_L \frac{(y^2-x^2)xy}{(x^2+y^2)^2}dl,$ где L – дуга кривой $\rho=9\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi/4$. Ответ: $-9/8$.

1.3.6 $\int\limits_L (x+y)dl,$ где L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1;0),\ B(0;1),\ O(0;0)$. Ответ: $1+\sqrt{2}$.

1.3.7 $\int\limits_L y dl,$ где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсечённая параболой $x^2 = 2y$. Ответ: $(5\sqrt{5} - 1)\big/3$.

1.3.8 $\int\limits_L y dl,$ где L – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$. Ответ: 12.

1.3.9 $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y.$ Ответ: 8.

1.3.10 $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$. Ответ: $\ln 2$.

1.3.11 $\int\limits_L \left(3x - 2\sqrt[3]{a^2 y}\right) dl,$ $a > 0,$ где L – часть астроиды $x = a\cos^3 t,$ $y = a\sin^3 t,$ расположенная в первой четверти. Ответ: $\frac{a^2}{5}$.

1.4 Домашнее задание

Вычислить интегралы.

1.4.1 $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl,$ где L – отрезок прямой от $A(-1;0)$ до $B(0;1)$. Ответ: $-5\sqrt{2}$.

1.4.2 $\int\limits_L \frac{y dl}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ где L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi),$ $\varphi \in [0;\pi]$. Ответ: $16/3$.

1.4.3 $\int\limits_L \sqrt{2y}\, dl,$ где L – первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$. Ответ: $8\sqrt{2}\pi$.

2 Криволинейные интегралы второго рода

2.1 Теоретическая часть

Криволинейный интеграл от непрерывной в некоторой области плоскости xOy функции $P(x,y)$ по координате x вдоль дуги плоской кусочно-гладкой кривой L, расположенной в этой области, связан с КРИ-1 соотношением

$$\int_L P(x,y)\,dx = \int_L P(x,y)\cdot\cos\alpha\,dl,$$

где α – угол между касательной, проведённой к кривой в любой её точке, и положительным направлением оси Ox (рисунок 2.1).

Аналогично,

$$\int_L Q(x,y)\,dy = \int_L Q(x,y)\cdot\cos\beta\,dl,$$

где β – угол между касательной, проведённой к кривой в любой её точке, и положительным направлением оси Oy.

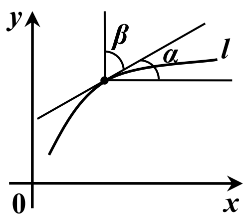

Рисунок 2.1

Обычно рассматривают сумму интегралов по координате x и y и записывают в виде

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{2.1}$$

КРИ-2 обладают теми же свойствами, что и КРИ-1, кроме

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{2.2}$$

Для вычисления КРИ-2 используют формулы:

– если кривая задана уравнением $y=\varphi(x)$ и $a \le x \le b$, то

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \Big(P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\Big)dx; \tag{2.3}$$

– если кривая задана уравнением $x=g(y)$ и $c \le y \le d$, то

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_c^d \Big(P\big(g(y),y\big)g'(y) + Q\big(g(y),y\big)\cdot\Big)dy; \tag{2.4}$$

– если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$ и $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)dt. \qquad (2.5)$$

В случае замкнутой области положительное направление обхода выбирают так, чтобы область, ограниченная кривой L, всегда оставалась слева. Интеграл по замкнутой области обозначают $\oint_L Pdx + Qdy$.

Аналогично определяются криволинейные интегралы по координатам, если кривая L лежит в плоскостях xOz и yOz.

КРИ-2 от непрерывных в некоторой пространственной области функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ вдоль дуги кусочно-гладкой кривой L определяют следующим образом:

$$\int_L P\big(x,y,z\big)dx + Q\big(x,y,z\big)dy + R\big(x,y,z\big)dz. \qquad (2.6)$$

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_L P\big(x,y,z\big)dx + Q\big(x,y,z\big)dy + R\big(x,y,z\big)dz = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t) +$$

$$+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt. \qquad (2.7)$$

2.2 Образцы решения примеров

2.2.1 Вычислить $I = \int_{AB} \big(x^2 - 2xz\big)dx + \big(z^2 - 2xz\big)dz$, где AB – дуга параболы $z = x^2$, пробегаемая от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

Решение

Изобразим дугу AB на рисунке (рисунок 2.2).

$$I = \int_{-1}^{1} \Big(x^2 - 2x\cdot x^2 + \big(x^4 - 2x\cdot x^2\big)\cdot 2x\Big)dx = \int_{-1}^{1} \Big(x^2 - 2x^3 +$$

$$+2x^5 - 4x^4\Big)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{14}{15}.$$

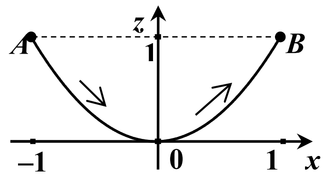

Рисунок 2.2

2.2.2 Вычислить $I=\int\limits_L \left(xy-y^2\right)dx+xdy$, где L – ломаная OBA, точки $A(1;2)$, $B(0{,}5;3)$.

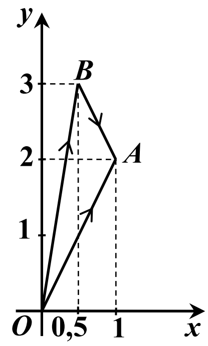

Рисунок 2.3

Решение

Контур OBA состоит из отрезков OB и BA (рисунок 2.3), поэтому, согласно свойству аддитивности, $I=\int\limits_{OB}+\int\limits_{BA}$. Уравнение прямой OB примет вид $y=6x$, где $0\le x\le 0{,}5$. Тогда $dy=6dx$.

$$\int\limits_{OB}\left(xy-y^2\right)dx+xdy=\int\limits_0^{0,5}\left(6x^2-36x^2+6x\right)dx=(-10x^3+3x^2)\Big|_0^{0,5}=-0{,}5.$$

Найдём уравнение прямой BA: $\dfrac{x-0{,}5}{1-0{,}5}=\dfrac{y-3}{2-3}$; $y=4-2x$, где $0{,}5\le x\le 1$.

$$\int\limits_{BA}\left(xy-y^2\right)dx+xdy=\begin{bmatrix} y=4-2x \\ dy=-2dx \end{bmatrix}=\int\limits_{0,5}^{1}\left(4x-2x^2-\left(4-2x\right)^2-2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_{0,5}^{1}\left(18x-6x^2-16\right)dx=\left(9x^2-2x^3-16x\right)\Big|_{0,5}^{1}=\left(9-2-16\right)-\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}-8\right)=-3.$$

$$I=-0{,}5-3=-3{,}5.$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить криволинейные интегралы.

2.3.1 $\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+\left(2x-y\right)dy$, где AB – дуга параболы $y=2x-x^2$, пробегаемая от $A(1;1)$ до $B(3;-3)$. Ответ: $-44/3$.

2.3.2 $\oint\limits_L\left(x+2y\right)dx+\left(x-y\right)dy$, где L – окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ при положительном направлении обхода. Ответ: -4π.

2.3.3 $\int\limits_{AB}\left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, где AB – отрезок прямой между точками $A(1;1)$ и $B(3;4)$. Ответ: $67/6$.

2.3.4 $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, где L – ломаная ABC: $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(3;5)$. Ответ: $194/3$.

2.3.5 $\int\limits_L xdx+ydy+\left(x-y+1\right)dz$, где L – отрезок прямой, заключённой между точками $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$. Ответ: 7.

2.3.6 $\int\limits_{AB} xdx-ydy$, где AB – дуга астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$. Ответ: -4.

2.3.7 $\oint\limits_L \left(x^2-y\right)dx$, где L – контур прямоугольника: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$. Ответ: 2.

2.3.8 $\int\limits_L 2xzdx-x^2dz$, где L – дуга параболы $z=x^2/4$, пробегаемая от точки $O(0;0)$ до $A(2;1)$. Ответ: 0.

2.3.9 $\int\limits_L \left(x+y\right)dx-xdy$, где

а) L – прямая, соединяющая точки $O(0;0)$ и $B(4;2)$;

б) L – ломаная, проходящая через точки $O(0;0)$, $A(2;0)$ $B(4;2)$.

Ответ: а) 8; б) 4.

2.3.10 $\oint\limits_L xdy$, где L – контур треугольника, образованного прямыми $y=x$, $x=2$, $y=0$ (интегрирование вести в положительном направлении). Ответ: 2.

2.3.11 $\int\limits_L y^2dx+x^2dy,$ где L – верхняя половина эллипса $x=a\cos t,$ $y=b\sin t,$ пробегаемая по ходу часовой стрелки. Ответ: $4ab^2/3$.

2.4 Домашнее задание

Вычислить криволинейные интегралы.

2.4.1 $\int\limits_{OA} \left(xy-y^2\right)dx+xdy$, где OA – дуга параболы $y=2x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$. Ответ: $31/30$.

2.4.2 $\int\limits_L 2yzdy-y^2dz$, где L – ломаная OBA: $O\left(0;0;0\right)$, $B(0;2;0)$, $A(0;2;1)$. Ответ: -4.

2.4.3 $\int\limits_L xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где L – отрезок прямой от точки $O(0;0;0)$ до точки $A(-2;4;5)$. Ответ: 91.

2.4.4 $\int\limits_{AB} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, где AB – дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t,\ A(1;0;0),\ B(1;0;4\pi)$. Ответ: $64\pi^3/3$.

2.4.5 $\oint\limits_L xdy - ydx$, где L – контур треугольника ABC с вершинами $A(-1;0), B(1;0), C(0;1)$ при положительном направлении обхода. Ответ: 2.

3 Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

3.1 Теоретическая часть

Пусть L – кусочно-гладкий контур на плоскости xOy и D – ограниченная этим контуром замкнутая область. В области D заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, имеющие в этой области непрерывные частные производные. Тогда справедлива формула Грина

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \tag{3.1}$$

где направление на контуре L выбрано так, чтобы при движении по контуру область D все время оставалась слева.

Условием независимости КРИ-2 $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ от пути интегрирования является равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Если для интеграла $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ выполняется условие (3.2) и контур L замкнутый, то

$$\oint P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{3.3}$$

3.2 Образцы решения примеров

3.2.1 Вычислить $\oint\limits_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Решение

Проверим выполнимость условия (3.2):

$$P\left(x,y\right)=\frac{x}{x^2+y^2};\quad Q\left(x,y\right)=\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Следовательно, из условия (3.3) данный интеграл равен нулю.

3.2.2 Вычислить $\oint\limits_L\left(x^2-y\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, L – окружность $x^2+y^2=R^2$.

Решение

$$P\left(x,y\right)=x^2-y;\quad Q\left(x,y\right)=x+y^2;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-1;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Применим формулу Грина (3.1):

$$\oint\limits_L\left(x^2-y\right)dx+\left(x+y^2\right)dy=\iint\limits_D\left(1-\left(-1\right)\right)dxdy=2\iint\limits_D dxdy.$$

$\iint\limits_D dxdy=S$, где S – площадь области D. Тогда $2\iint\limits_D dxdy=2\pi R^2$.

3.2.3 Вычислить интеграл

$$I=\oint\limits_L(e^{x^2}-5y^2-7\sin x^2)dx+(\sin y^2+2x^2-\sqrt[3]{1+2y^2})dy,$$

где L – контур, ограничивающий область $0\le x\le 1$, $0\le y\le x^2$, пробегаемый в положительном направлении.

Решение

Построим контур L (рисунок 3.1).

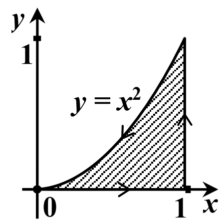

Рисунок 3.1

$P(x,y)=e^{x^2}-5y^2-7\sin x^2$;

$Q(x,y)=\sin y^2+2x^2-\sqrt[3]{1+2y^2}$. Проверим условие (3.2): $\frac{\partial P}{\partial y}=-10y$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=4x$. Условие не выполняется. Применим формулу Грина (3.1):

$$I=\iint\limits_D (4x+10y)\,dxdy=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}(2x+5y)\,dy=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(2xy+\frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2}=2\int\limits_0^1\left(2x^3+\frac{5}{2}x^4\right)dx=2\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=2\,.$$

3.2.4 Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y\right)^2 dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$.

Решение

Построим треугольник ABC (рисунок 3.2).

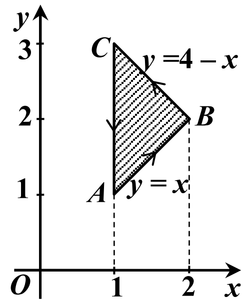

Рисунок 3.2

$$P(x,y)=2(x^2+y^2);\qquad Q(x,y)=(x+y)^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4y;\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2\left(x+y\right).$$

Применим формулу Грина:

$$\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y\right)^2 dy=\iint\limits_D\left(2\left(x+y\right)-4y\right)dxdy=$$

$$=2\iint\limits_D\left(x-y\right)dxdy=2\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{4-x}\left(x-y\right)dy=-\int\limits_1^2\left(x-y\right)^2\Big|_x^{4-x}dx=$$

$$=-4\int\limits_1^2\left(x-2\right)^2dx=-\frac{4}{3}\left(x-2\right)^3\Big|_1^2=-\frac{4}{3}.$$

3.2.5 Доказать, что значение КРИ-2 $I=\int\limits_L\left(x^4+4xy^3\right)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ не зависит от вида линии, соединяющей точки $A(-2;-1)$ и $B(3;0)$, и в случае положительного ответа найти значение интеграла I.

Решение

$$P\left(x,y\right)=x^4+4xy^3;\quad Q\left(x,y\right)=6x^2y^2-5y^4;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2.$$

Условие (3.2) выполняется. Следовательно, данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Выберем для удобства вычисления в качестве кривой, соединяющей точки A и B, ломаную ACB (рисунок 3.3).

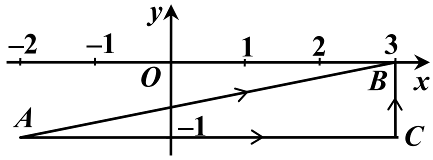

Рисунок 3.3

AC: $y=-1,\ y'=0$,

$$I_1=\int\limits_{AC}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{3}\left(x^4+4x(-1)^3\right)dx=\int\limits_{-2}^{3}(x^4-4x)dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{3}=\frac{243}{5}-18+\frac{32}{5}+2=39;$$

CB: $x=3,\ x'=0$,

$$I_2=\int\limits_{CB}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=\int\limits_{-1}^{0}(6\cdot 3^2\cdot y^2-5y^4)dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}(54y^2-5y^4)dy=(18y^3-y^5)\Big|_{-1}^{0}=-(-18+1)=17;$$

$$I=I_1+I_2=39+17=56.$$

3.2.6 Найти функцию $u(x,y)$ по её полному дифференциалу: $du=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$.

Решение

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C, \qquad (3.4)$$

где

$$P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x;\ Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2x\sin x;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y.$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования.

$$u(x,y)=\int(2x\cos y-y^2\sin x)dx=x^2\cos y+y^2\cos x+f_1(y).$$

$$u(x,y)=\int(2y\cos x-x^2\sin y)dy=y^2\cos x+x^2\cos y+f_2(x).$$

Окончательно, $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C.$

3.3 Примеры для самостоятельной работы

3.3.1 По формуле Грина вычислить $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами $A(3;0)$, $B(3;3)$, $C(0;3)$. Ответ: 18.

3.3.2 С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\oint\limits_L (x+y)^2dx+(x^2+y^2)dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(3;5)$. Ответ: -14.

3.3.3 Доказать, что интеграл $\int\limits_L (2x+3y)dx+(3x-4y)dy$ не зависит от пути интегрирования, и найти его значение, интегрируя сначала по дуге параболы $y=x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$, а затем по прямой, соединяющей эти точки. Ответ: -4.

3.3.4 Найти функции $u(x,y)$ по их полным дифференциалам:

а) $du=4(x^2-y^2)\cdot(xdx-ydy)$;

б) $du=\dfrac{1}{(x+y)^3}\cdot\big((3y-x)dx+(y-3x)dy\big)$.

3.3.5 Вычислить $\oint\limits_L y(1-x^2)dx+(1+y^2)dy$, где L – окружность $x^2+y^2=4$, пробегаемая в положительном направлении обхода. Ответ: 0.

3.3.6 Доказать, что значение криволинейного интеграла $\int\limits_L (xy^2-x^3)dx+(yx^2-y^2)dy$ не зависит от вида линии, соединяющей точки $A(-1;1)$ и $B(2;-2)$, и найти значение интеграла. Ответ: 12.

3.4 Домашнее задание

С помощью формулы Грина вычислить интегралы.

3.4.1 $\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy$, где L – окружность $x^2+y^2=5$. Ответ: 10π.

3.4.2 $\oint\limits_L e^{-x^2+y^2}\big(y\cos 2xdx+y\sin 2xdy\big)$, где L – окружность $x^2+y^2=R^2$. Ответ: 0.

3.4.3 $\oint\limits_L (x+y)dx-2xdy$ по контуру треугольника ABC со сторонами $x=0,\ y=0,\ x+y=a.$ Ответ: $-3a^2/2$.

3.4.4 Найти функцию $u(x,y)$, если $du=(x^2+2xy-y^2)dx+$ $+(x^2-2xy+y^2)dy$. Ответ: $u\left(x,y\right)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^3}{3}+x^2y-xy^2+C$.

3.4.5 Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(4x^3y^3-y^2)dx+(3x^4y^2-2xy)dy=0$. Ответ: $x^4y^3-xy^2=C$.

4 Приложения криволинейных интегралов

4.1 Теоретическая часть

1 Площадь области D, ограниченная замкнутым контуром L:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx, \tag{4.1}$$

где направление обхода контура L выбрано так, что область D остаётся все время слева.

2 Площадь цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости xOy, построенных в точках $M(x,y)$ кривой L и имеющих переменную длину $f(M)=f(x,y)$ (рисунок 4.1),

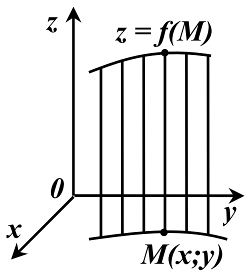

Рисунок 4.1

$$S=\int_L f(x,y)dl. \tag{4.2}$$

3 Длина плоской или пространственной линии AB

$$l=\int_{AB} dl. \tag{4.3}$$

4 Если L – плоская кривая, то её масса вычисляется по формуле

$$m=\int_L \mu\left(x,y\right)dl, \tag{4.4}$$

где $\mu(x;y)$ – линейная плотность дуги.

5 Координаты центра тяжести кривой L вычисляются по формулам:

$$x_c=\frac{\int_L x\cdot\mu\left(x,y\right)dl}{m};\quad y_c=\frac{\int_L y\cdot\mu\left(x,y\right)dl}{m}. \tag{4.5}$$

6 Моменты инерции I_x, I_y, I_O соответственно относительно осей Ox, Oy и начала координат:

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x,y)\,dl;\; I_y = \int_L x^2 \mu(x,y)\,dl;\; I_o = \int_L \left(x^2+y^2\right)\mu(x,y)\,dl. \tag{4.6}$$

7 Пусть $\vec{F} = P(x,y)\cdot\vec{i} + Q(x,y)\cdot\vec{j}$ есть переменная сила, совершающая работу A вдоль пути L, функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на кривой L, тогда работа силы

$$A = \int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{4.7}$$

4.2 Образцы решения примеров

4.2.1 Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Решение

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t + b\sin t\cdot a\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

4.2.2 Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 4$, заключённой между плоскостью xOy и поверхностью $z = 2 + \dfrac{x^2}{2}$ (рисунок 4.2).

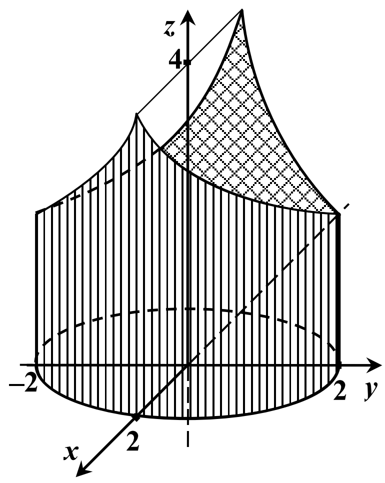

Рисунок 4.2

Решение

Применим формулу (4.2):

$$S_{пов.} = \int_L f(x,y)\,dl = \int_L\left(2 + \frac{x^2}{2}\right)dl.$$

Для удобства вычислений перейдем к параметрическим уравнениям окружности $x^2 + y^2 = 4$: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$. Тогда

$$dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = 2dt.$$

$$S_{пов.}=\int\limits_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{2}\cdot 4\cos^2 t\right)\cdot 2dt=4\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=4\int\limits_0^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=4\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=6\cdot 2\pi=12\pi .$$

4.2.3 Вычислить массу m и координаты центра масс x_c и y_c плоской материальной дуги $y=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $0\le x\le 1$, если её линейная плотность $\mu(x,y)=y\sqrt{1+x}$.

Решение

Применим формулы (4.4) и (4.5):

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+x}dx,\ m=\int\limits_L y\sqrt{1+x}dl=\frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1==\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right)=\frac{16}{35}.$$

$$x_c=\frac{35}{16}\int\limits_L x\cdot y\sqrt{1+x}dl=\frac{35}{16}\cdot\frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}}(1+x)dx=\frac{35}{24}\int\limits_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{35}{24}\left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{35}{24}\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\right)=\frac{20}{27}.$$

$$y_c=\frac{35}{16}\int\limits_L y\cdot y\sqrt{1+x}dl=\frac{35}{16}\cdot\frac{4}{9}\int\limits_0^1 x^3(1+x)dx=\frac{35}{36}\int\limits_0^1\left(x^3+x^4\right)dx=$$

$$=\frac{35}{36}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{35}{36}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{7}{16}.$$

4.2.4 Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат четверти однородной окружности $y=2\cos t$, $z=2\sin t$, лежащей в первом квадранте плоскости yOz.

Решение

Очевидно, что $I_y=I_z$. По формулам (4.6) получим

$$I_y = I_z = \int\limits_L z^2 dl = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 4\left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

$$I_O = \int\limits_L \left(y^2 + z^2 \right) dl = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) \cdot \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4\pi .$$

4.2.5 Вычислить работу силы $\vec{F} = yz\vec{i} + \left(y + z \right)\vec{j}$ при перемещении точки массы m из точки $O(0;0)$ в точку $A(1;1)$ по прямой $z = y$, лежащей в плоскости yOz.

Решение

По формуле (4.7) имеем

$$A = \int\limits_L yzdy + (y+z)dz = \int\limits_0^1 \left(y \cdot y + (y+y) \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (y^2 + 2y) dy = \left(\frac{y^3}{3} + y^2 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

4.3.1 Найти площадь области, ограниченной параболой $x = z^2$ и прямой $x = 1$ (область лежит в плоскости xOz). Ответ: $4/3$.

4.3.2 Найти площадь области, ограниченной кривой $x = a\left(2\cos t - \cos 2t \right)$, $y = a\left(2\sin t - \sin 2t \right)$, если $0 \le t \le 2\pi$. Ответ: $6\pi a^2$.

4.3.3 Найти массу дуги кривой $y = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$ от точки $O\left(0;0\right)$ до точки $A\left(4; \frac{16}{3} \right)$, если линейная плотность кривой пропорциональна длине её дуги. Ответ: $\frac{4}{9} k\left(63 - 5\sqrt{5} \right)$, где $k -$ коэффициент пропорциональности.

4.3.4 Вычислить массу m дуги кривой, заданной параметрически уравнениями $x = \frac{t^2}{2}$, $y = t$, $z = \frac{t^3}{3}$, где $0 \le t \le 2$, если плотность в каждой её точке $\mu(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$. Ответ: $166/15$.

4.3.5 Вычислить координаты центра тяжести однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первом квадранте, и моменты инерции I_x, I_y, I_0. Ответ: $x_c=y_c=\dfrac{2R}{\pi}$, $I_x=I_y=\dfrac{\pi R^3}{4}$, $I_0=\dfrac{\pi R^3}{2}$.

4.3.6 Найти массу окружности $x^2+y^2=ax$, если линейная плотность $\mu(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Ответ: $2a^2$.

4.3.7 Вычислить работу силы $\vec{F}=x^2y\vec{i}-y\vec{j}$ при перемещении вдоль отрезка MN от точки $M(-1;0)$ к точке $N(0;1)$. Ответ: $-5/12$.

4.3.8 Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(x^2+y^2+1\right)\vec{i}+2xy\vec{j}$ при перемещении вдоль дуги кривой $y=x^3$, заключённой между точками $O(0;0)$ и $A(1;1)$. Ответ: $7/3$.

4.3.9 Вычислить работу силы $\vec{F}=(x+y)\vec{i}-x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ по ходу часовой стрелки. Ответ: 8π.

4.3.10 Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\left(x^2+y^2\right)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, y\ge 0$ от точки $M(3;0)$ к точке $N(-3;0)$. Ответ: -2.

4.4 Домашнее задание

4.4.1 Вычислить площадь области, ограниченной гиперболой $y=1/x$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=2$. Ответ: $\ln 2$.

4.4.2 Вычислить массу m дуги кривой $y=\ln x, \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8},$ если плотность в каждой её точке $\mu(x,y)=x^2$. Ответ: $19/3$.

4.4.3 Вычислить работу силы $\vec{F}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$, совершаемую на пути, соединяющем точки $O(0;0)$ и $A(2;1)$. Ответ: 4.

4.4.4 Вычислить момент инерции I_0 однородного отрезка прямой, заключённого между точками $A(2;0)$ и $B(0;1)$. Ответ: $5\sqrt{5}/3$.

4.4.5 Вычислить работу силы $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+2y\vec{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $A(1;-3)$ по параболе $y=-3x^2$. Ответ: $10{,}5$.

4.4.6 Вычислить работу силы $\vec{F}=x^2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=9, x\ge 0, y\ge 0$ от точки $M(3;0)$ к точке $N(0;3)$. Ответ: 18.

5 Поверхностные интегралы первого рода

5.1 Теоретическая часть

Поверхностный интеграл является таким же обобщением двойного интеграла, каким криволинейный интеграл является по отношению к определенному интегралу.

Рассмотрим поверхность S в пространстве $Oxyz$, в каждой точке которой определена непрерывная функция $f(x,y,z)$:

1) разобьём поверхность S на n частей с площадями ΔS_i;

2) выберем на каждой из частичных площадок ΔS_i произвольную точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$;

3) составим интегральную сумму: $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i$;

4) обозначим: $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{d_i\right\}$, где d_i – диаметр площадки ΔS_i.

Если существует предел интегральной суммы, который не зависит от способа разбиения поверхности S на площадки ΔS_i и от выбора точек M_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом от функции* $f(x,y,z)$ *по поверхности* S или *поверхностным интегралом первого рода* (*ПИ-1*):

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)\Delta S_i . \tag{5.1}$$

Поверхностные интегралы первого рода обладают теми же свойствами, что и КРИ-1 (линейность, аддитивность, справедлива теорема о среднем), и имеют те же условия существования. Значение ПИ-1 не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой ведётся интегрирование. Её проекция на координатную плоскость должна быть однозначна, т. е. прямая, перпендикулярная плоскости проекции, пересекает поверхность в одной точке.

Вычисление ПИ-1 производится сведением его к двойному интегралу.

1 Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x,y)$, где $z\left(x,y\right), \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D_{xy}, которая является проекцией поверхности S на плоскость xOy, тогда

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy . \tag{5.2}$$

2 Если поверхность S задана уравнением $x = x(y,z)$, где $x\left(y,z\right), \dfrac{\partial x}{\partial y}, \dfrac{\partial x}{\partial z}$

непрерывны в замкнутой области D_{yz}, которая является проекцией поверхности S на плоскость yOz, то

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz\,. \tag{5.3}$$

3 Если поверхность S задана уравнением $y = y(x,z)$, где $y(x,z), \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$ непрерывны в замкнутой области D_{xz}, которая является проекцией поверхности S на плоскость xOz, то

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz\,. \tag{5.4}$$

5.2 Образцы решения примеров

5.2.1 Вычислить $\iint_S \left(x^2+\frac{7}{2}y+z\right)ds$, S – часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенная в первом октанте.

Решение

Изобразим плоскость $4x+3y+2z-4=0$ (рисунок 5.1) и её проекцию на плоскость xOy (рисунок 5.2).

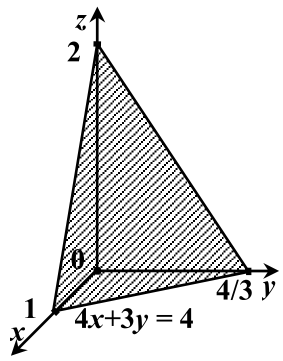

Рисунок 5.1

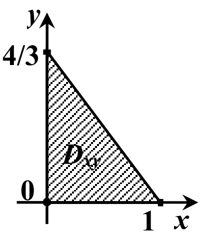

Рисунок 5.2

Запишем уравнение плоскости в виде $z = 2-2x-\frac{3}{2}y$. Найдём частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x}=-2, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{2}$. Применим формулу (5.2):

$$\iint_S\left(x^2+\frac{7}{2}y+z\right)ds=\iint_{D_{xy}}\left(x^2+\frac{7}{2}y+2-2x-\frac{3}{2}y\right)\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2-2x+2y+2)\frac{\sqrt{29}}{2}dxdy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx\int_0^{\frac{4-4x}{3}}\left(x^2-2x+2y+2\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(x^2y-2xy+y^2+2y\right)\Big|_0^{\frac{4-4x}{3}}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(\frac{4x^2-4x^3}{3}-\frac{8x-8x^2}{3}+\left(\frac{4-4x}{3}\right)^2+\frac{8-8x}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{2\sqrt{29}}{9}\left(\frac{13x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}-10x^2+10x\right)\Bigg|_0^1=\frac{43\sqrt{29}}{54}.$$

5.2.2 Вычислить $\iint_S\sqrt{x^2+y^2}ds$, где S – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, расположенной между плоскостями $z=0, z=2.$

Решение

Изобразим поверхность $x^2+y^2=z^2$ (рисунок 5.3). Из уравнения конуса $x^2+y^2=z^2\Rightarrow z=\sqrt{x^2+y^2}$, т. к. $0\le z\le 2.$ Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

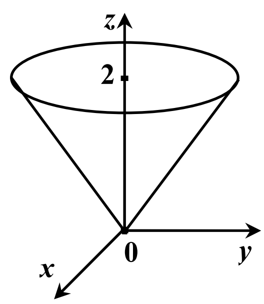

Рисунок 5.3

Применим формулу (5.2):

$$I=\iint_S\sqrt{x^2+y^2}ds=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Проекцией конуса на плоскость xOy является круг $x^2+y^2\le 4$ (рисунок 5.4). Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\rho;\quad D:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le 2.\end{cases}$$

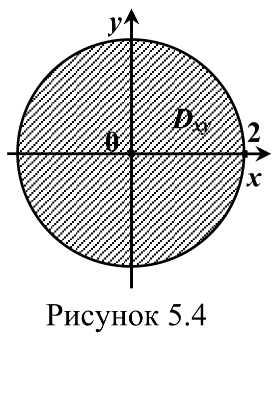

Рисунок 5.4

Имеем

$$I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\cdot\rho d\rho=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot 2\pi=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$$

5.2.3 Вычислить $\iint\limits_S \frac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}ds$, $S-$ часть цилиндрической поверхности $y=x^2-4$, отсекаемая плоскостями $z=-2y$, $z=0$.

Решение

Построим поверхность S, которая однозначно проецируется на плоскость xOz (рисунок 5.5).

В этом случае уравнение поверхности имеет вид: $y=x^2-4$. Найдём частные производные: $\frac{\partial y}{\partial x}=2x, \frac{\partial y}{\partial z}=0.$ Применим формулу (5.4):

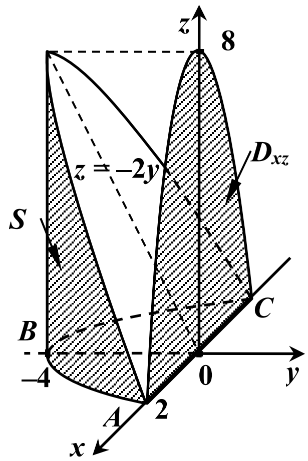

Рисунок 5.5

$$I=\iint\limits_S\frac{x^2+y+2z}{\sqrt{1+4x^2}}ds=\iint\limits_{D_{xz}}\frac{x^2+x^2-4+2z}{\sqrt{1+4x^2}}\sqrt{1+4x^2}\,dxdz=$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}\left(2x^2+2z-4\right)dxdz\,.$$

Граница области D_{xz} состоит из отрезков оси Ox и дуги параболы, уравнение которой получено из системы

$$\begin{cases} y=x^2-4, \\ z=-2y \end{cases}\Rightarrow z=8-2x^2.$$

Таким образом, $D_{xz}:\begin{cases} -2\le x\le 2, \\ 0\le z\le 8-2x^2. \end{cases}$

Имеем

$$I=\int_{-2}^{2}dx\int_0^{8-2x^2}\left(2x^2+2z-4\right)dz=\int_{-2}^{2}\left(2x^2z+z^2-4z\right)\Big|_0^{8-2x^2}dx=\int_{-2}^{2}\left(16x^2-4x^4+64-\right.$$

$$\left.-32x^2+4x^4-32+8x^2\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(32-8x^2\right)dx=16\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=16\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{256}{3}.$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить поверхностные интегралы первого рода.

5.3.1 $\iint\limits_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)ds$, где S – часть плоскости $6x+4y+3z=12$, лежащая в первом октанте. Ответ: $4\sqrt{61}$.

5.3.2 $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,ds$, где S – часть параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$, отсечённая плоскостью $z=0$. Ответ: 3π.

5.3.3 $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где S – часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=3$. Ответ: $160\pi/3$.

5.3.4 $\iint\limits_S (2x+3y+2z)ds$, где S – часть плоскости $x+3y+z=3$, лежащая в первом октанте. Ответ: $15\sqrt{11}/2$.

5.3.5 $\iint\limits_S xyzds$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте. Ответ: $\sqrt{3}/120$.

5.3.6 $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z-\frac{1}{2}\right)ds$, где S – часть поверхности $2z=2-x^2-y^2$, отсечённая плоскостью xOy. Ответ: $(9\sqrt{3}-1)\pi/5$.

5.3.7 $\iint\limits_S z(x+y)ds$, где S – часть поверхности $z=\sqrt{9-x^2}$, отсечённая плоскостями $y=0$, $y=2$. Ответ: 36.

5.4 Домашнее задание

Вычислить поверхностные интегралы первого рода.

5.4.1 $\iint\limits_S xyzds$, где S – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$. Ответ: 0.

5.4.2 $\iint\limits_S x(y+z)ds$, где S – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсечённая плоскостями $z=0$ и $z=1$. Ответ: 1.

5.4.3 $\iint\limits_S \left(3x^2+5y^2+3z^2-2\right)ds$, где S – часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсечённая плоскостями $y=0$ и $y=1$. Ответ: $2\sqrt{2}\pi$.

5.4.4 $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4z^2}\,ds$, где S – часть поверхности $y=2-x^2-z^2$, отсечённая плоскостью $y=0$. Ответ: 10π.

6 Поверхностные интегралы второго рода

6.1 Теоретическая часть

Поверхность, у которой фиксирована одна из её сторон, называется *ориентированной*.

1 Если поверхность S незамкнутая, однозначно проецируется на плоскость Oxy, т. е. $z=z(x,y)$ – уравнение поверхности, то ту сторону, которая видна со стороны положительного направления оси Oz, если смотреть на плоскость Oxy, будем называть *положительной относительно оси* Oz S_z^+ (аналогично S_x^+, S_y^+). Или $\angle(\vec{n},\vec{k})<90°$.

2 Если поверхность S замкнутая, то за S^+ примем её внешнюю сторону, за S^- – внутреннюю.

Введём понятие поверхностного интеграла второго рода (ПИ-2).

Пусть S – двусторонняя, ориентированная поверхность, заданная уравнением $z=f(x,y)$, $R(x,y,z)$ – непрерывная функция, определённая в точках поверхности S. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} R\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta x_i\Delta y_i,$$

где $\Delta x_i\Delta y_i$ – площадь проекции частичной поверхности S_i на плоскость Oxy, $\Delta x_i\Delta y_i=\left(\Delta S_i\right)_{xy}$.

Если существует предел интегральной суммы, который не зависит от способа разбиения поверхности S на ΔS_i и от выбора точек M_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом от функции* $R\left(x,y,z\right)$ *по координатам* x *и* y *по выбранной стороне поверхности,* или *поверхностным интегралом второго рода*:

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)(\Delta S_i)_{xy}. \tag{6.1}$$

Аналогично определяются ПИ-2 по координатам y,z и x,z:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_i,z_i)(\Delta S_i)_{yz}, \tag{6.2}$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(x_i,y_i,z_i)(\Delta S_i)_{zx}\,. \qquad (6.3)$$

$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$ – общий ПИ-2.

Свойства ПИ-2 аналогичны свойствам ПИ-1.

Следует помнить, что при изменении стороны поверхности интегрирования, т. е. переориентации поверхности, ПИ-2 изменяет знак.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению соответствующих двойных интегралов:

$$\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy, \quad \left[\begin{array}{l}\angle(\vec{n},\vec{k})<90^\circ \Rightarrow +;\\ \angle(\vec{n},\vec{k})>90^\circ \Rightarrow -.\end{array}\right. \qquad (6.4)$$

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P\big(x(y,z),y,z\big)dydz, \quad \left[\begin{array}{l}\angle(\vec{n},\vec{i})<90^\circ \Rightarrow +;\\ \angle(\vec{n},\vec{i})>90^\circ \Rightarrow -.\end{array}\right. \qquad (6.5)$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q\big(x,y(x,z),z\big)dxdz, \quad \left[\begin{array}{l}\angle(\vec{n},\vec{j})<90^\circ \Rightarrow +;\\ \angle(\vec{n},\vec{j})>90^\circ \Rightarrow -.\end{array}\right. \qquad (6.6)$$

Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны друг с другом соотношением

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds\,. \qquad (6.7)$$

В этой формуле $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S в выбранную сторону поверхности.

Если поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$, то $\vec{n}=(F'_x;F'_y;F'_z)$ – нормаль к поверхности в каждой точке M.

Пусть $\vec{a}=(P;Q;R)$ – векторная функция, тогда

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S (\vec{a},\vec{n}_0)ds\,. \qquad (6.8)$$

Если ориентированная поверхность S задана явной непрерывно дифференцируемой функцией $z=z(x,y)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} (\vec{a},\vec{n})\big|_{z=z(x,y)}\,dxdy\,,$$

$$\vec{a}=(P;Q;R),\ \vec{n}=(-z'_x;-z'_y;1)\,. \qquad (6.9)$$

Если S: $y = y(x,z)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{zx}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{y=y(x,z)} dxdz\,,$$

$$\vec{a} = (P;Q;R)\,,\ \vec{n} = (-y'_x;1;-y'_z)\,. \tag{6.10}$$

Если S: $x = x(y,z)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{yz}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{x=x(y,z)} dydz\,,$$

$$\vec{a} = (P;Q;R)\,,\ \vec{n} = (1;-x'_y;-x'_z)\,. \tag{6.11}$$

В формулах (6.9)–(6.11) берется «+», если интегрирование ведётся по стороне $S^+_{z,y,x}$, «–» – если $S^-_{z,y,x}$.

Формула Остроградского-Гаусса связывает поверхностный интеграл второго рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Для вывода формулы Остроградского-Гаусса надо воспользоваться рассуждениями, подобными тем, которые использовались при нахождении формулы Грина-Остроградского.

Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место *формула Остроградского-Гаусса*

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \oiiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz\,, \tag{6.12}$$

где S – граница области V,
и интегрирование по S производится по её внешней стороне.

Формула Стокса связывает криволинейные интегралы второго рода с поверхностными интегралами второго рода.

Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности, то имеет место *формула Стокса*

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz =$$

$$= \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz\,, \tag{6.13}$$

где L – граница поверхности S,
вдоль кривой L производится в положительном направлении. и интегрирование

Символическая запись формулы Стокса:

$$\iint\limits_{S}\begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz\,. \qquad (6.14)$$

6.2 Образцы решения примеров

6.2.1 Вычислить интеграл $\iint\limits_{S} zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy$, S – часть поверхности $z = x^2 + y^2 + 1$, отсечённая плоскостью $z = 2$, если вектор $\vec{n}$ составляет с осью Oz тупой угол γ.

Решение

Построим поверхность (рисунок 6.1). Запишем $\vec{n}$ и $\vec{a}$:

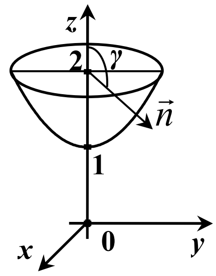

Рисунок 6.1

$$z = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \left(-2x;-2y;1\right);\ \vec{a} = \left(z;-4y;8x^2\right).$$

$$I = \iint\limits_{S} zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}}\left(\vec{a},\vec{n}\right)\Big|_{z=z(x,y)} dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}}\left(-2xz + 8y^2 + 8x^2\right)\Big|_{z=x^2+y^2+1} dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}\Big(2x\left(x^2+y^2+1\right) -$$

$$-8y^2 - 8x^2\Big)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}\Big(2x\left(x^2+y^2+1\right) - 8\left(x^2+y^2\right)\Big)dxdy\,.$$

Так как проекция поверхности S на плоскость xOy представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 1$ (рисунок 6.2), то перейдём к полярным координатам:

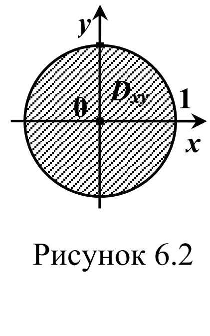

Рисунок 6.2

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho = 1. \qquad D'_{xy}: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le 1. \end{cases}$$

$$I=\iint\limits_{D'_{xy}}\left(2\rho\cos\varphi\left(\rho^2+1\right)-8\rho^2\right)\rho d\varphi d\rho=\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left(2\rho^4\cos\varphi+2\rho^2\cos\varphi-8\rho^3\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2\rho^4+2\rho^2\right)\cdot\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}d\rho-\int\limits_0^1 8\rho^3\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}d\rho=-16\pi\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\pi}=-4\pi.$$

6.2.2 Вычислить $\iint\limits_S ydydz+xdxdz+zdxdy$, где S – верхняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x-y+z=1$ с координатными плоскостями.

Решение

Первый способ.

Вычислим каждый интеграл-слагаемое, используя формулы (6.4)–(6.6), и применим свойство аддитивности. Нарисуем плоскость $x-y+z=1$ (рисунок 6.3):

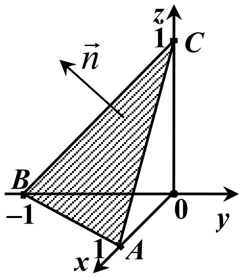

Рисунок 6.3

1) $S: z=1-x+y$, спроецируем её на плоскость xOy, $\angle\left(\vec{n};\vec{i}\right)<90^\circ$. Имеем

$$I_1=\iint\limits_S zdxdy=+\iint\limits_{D_{xy}}\left(1-x+y\right)dxdy.$$

Проекция поверхности S на плоскость xOy представляет собой треугольник (рисунок 6.4):

$$D_{xy}:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ x-1\le y\le 0.\end{cases}$$

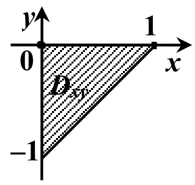

Рисунок 6.4

$$I_1=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^0\left(1-x+y\right)dy=\int\limits_0^1\left(y-xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x-1}^0 dx=\int\limits_0^1\Bigg(1-x+x^2-x-$$

$$-\frac{\left(x-1\right)^2}{2}\Bigg)dx=\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{\left(x-1\right)^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=1-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(0+1\right)=\frac{1}{6};$$

2) $S: y=x+z-1$, спроецируем её на плоскость xOz, $\angle(\vec{n};\vec{j})>90^\circ$. Имеем

$$I_2=\iint\limits_S xdxdz=-\iint\limits_{D_{xz}}xdxdz.$$

Проекция поверхности S на плоскость xOz представляет собой треугольник (рисунок 6.5):

$$D_{xz}:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 1-x.\end{cases}$$

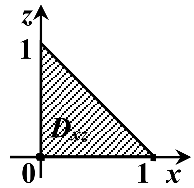

Рисунок 6.5

$$I_2=-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xdy=-\int_0^1 xy\Big|_0^{1-x}dx=-\int_0^1 x\left(1-x\right)dx=$$

$$=-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6};$$

3) $S:x=1+y-z$, спроецируем её на плоскость yOz, $\angle(\vec{n};\vec{k})<90°$. Имеем

$$I_3=\iint_S ydydz=+\iint_{D_{yz}}ydxdy.$$

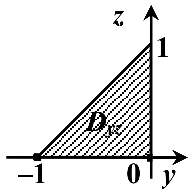

Рисунок 6.6

Проекция поверхности S на плоскость yOz представляет собой треугольник (рисунок 6.6):

$$D_{yz}:\begin{cases}-1\le y\le 0,\\ 0\le z\le 1+y.\end{cases}$$

$$I_3=\int_{-1}^0 dy\int_0^{1+y}ydz=\int_{-1}^0 yz\Big|_0^{1+y}dy=\int_{-1}^0 y\left(1+y\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^0=0-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

Итак, $I=I_1+I_2+I_3=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}.$

Второй способ.

Вычислим интеграл, используя, например, формулу (6.9).

Имеем

$$\vec{a}=\left(y,x,z\right),\ z=1-x+y\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=1\Rightarrow\vec{n}=\left(1;-1;1\right).$$

$$I=+\iint_{D_{xy}}\left(y-x+z\right)\Big|_{z=1-x+y}dxdy=\iint_{D_{xy}}\left(y-x+1-x+y\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x-1}^0\left(1-2x+2y\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(y-2xy+y^2\right)\Big|_{x-1}^0dx=\int_0^1\left(1-x+2x\left(x-1\right)-\left(x-1\right)^2\right)dx=\int_0^1\left(x^2-x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{6}.$$

6.2.3 Вычислить $\iint\limits_S (x+y)dydz+(y+z)dxdz+(x+z)dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y+3z=6$.

Решение

Так как поверхность S замкнутая (рисунок 6.7), то применим формулу Остроградского-Гаусса (6.12).

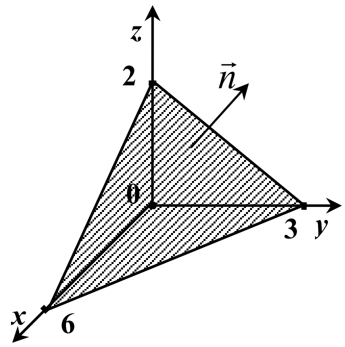

Рисунок 6.7

Имеем $P=x+y, \dfrac{\partial P}{\partial x}=1;$ $Q=y+z, \dfrac{\partial Q}{\partial y}=1;$ $R=x+z, \dfrac{\partial R}{\partial z}=1.$

Объём пирамиды находят по формуле $V=\dfrac{1}{3}S_{осн}\cdot H$, тогда

$$I=\iiint\limits_V (1+1+1)dxdydz=3\iiint\limits_V dxdydz=3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\right)\cdot 3=18.$$

6.2.4 Вычислить $\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz,$ где L – окружность $x^2+y^2=1, z=0;$ S – верхняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=1\,(z>0)$, обход контура совершается в положительном направлении.

Решение

Применим формулу Стокса, используя её символическую запись (6.14). Имеем

$$P=x^2y^3, Q=1, R=z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix}=dydz\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial 1}{\partial z}\right)-dxdz\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x^2y^3}{\partial z}\right)-dxdy\left(\frac{\partial 1}{\partial x}-\frac{\partial x^2y^3}{\partial y}\right)=$$

$$=0-0+3x^2y^2dxdy\Rightarrow I=-3\iint\limits_S x^2y^2dxdy.$$

Так как проекция поверхности S на плоскость xOy представляет собой круг $x^2+y^2\le 1$, то перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \rho = 1. \quad D'_{xy}: \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le 1. \end{cases}$$

$$I = -3\iint\limits_{D'_{xy}} \rho^2\cos^2\varphi \cdot \rho^2\sin^2\varphi \cdot \rho\, d\varphi d\rho = -\frac{3}{4}\int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = -\frac{3}{4}\frac{\rho^6}{6}\bigg|_0^1 \cdot \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\bigg|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{8}.$$

6.3 Примеры для самостоятельной работы

Вычислить поверхностные интегралы второго рода.

6.3.1 $\iint\limits_S \left(x^2 + y + z^2\right) dxdz$, где S – внутренняя сторона поверхности $x^2 = 2y$, отсечённая плоскостями $y = 2, \quad z = 0, \quad z = 1$. Ответ: $28/3$.

6.3.2 $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dydz$, где S – внутренняя сторона части полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, вырезанная конусом $x = \sqrt{y^2 + z^2}$. Ответ: $-\pi R^4/2$.

6.3.3 $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + 3z^2\right) dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсечённая плоскостями $z = 0, z = 2$. Ответ: -32π.

6.3.4 $\iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x + y + z = a$ и координатных плоскостей. Ответ: $a^4/4$.

6.3.5 $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, лежащей в первом октанте. Ответ: $3\pi a^4/8$.

6.3.6 $\iint\limits_S \left(x + z^2\right) dydz + \left(2x^2 + y\right) dxdz$, где S – верхняя сторона части параболоида $y = x^2 + z^2$, отсечённого плоскостью $y = 2$ и расположенного над плоскостью xOy. Ответ: $-\pi$.

6.3.7 $\iint\limits_S \left(y^2 - x^2\right) dydz + z^2\sin x \cdot dxdz - 2y^2z \cdot dxdy$, где S – верхняя сторона части поверхности $z = 1 - x^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$, $y = -1$, $y = 2$. Ответ: -8.

6.3.8 $\iint\limits_S (x + y) dydz + (y - x) dxdz + (z - 2) dxdy$, где S – часть поверхности конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, отсекаемая плоскостями $z = 0, z = 1$, нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz. Ответ: $8\pi/3$.

6.3.9 $\iint\limits_S zdydz + (3y - x)dxdz - zdxdy$, где S – внешняя часть поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 2$, $z = 0$. Ответ: 5π.

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить поверхностные интегралы второго рода.

6.3.10 $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона границы куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Ответ: 3.

6.3.11 $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$ Ответ: $1/2$.

6.3.12 $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-1 \le z \le 1$. Ответ: $6\pi a^2$.

С помощью формулы Стокса вычислить криволинейные интегралы второго рода

6.3.13 $\oint\limits_L (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$. Ответ: 0.

6.3.14 $\oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$; S – часть плоскости $x + y + z = 0,$ ограниченная данной окружностью. Ответ: $-\pi a^2\sqrt{3}$.

6.3.15 $\oint\limits_L yzdx + xzdy + xydz$, где L – контур треугольника с вершинами $O(0;0;0), A(1;1;0), B(1;1;1)$. Ответ: 0.

6.4 Домашнее задание

6.4.1 Вычислить $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdz$, где S – внешняя сторона поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсечённая плоскостями $y = 0, y = 1.$ Ответ: $-0,3\pi$.

6.4.2 Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – верхняя часть поверхности $x + 2y + z - 6 = 0,$ расположенной в первом октанте. Ответ: 54.

6.4.3 Вычислить $\iint\limits_S xdydz + z^3dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ответ: $32\pi/15$.

6.4.4 С помощью формулы Стокса вычислить КРИ-2 $\oint\limits_L (x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz$, где L – контур треугольника с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Ответ: -3.

6.4.5 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить ПИ-2 $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. Ответ: $12\pi R^5/5$.

7 Элементы теории поля

7.1 Теоретическая часть

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины.

Если каждой точке M пространства ставится в соответствие некоторая скалярная величина u, то таким образом задаётся *скалярное поле* $u(M)$. Если каждой точке M пространства ставится в соответствие вектор $\vec{a}$, то задаётся *векторное поле* $\vec{a}(M)$.

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $u=u(x,y,z)$.

Производная $u=u(x,y,z)$ *по направлению* $\vec{l}$ в точке M находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

и характеризует скорость изменения поля в точке по данному направлению ($\frac{\partial u}{\partial l}>0\Rightarrow$ функция возрастает, $\frac{\partial u}{\partial l}<0\Rightarrow$ функция убывает).

Градиент $u=u(x,y,z)$ в точке M – это вектор, который находится по формуле

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\nabla u$$

и характеризует направление наибыстрейшего возрастания функции в точке.

Символический вектор $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ называется *оператором Гамильтона*.

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором $\vec{a}=\vec{a}(M)$:

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}\,.$$

Векторной линией поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется линия, касательная к которой в каждой её точке *M* имеет направление соответствующего ей вектора $\vec{a}(M)$.

Векторные линии поля $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Линейным интегралом векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль линии L называется КРИ-2:

$$W=\int\limits_L\left(\vec{a},d\vec{r}\right)=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz,$$

где $\vec{r}(M)=(x,y,z)$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$.

Если $\vec{a}$ – силовое поле, то W – работа поля по перемещению материальной точки вдоль ориентированной линии.

Если кривая *L* представляет собой замкнутый контур, то линейный интеграл по такому контуру называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура *L*:

$$Ц_L\left(\vec{a}\right)=\oint\limits_L\left(\vec{a},d\vec{r}\right)=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz\,.$$

Циркуляция векторного поля характеризует вращательную способность поля на линии.

$Ц_L\left(\vec{a}\right)>0 \quad (<0)\Rightarrow$ линия L, расположенная в поле $\vec{a}$, под действием силы $\vec{a}$ вращается в положительном (отрицательном) направлении.

$Ц_L\left(\vec{a}\right)=0\Rightarrow$ линия L не вращается.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ называется скалярная величина, равная

$$\mathrm{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\vec{a}\,.$$

Если $\mathrm{div}\vec{a}(M)>0$, то точка M – источник поля;

$\mathrm{div}\vec{a}(M)<0$, то точка M – сток поля;

$\mathrm{div}\vec{a}(M)=0$, то в точке M нет ни источника, ни стока поля;

$\left|\mathrm{div}\vec{a}(M)\right|$ – мощность источника или стока в точке M.

Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным (трубчатым),* если $\mathrm{div}\vec{a}(M)=0$.

Потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S называется поверхностный интеграл от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности:

$$\Pi_S\left(\vec{a}\right)=\iint_S\left(\vec{a},\overrightarrow{n_0}\right)ds .$$

Формула Остроградского-Гаусса в векторной форме: поток поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S, лежащую в этом поле и ограничивающую область V, в направлении её внешней нормали,

$$\Pi_S\left(\vec{a}\right)=\oint\!\!\!\!\oint_S\left(\vec{a},\overrightarrow{n_0}\right)ds=\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV .$$

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ называется вектор,

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

или

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{a} .$$

Плотность циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M : $\mu=\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}_0\right)$.

Направление ротора в точке M – направление, в котором плотность циркуляции в точке M максимальна:

$$\mu_{\max}=\left|\operatorname{rot}\vec{a}\left(M\right)\right|.$$

Если $\operatorname{rot}\vec{a}=0$, то поле $\vec{a}$ называют *потенциальным (безвихревым)*.

Формула Стокса в векторной форме: циркуляция вектора вдоль контура некоторой поверхности равна потоку вихря (ротора) через эту поверхность:

$$Ц_L\left(\vec{a}\right)=\oint_L\left(\vec{a},d\vec{r}\right)=\iint_S\left(\operatorname{rot}\vec{a},\overrightarrow{n_0}\right)ds=\Pi_S\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right).$$

7.2 Образцы решения примеров

7.2.1 Вычислить производную скалярного поля $z=x^2+xy^2$ в точке $A\left(1;2\right)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$ и найти направление наибыстрейшего возрастания поля в этой точке, если $B\left(3;0\right)$.

Решение

$$\overrightarrow{AB} = (3-1;0-2) = (2;-2),\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx; \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = 4.$$

Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\beta = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial l}(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\cos\beta = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Направление наибыстрейшего возрастания скалярного поля совпадает с направлением градиента этого поля. Найдем градиент функции в точке A:

$$\nabla z(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\vec{j} = 6\vec{i} + 4\vec{j}.$$

7.2.2 Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = a\ (a > 0)$.

Решение

Так как надо найти поток векторного поля через замкнутую поверхность (пирамиду), то воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса. Найдем дивергенцию поля $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, где $P = y, Q = z, R = x$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Следовательно,

$$\Pi_S(\vec{a}) = \oiint\limits_S (\vec{a}, \overrightarrow{n_0})\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV = \iiint\limits_V 0\,dV = 0.$$

7.2.3 Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = xy^2z^2\vec{i} + x^2yz^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ в точке $M_0(2;-1;1)$.

Решение

Наибольшая плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}(M_0)$ достигается в направлении ротора и численно равна $\mu_{\max} = \left|\mathrm{rot}\vec{a}(M_0)\right|$.

Имеем $\vec{a} = \left(xy^2z^2; x^2yz^2; xyz\right)$, значит, $P = xy^2z^2, Q = x^2yz^2, R = xyz.$

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial\left(x^2yz^2\right)}{\partial z}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xy^2z^2\right)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\left(x^2yz^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(xy^2z^2\right)}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(xz - 2x^2yz\right)\vec{i} -$$

$$-\left(yz - 2xy^2z\right)\vec{j} + \left(2xyz^2 - 2xyz^2\right)\vec{k} = \left(xz - 2x^2yz\right)\vec{i} - \left(yz - 2xy^2z\right)\vec{j},$$

$$\mathrm{rot}\vec{a}(M_0) = 10\vec{i} + 5\vec{j},$$

$$\mu_{\max} = \left|\mathrm{rot}\vec{a}(M_0)\right| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}.$$

7.3 Примеры для самостоятельной работы

7.3.1 Пусть задано скалярное поле $u = xy^2z + yz^2 - 3z$. Определить в точке $M_0(0;1;2)$ производную поля по направлению $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; градиент поля; направление наибыстрейшего возрастания поля и наибольшую скорость возрастания. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = 0;\ \nabla u(M_0) = (2;4;1);\ \sqrt{21}$.

7.3.2 Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{j} + z\vec{k}$ через нижнюю сторону части поверхности $S: z = x^2 + y^2$, отсечённую плоскостью $z = 2$. Ответ: -2π.

7.3.3 Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точке $M(-1;-2;1)$ и поток векторного поля через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из части параболоида $x^2 + y^2 = 3z$ и части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, накрывающей параболоид. Ответ: $6{,}5\pi$.

7.3.4 Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + xy\vec{j} - xz\vec{k}$ соленоидальным. Ответ: да.

7.3.5 Вычислить поток для векторного поля $\vec{a} = z^2\vec{i} + (xy-1)\vec{j} - (x-y)\vec{k}$ и положительно ориентированной замкнутой поверхности $S: 3x + 2y + z = 6,$ $x \ge 0, y \ge 0,\ z \ge 0$. Ответ: -3.

7.3.6 Вычислить поток для векторного поля $\vec{a} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$ и положительно ориентированной замкнутой поверхности $S: x^2 + z^2 = y^2, y = 1, y \ge 0$. Ответ: $\pi / 2$.

7.3.7 Вычислить поток радиус-вектора точки $M\left(x, y, z\right)$ через внешнюю сторону конуса $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 1$. Ответ: π.

7.3.8 Найти ротор векторного поля $\vec{a} = \left(1 + 2xy\right)\vec{i} - zy^2\vec{j} + \left(yz^2 - 2yz + 1\right)\vec{k}$ в точке $M_0\left(2; -1; 2\right)$. Ответ: $\left(1; 0; -4\right)$.

7.3.9 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \left(z^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$ вдоль ориентированной в положительном направлении контура треугольника с вершинами в точках $A\left(1;0;0\right), B\left(0;1;0\right), C\left(0;0;1\right)$ и ротор этого поля. Ответ: 2.

7.3.10 Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = \left(x - y\right)\vec{i} - x\vec{j} + xz\vec{k}$ в точке $M_0\left(0; 2; -2\right)$. Ответ: 2.

7.4 Домашнее задание

7.4.1 Пусть задано скалярное поле $u = \operatorname{tg}\left(yz\right) + e^{z\ln x} - z$. Определить в точке $M_0\left(1;0;2\right)$ производную поля по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1\left(3;-2;5\right)$; градиент поля; направление наибыстрейшего возрастания поля и наибольшую скорость возрастания. Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial l}\left(M_0\right) = -3\sqrt{17}/17$; $\nabla u\left(M_0\right) = \left(2;2;-1\right)$; 3.

7.4.2 Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + 0{,}5yz\vec{j} + x^2z\vec{k}$ через нижнюю сторону части поверхности $S: z = x^2 + y^2$, которая вырезана цилиндром $x^2 + y^2 = 2$. Ответ: $2\pi/3$.

7.4.3 Найти поток вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$ и через полную поверхность этого цилиндра. Ответ: 0; 0.

7.4.4 Вычислить циркуляцию для векторного поля $\vec{a} = \left(z^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$ вдоль контура треугольника ABC с вершинами $A\left(1;0;0\right), B\left(0;1;0\right), C\left(0;0;1\right)$. Ответ: 2.

7.4.5 Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = z^2\vec{i} - xz\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точке $M_0\left(1;-2;1\right)$. Ответ: $\sqrt{6}$.

Список литературы

1 Высшая математика. Общий курс : учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск : Вышэйшая школа, 2000. – 351 с.

2 **Гусак, А. А.** Высшая математика : учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – Т. 2. – 448 с.

4 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 411 с.

6 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: учебное пособие для втузов / В. А. Болтов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Т. 1. – 464 с.

7 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / В. А. Болтов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Т. 2. – 368 с.

8 **Шипачёв, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачёв. – 7-е изд. – Москва: Высшая школа, 2005. – 479 с.