МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Могилев 2022

УДК 517.5
ББК 22.161.6
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» ноября 2021 г., протокол № 3

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель Т. Ю. Орлова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Функции нескольких переменных» предназначены для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения. Изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения примеров, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Понятие функции нескольких переменных

1.1 Теоретическая часть

Понятие функции нескольких переменных (ФНП).

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Зависимость f, при которой каждой паре чисел $(x, y) \in D$ ставится в соответствие единственное число $z \in \mathbb{R}$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D, и записывается в виде $z = f(x, y)$. При этом x и y называются ***независимыми переменными*** (***аргументами***), а z – ***зависимой переменной*** (***функцией***).

Множество $D = D(f)$ называется ***областью определения*** функции. Если D не указано, то областью определения называется множество всех пар чисел (x, y), при которых функция имеет смысл. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется ***областью значений*** (областью изменения) этой функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции двух переменных является поверхность, образованная множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$. Область определения функции D обычно представляет собой часть плоскости xOy, ограниченную некоторыми линиями, которые могут принадлежать (замкнутая область) или не принадлежать (незамкнутая область) этой области.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости xOy, в которых функция принимает одно и то же значение C.

Линии уровня функции $z = f(x, y)$ имеют уравнения $C = f(x, y)$, где $C \in E(f)$.

Величина u называется ***функцией*** n ***переменных*** x_1, x_2, …, x_n, если каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ переменных x_1, x_2, …, x_n из некоторой области n-мерного пространства ставится в соответствие определенное значение u. Функция n независимых переменных записывается в виде $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Предел функции двух переменных.

Множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, называется δ-окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки.

Число A называется ***пределом функции*** $z=f(x,y)$ при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для всех $x\neq x_0$ и $y\neq y_0$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, выполняется неравенство $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. Записывают

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \text{ или } A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому $M(x,y)$ стремится к $M_0(x_0,y_0)$.

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной. Это означает, что справедливы утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют в точке $M_0(x_0,y_0)$ пределы A и B соответственно, то и функции $f(M)\pm g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M)\neq 0)$ имеют в точке $M_0(x_0,y_0)$ пределы, которые соответственно равны $A\pm B$, $A\cdot B$, $\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

Непрерывность функции двух переменных.

Функция $z=f(x,y)$ (или $z=f(M)$) называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если она:

1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

2) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;

3) этот предел равен значению функции z в точке $M_0(x_0,y_0)$, т. е.

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Точки, в которых нарушается хотя бы одно условие непрерывности, называются ***точками разрыва***.

Можно дать другое, равносильное вышеприведенному, определение непрерывности функции $z=f(x,y)$ в точке.

Обозначим $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$. Величины Δx и Δy называются ***приращениями аргументов*** x и y, а Δz – ***полным приращением функции*** $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Функция $z=f(x,y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0$.

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям.

1.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти область определения функции $z = \ln\left(y - x^2 + 2x\right)$.

Решение

Область определения функции $D(z)$ есть множество точек плоскости xOy, в которых $y - x^2 + 2x > 0$ или $y > x^2 - 2x$. Границей области D является парабола $y = x^2 - 2x$. Поскольку точки параболы не принадлежат области D, то она изображается штриховой линией. Далее непосредственной проверкой определяется, что точки, удовлетворяющие неравенству $y > x^2 - 2x$, расположены выше параболы (рисунок 1.1).

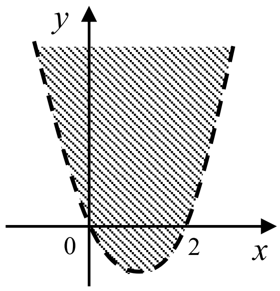

Рисунок 1.1

Пример 2 – Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение

Линии уровня определяются уравнением $x^2 + y^2 = C$. Это уравнение задает множество концентрических окружностей с центром в начале координат (рисунок 1.2).

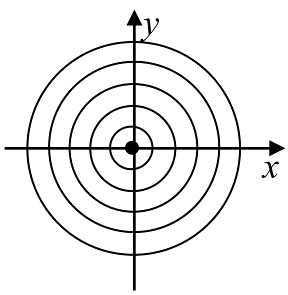

Рисунок 1.2

Пример 3 – Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x+3y-4)}{(x+3y)^2-16}$.

Решение

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{\sin(x+3y-4)}{(x+3y)^2-16}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{\sin(x+3y-4)}{(x+3y-4)(x+3y+4)}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\sin(x+3y-4)\sim x+3y-4\\ \text{при } x\to 1,\ y\to 1\end{array}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{x+3y-4}{(x+3y-4)(x+3y+4)}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{1}{x+3y+4}=\frac{1}{8}.$$

Пример 4 – Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Решение

Будем приближаться к точке $O(0;0)$ по прямой $y=kx$, где k – некоторое число. Тогда

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $O(0;0)$, т. к. при различных значениях k предел функции не одинаков.

Пример 5 – Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{при } x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0 \quad \text{при } x=0,\ y=0\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

Решение

Проверяем условия непрерывности функции в точке $O(0;0)$.

1 Функция $f(x,y)$ определена в окрестности этой точки.

2 Предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$, т. к. $x+y\to 0$, а $\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ ограничена.

3 Предел в точке $O(0;0)$ равен значению функции в этой точке.

Следовательно, функция непрерывна в точке $O(0;0)$.

Пример 6 – Исследовать на непрерывность функцию $z=\dfrac{x+y}{x-y^2}$.

Решение

Функция непрерывна как отношение многочленов во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль. Следовательно, функция непрерывна во всех точках (x,y), за исключением точек, лежащих на параболе $x=y^2$.

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти области определения следующих функций:

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;
2) $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$;
3) $z=\ln(x+y)$;
4) $z=\sqrt{y^2-2x+4}$;
5) $z=x+\arccos y$;
6) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;
7) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$;
8) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$;
9) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;
10) $z=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$;
11) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;
12) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

2 Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$.

Ответ: 1;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

Ответ: 2;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 5}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$.

Ответ: e^5;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$.

Ответ: -6;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$.

Ответ: предел не существует.

3 Исследовать на непрерывность функции:

1) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\arccos\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{при } x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0 \quad \text{при } x=0,\ y=0\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

Ответ: функция непрерывна;

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{3xy^2} & \text{при } x\neq 0,\ y\neq 0, \\ 0 \quad \text{при } x=0,\ y=0\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

Ответ: устранимый разрыв.

4 Найти точки разрыва функций:

1) $f(x,y)=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Ответ: $O(0;0)$;

2) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2+1}{x^2-y^2}$.

Ответ: точки прямых $y=x$ и $y=-x$;

3) $f(x,y)=\dfrac{y+1}{x-y^2}$.

Ответ: точки параболы $x=y^2$.

1.4 Домашнее задание

1 Найти области определения следующих функций:

1) $z=\ln\left(4-x^2+y^2\right)$;

2) $z=\ln x+\sqrt{y}$;

3) $z=\sqrt{4-x^2+y}$;

4) $z=\sqrt{xy}+\sqrt{x-y}$.

2 Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 5}}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Ответ: e^3;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to 0}}\dfrac{\arcsin xy^2}{x^2 y}$.

Ответ: 0;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}}\dfrac{e^{y(x+y-3)}-1}{5(1+x)(x+y-3)}$.

Ответ: 0,4.

3 Исследовать на непрерывность функции:

1) $z=\dfrac{x^2+3y}{x^2+y^2-1}$;

2) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

2 Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных

2.1 Теоретическая часть

Частные производные ФНП.

Пусть функция $z=f\left(x,y\right)$ определена в некоторой окрестности точки $M\left(x,y\right)$. Придадим переменной x в точке $M\left(x,y\right)$ произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y неизменным. Тогда функция $z=f\left(x,y\right)$ получит приращение

$$\Delta_x z=f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right),$$

называемое ***частным приращением*** функции $z=f\left(x,y\right)$ по переменной x в точке $M\left(x,y\right)$.

Аналогично, если придать переменной y произвольное приращение Δy, а переменную x оставить постоянной, то получим частное приращение

$$\Delta_y z=f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)$$

функции $z=f\left(x,y\right)$ по переменной y.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется ***частной производной*** функции $z=f\left(x,y\right)$ по переменной x в точке $M\left(x,y\right)$ и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная функции $z=f\left(x,y\right)$ по переменной y в точке $M\left(x,y\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Таким же образом определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Из определения следует, что частная производная ФНП представляет собой производную функции одной переменной при фиксированном значении остальных. Поэтому частные производные находятся по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной.

Геометрический смысл частных производных ФНП.

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x,y)$. Ее графиком является некоторая поверхность в $\mathbb{R}^3$ (рисунок 2.1). $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на графике, $M_0(x_0, y_0)$ – проекция точки P_0 на плоскость xOy, $z_0 = M_0P_0$. Через прямую M_0P_0 проведем плоскости $p_1: y = y_0$ и $p_2: x = x_0$. Сечения поверхности $z = f(x,y)$ плоскостями p_1 и p_2 представляют собой кривые $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ и $z = f(x_0, y) = g(y)$ соответственно. Тогда

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta,$$

где α и β – углы, образованные касательными, проведенными к кривым $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ и $z = f(x_0, y) = g(y)$в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ с положительными направлениями осей Ox и Oy соответственно.

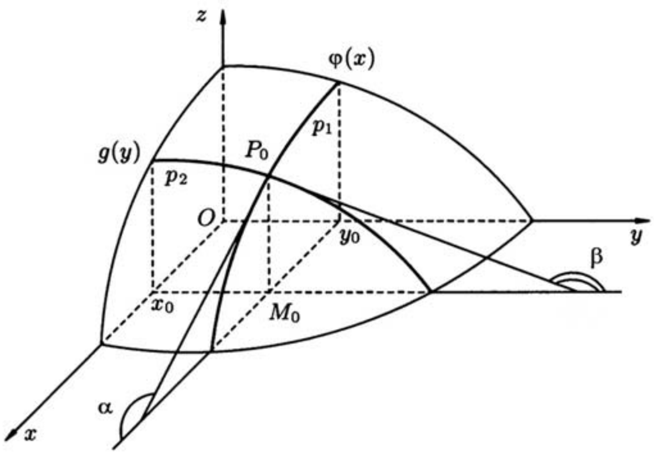

Рисунок 2.1

Дифференцируемость и полный дифференциал функции.

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x,y)$. Составим полное приращение функции в точке $M(x,y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Функция $z = f(x,y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x,y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в этом равенстве называется ***главной частью*** приращения функции.

Главная часть полного приращения функции $z = f(x,y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** этой функции и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$.

***Необходимое условие дифференцируемости функции*:** если функция $z = f\left(x, y\right)$ дифференцируема в точке $M\left(x, y\right)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

***Достаточное условие дифференцируемости функции*:** если функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M\left(x, y\right)$, то она дифференцируема в этой точке.

Так как приращения независимых переменных совпадают с их дифференциалами, т. е. $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то дифференциал функции $z = f\left(x, y\right)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{2.1}$$

Для функции n переменных $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ полный дифференциал определяется равенством

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \tag{2.2}$$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Из определения дифференциала функции $z = f\left(x, y\right)$ следует, что при достаточно малых $\left|\Delta x\right|$ и $\left|\Delta y\right|$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$. Так как полное приращение $\Delta z = f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)$, то получим формулу для приближенного вычисления значения функции

$$f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + f'_x\left(x, y\right)\Delta x + f'_y\left(x, y\right)\Delta y. \tag{2.3}$$

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти частные производные функции $z = 2x^3y^2 - 3xy^3 + 4x - y$.

Решение

При вычислении частной производной функции z по x считаем, что $y = \text{const}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2 - 3y^3 + 4.$$

При вычислении частной производной функции z по y считаем, что $x = \mathrm{const}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3 y - 9xy^2 - 1.$$

Пример 2 – Найти частные производные функции $z = \dfrac{x^2 - 2xy}{y^2 + 5x^2 y + 1}$.

Решение

Применим правило дифференцирования частного:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(x^2 - 2xy\right)'_x \cdot \left(y^2 + 5x^2 y + 1\right) - \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \left(y^2 + 5x^2 y + 1\right)'_x}{\left(y^2 + 5x^2 y + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2x - 2y\right) \cdot \left(y^2 + 5x^2 y + 1\right) - \left(x^2 - 2xy\right) \cdot 10xy}{\left(y^2 + 5x^2 y + 1\right)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(x^2 - 2xy\right)'_y \cdot \left(y^2 + 5x^2 y + 1\right) - \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \left(y^2 + 5x^2 y + 1\right)'_y}{\left(y^2 + 5x^2 y + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{-2x \cdot \left(y^2 + 5x^2 y + 1\right) - \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \left(2y + 5x^2\right)}{\left(y^2 + 5x^2 y + 1\right)^2}.$$

Пример 3 – Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$.

Решение

Применим правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - y^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x \cdot \sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - y^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Полный дифференциал функции найдем по формуле (2.1):

$$dz = -\frac{y}{x\cdot\sqrt{x^2-y^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy.$$

Пример 4 – Найти полный дифференциал функции $u=\ln^2\left(x^2+y^2-z^2\right)$.

Решение

Найдем частные производные функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot 2x = \frac{4x\cdot\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot 2y = \frac{4y\cdot\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)\cdot\frac{1}{x^2+y^2-z^2}\cdot(-2z) = -\frac{4z\cdot\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2}.$$

Полный дифференциал найдем по формуле (2.2):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

$$du = \frac{4\ln\left(x^2+y^2-z^2\right)}{x^2+y^2-z^2}\cdot\left(xdx+ydy-zdz\right).$$

Пример 5 – Вычислить приближенно $(1,04)^{2,03}$.

Решение

Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^y$. Тогда по формуле (2.3) имеем

$$x=1,\qquad \Delta x=0,04,\qquad y=2,\qquad \Delta y=0,03,\qquad f(1;2)=1,$$

$$f'_x(x,y)=y\cdot x^{y-1},\qquad f'_x(1;2)=2,\qquad f'_y(x,y)=x^y\cdot\ln x,\qquad f'_y(1;2)=0.$$

Следовательно,

$$(1,04)^{2,03}\approx 1+2\cdot 0,04+0\cdot 0,03=1,08.$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти частные производные функций:

1) $z = x^3y^2 - x^2 + 4y - 2$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 4$;

2) $z = \ln\left(x^2 - 3xy + 2y\right)$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x - 3y}{x^2 - 3xy + 2y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-3x + 2}{x^2 - 3xy + 2y}$;

3) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3y^2}{\sqrt{\left(x^2 + 3y^2\right)^3}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3xy}{\sqrt{\left(x^2 + 3y^2\right)^3}}$;

4) $z = y\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{tg}\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y\cdot\cos^2\dfrac{x}{y}}$;

5) $u = \sin\dfrac{y}{xz}$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2z}\cos\dfrac{y}{xz}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{xz}\cos\dfrac{y}{xz}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{y}{xz^2}\cos\dfrac{y}{xz}$.

2 Найти полные дифференциалы функций:

1) $z = yx^y$.

Ответ: $dz = y^2x^{y-1}dx + \left(x^y + yx^y\ln x\right)dy$;

2) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y} + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Ответ: $dz = 0$;

3) $z = x^2y\cos x - 3y^2$.

Ответ: $dz = \left(2xy\cos x - x^2y\sin x\right)dx + \left(x^2\cos x - 6y\right)dy$;

4) $z = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: $dz = -\dfrac{xy}{|x|\left(x^2 + y^2\right)}dx + \dfrac{|x|}{x^2 + y^2}dy$;

5) $u = \operatorname{tg}^2\left(x - y^2 + 2xz^3\right)$.

Ответ: $du = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(x - y^2 + 2xz^3\right)}{\cos^2\left(x - y^2 + 2xz^3\right)}\left(\left(1 + 2z^3\right)dx - 2ydy + 6xz^2dz\right)$.

3 Найти значения частных производных функций в данной точке:

1) $z = e^{xy}$, $M_0(0;1)$.

Ответ: $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0$;

2) $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$, $P_0\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4 Показать, что функция $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

5 Вычислить приближенно:

1) $(0,97)^{2,02}$.

Ответ: 0,94;

2) $\sqrt{4,05^2 + 3,07^2}$.

Ответ: 5,08;

3) $\sin 28° \cdot \cos 61°$.

Ответ: 0,228;

4) $\sqrt{5e^{0,02} + 2,03^2}$.

Ответ: 3,037.

2.4 Домашнее задание

1 Найти частные производные и полные дифференциалы функций:

1) $z = x^5 + 2y^4 - 5x^3y^2$.

Ответ: $dz = \left(5x^4 - 15x^2y^3\right)dx + \left(8y^3 - 10x^3y\right)dy$;

2) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Ответ: $dz = \dfrac{4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}dx - \dfrac{4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}dy$;

3) $z = \dfrac{\cos^2 y}{x}$.

Ответ: $dz = -\dfrac{\cos^2 y}{x^2}dx - \dfrac{2\cos y \sin y}{x}dy$;

4) $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

Ответ: $dz = -\dfrac{y}{x^2 \sin \dfrac{y}{x} \cos \dfrac{y}{x}} dx + \dfrac{1}{x \sin \dfrac{y}{x} \cos \dfrac{y}{x}} dy$;

5) $z = x \ln\left(x^2 + y^2\right) + 2y$.

Ответ: $dz = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\dfrac{2xy}{x^2 + y^2} + 2 \right) dy$;

6) $u = x^2 y \sin z$.

Ответ: $du = 2xy \sin z dx + x^2 \sin z dy + x^2 y \cos z dz$.

2 Вычислить приближенно:

1) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

Ответ: 2,95;

2) $2{,}01^{3{,}03}$.

Ответ: 8,29;

3) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}97}{1{,}02} - 1 \right)$.

Ответ: 0,75.

3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Теоретическая часть

Частные производные высших порядков.

Частными производными второго порядка от функции $z = f\left(x, y\right)$ называются частные производные от частных производных первого порядка (если они существуют), т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и т. д. порядков.

Частные производные второго или более высокого порядка, взятые по различным переменным, называются ***смешанными частными производными.***

Непрерывные смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой. Так, например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Дифференциалы высших порядков.

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала функции

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков:

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right), \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Пусть x, y – независимые переменные функции $z = f(x, y)$. Тогда

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{3.1}$$

Символически это записывается $d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z$.

Аналогично

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

В общем случае

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Производные и дифференциалы высших порядков функции большего числа переменных определяются таким же образом.

3.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти все частные производные второго порядка для функции $z = x^3 + 2x^2 y + y^2$.

Решение

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 2y.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(3x^2+4xy\right)'_x=6x+4y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(3x^2+4xy\right)'_y=4x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(2x^2+2y\right)'_y=2,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(2x^2+2y\right)'_x=4x.$$

Пример 2 – Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=\sin xy$.

Решение

Дифференцируем данную функцию дважды по x и затем по y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos xy\cdot\left(xy\right)'_x=y\cdot\cos xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(y\cdot\cos xy\right)'_x=-y\cdot\sin xy\cdot\left(xy\right)'_x=-y^2\cdot\sin xy,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\left(-y^2\cdot\sin xy\right)'_y=-2y\cdot\sin xy-xy^2\cdot\cos xy.$$

Пример 3 – Найти дифференциал второго порядка функции $z=3x^2y-2xy+y^2-1$.

Решение

Находим первые и вторые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy-2y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2-2x+2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6y,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x-2,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2.$$

Следовательно, по формуле (3.1) имеем

$$d^2z=6ydx^2+2\left(6x-2\right)dxdy+2dy^2.$$

Пример 4 – Найти дифференциал второго порядка функции $u=xyz$.

Решение

Воспользуемся свойствами дифференциала.

$$du = d\left(xyz\right) = yzdx + xzdy + xydz,$$

$$d^2u = d\left(du\right) = d\left(yz\right)dx + d\left(xz\right)dy + d\left(xy\right)dz =$$

$$= \left(zdy + ydz\right)dx + \left(zdx + xdz\right)dy + \left(xdy + ydx\right)dz =$$

$$= 2xdydz + 2ydxdz + 2zdxdy.$$

3.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти производные второго порядка и проверить равенство смешанных производных:

1) $z = 2x^4y^3 - 3xy^2 + 5x^2 - y + 1$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x^2y^3 + 10$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24x^3y^2 - 6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^4y - 6x$;

2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2\left(y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-4xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$;

3) $z = x^y$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\left(y - 1\right)x^{y-2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}\left(1 + y\ln x\right)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$;

4) $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{-y^2}{\sqrt{\left(2xy + y^2\right)^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{xy}{\sqrt{\left(2xy + y^2\right)^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{-x^2}{\sqrt{\left(2xy + y^2\right)^3}}$.

2 Доказать, что функция $z = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

3 Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ для функции $z = \sin\left(x + \cos y\right)$.

Ответ: $\sin y \cdot \cos\left(x + \cos y\right)$.

4 Найти дифференциал второго порядка функций:

1) $z = x^2y - xy^2 + 7$.

Ответ: $d^2z = 2ydx^2 + 4\left(x - y\right)dxdy - 2xdy^2$;

2) $z = xy - \dfrac{y}{x}$.

Ответ: $d^2z = -\dfrac{2y}{x^3}dx^2 + 2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)dxdy$;

3) $z = (x^2 + y^2)^3$.

Ответ: $d^2z = 6\left(x^2 + y^2\right)\left(\left(5x^2 + y^2\right)dx^2 + 4xydxdy + \left(x^2 + 5y^2\right)dy^2\right)$.

5 Найти дифференциал третьего порядка функции $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

Ответ: $d^3z = 6(dx^3 + dy^3)$.

3.4 Домашнее задание

Найти требуемую частную производную или дифференциал:

1) $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, d^2z.

Ответ: $\left(24x + 6y\right)dx^2 + 12\left(x + y\right)dxdy + \left(6x - 6y\right)dy^2$;

2) $z = x^2\ln\left(x + y\right)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Ответ: $\dfrac{x^2 + 2xy}{(x + y)^2}$;

3) $z = x\ln\dfrac{y}{x}$, d^2z.

Ответ: $-\dfrac{dx^2}{x} + \dfrac{2dxdy}{y} - \dfrac{xdy^2}{y^2}$;

4) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Ответ: 0;

5) $u = x^3y^5z^7$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

Ответ: $105x^2y^4z^6$.

4 Дифференцирование сложных и неявных функций

4.1 Теоретическая часть

Пусть $z = f\left(x, y\right)$, где $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$, t – независимая переменная. Тогда $z = f\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$ является ***сложной*** функцией одной независимой переменной t (переменные x, y – промежуточные).

Теорема. *Если функции* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *дифференцируемы в точке* t, *а функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x, y), *то сложная функция* $z = f(x(t), y(t))$ *также дифференцируема в точке* t, *причем*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{4.1}$$

Если $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$, x – независимая переменная, то производная будет $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$. Следовательно,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{4.2}$$

Аналогично находится производная функции $u = f(x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим более общий случай. Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, u, v – независимые переменные. Тогда $z = f(x(u, v), y(u, v))$ является сложной функцией двух независимых переменных u, v (переменные x, y – промежуточные).

Теорема. *Если функции* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ *дифференцируемы в точке* (u, v), *а функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x, y), *то сложная функция* $z = f(x(u, v), y(u, v))$ *также дифференцируема в точке* (u, v), *причем*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Аналогично находятся частные производные ФНП в случаях трех, четырех и т. д. независимых переменных. Так, например, частные производные функции $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, находятся по формулам

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial w}. \end{cases}$$

Частные производные функции $z = f\left(u, v, w\right)$, где $u = u\left(x, y\right)$, $v = v\left(x, y\right)$, $w = w\left(x, y\right)$, находятся по формулам

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial y}. \end{cases}$$

Пусть уравнение $f\left(x, y\right) = 0$, где f – дифференцируемая функция двух переменных x, y, определяет ***неявную*** функцию $y = y\left(x\right)$. Тогда производную этой функции можно найти по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x\left(x, y\right)}{f'_y\left(x, y\right)} \tag{4.5}$$

при условии, что $f'_y\left(x, y\right) \neq 0$.

Пусть уравнение $F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u\right) = 0$, где F – дифференцируемая функция n переменных x_1, x_2, …, x_n, определяет ***неявную*** функцию $u = u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. Тогда частные производные этой функции можно найти по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.6}$$

при условии, что $F'_u \neq 0$.

4.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти производную функции $z = x^2 y^3$, $x = t$, $y = t^2$.

Решение

Подставим $x = t$, $y = t^2$ в функцию $z = x^2 y^3 = t^2 \cdot t^6 = t^8$. Получим

$$\frac{dz}{dt} = 8t^7.$$

Пример 2 – Найти производную функции $z = x \sin\dfrac{x}{y}$, где $x = t^3$, $y = \sqrt{1 + t^2}$.

Решение

Подставлять $x = t^3$, $y = \sqrt{1 + t^2}$ в функцию $z = x \sin\dfrac{x}{y}$ неудобно. Воспользуемся формулой (4.1):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y},\qquad \frac{dx}{dt}=3t^2,\qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Имеем

$$\frac{dz}{dt}=3t^2\cdot\left(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y},$$

где $x=t^3$, $y=\sqrt{1+t^2}$.

Пример 3 – Найти производную функции $z=\operatorname{arctg}\left(x^2y\right)$, $y=\cos 2x$.

Решение

Воспользуемся формулой (4.2):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{1+x^4y^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{1+x^4y^2},\qquad \frac{dy}{dx}=-2\sin 2x.$$

Получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2xy}{1+x^4y^2}-\frac{x^2}{1+x^4y^2}\cdot 2\sin 2x=\frac{2xy-2x^2\sin 2x}{1+x^4y^2}.$$

Пример 4 – Найти частные производные функции $z=x^2-y^2$, $x=u\cos v$, $y=v\sin u$.

Решение

Воспользуемся формулами (4.4):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\cos v,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-u\cdot\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=v\cdot\cos u,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\sin u.$$

Получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=2x\cdot\cos v-2y\cdot v\cdot\cos u,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v}=-2x\cdot u\cdot\sin v-2y\cdot\sin u,\end{cases}$$

где $x=u\cos v$, $y=v\sin u$.

Пример 5 – Найти частные производные функции $z=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt[3]{y^2\sin x}$.

Решение

Введем замену: $u=\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}$, $v=y^2\sin x$. Тогда $z=\operatorname{tg}u\cdot\sqrt[3]{v}$. Воспользуемся формулами (4.4):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\sqrt[3]{v}}{\cos^2 u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\operatorname{tg}u}{3\sqrt[3]{v^2}},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{\sqrt{y}},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{2\sqrt{y^3}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y^2\cos x,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2y\sin x.$$

Получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\sqrt[3]{v}}{\cos^2 u}\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{y}}-\dfrac{\operatorname{tg}u}{3\sqrt[3]{v^2}}\cdot y^2\cos x,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\sqrt[3]{v}}{\cos^2 u}\cdot\dfrac{x^2}{2\sqrt{y^3}}-\dfrac{\operatorname{tg}u}{3\sqrt[3]{v^2}}\cdot 2y\sin x.\end{cases}$$

Подставив $u=\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}$, $v=y^2\sin x$, имеем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\sqrt[3]{y^2\sin x}}{\cos^2\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}}\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{y}}-\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}}{3\sqrt[3]{y^4\sin^2 x}}\cdot y^2\cos x,\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\sqrt[3]{y^2\sin x}}{\cos^2\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}}\cdot\dfrac{x^2}{2\sqrt{y^3}}-\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}}{3\sqrt[3]{y^4\sin^2 x}}\cdot 2y\sin x.\end{cases}$$

Пример 6 – Найти производную функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением $2+xy^2-\ln\left(e^x-e^y\right)=0$.

Решение

Воспользуемся формулой (4.5). Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=2+xy^2-\ln\left(e^x-e^y\right).$$

Найдем ее частные производные:

$$f'_x = y^2 - \frac{e^x}{e^x - e^y} = \frac{y^2e^x - y^2e^y - e^x}{e^x - e^y},$$

$$f'_y = 2xy - \frac{-e^y}{e^x - e^y} = \frac{2xye^x - 2xye^y + e^y}{e^x - e^y}.$$

Получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2e^x - y^2e^y - e^x}{2xye^x - 2xye^y + e^y}.$$

Пример 7 – Найти производную функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^3 + 4x^2yz^3 - 3xz + 4y^2z - 5 = 0$.

Решение

Воспользуемся формулами (4.6). Рассмотрим функцию

$$F(x, y, z) = x^3 + 4x^2yz^3 - 3xz + 4y^2z - 5.$$

Найдем ее частные производные:

$$F'_x = 3x^2 + 8xyz^3 - 3z, \qquad F'_y = 4x^2z^3 + 8yz, \qquad F'_z = 12x^2yz^2 - 3x + 4y^2.$$

Получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{3x^2 + 8xyz^3 - 3z}{12x^2yz^2 - 3x + 4y^2}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{4x^2z^3 + 8yz}{12x^2yz^2 - 3x + 4y^2}. \end{cases}$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \dfrac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \ln t$.

2 Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

3 Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \dfrac{\sqrt{\cos^3 t\sqrt{t}}}{t^2 \sin t}$.

4 Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = \cos t^2 \cdot \sin\sqrt{t} \cdot \operatorname{tg}\sqrt[3]{t^4}$.

5 Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\left(\sin t^2\right)^{\arcsin\sqrt{t}}$.

6 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^y$, $y=\arcsin\left(2x-1\right)$.

7 Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\frac{x^2}{y}$, $x=u-2v$, $y=v+2u$.

8 Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\frac{uv}{\sin^2\frac{u}{v}}+\cos\frac{u}{v}-uv$.

9 Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$, если $z=\arcsin u^2v\cdot\cos vw^3\cdot\sqrt{\sin w}$.

10 Найти dz, если $z=u\sqrt{v^2+4u}$, $u=\cos\left(xy\right)$, $v=x^5-7y$.

11 Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^2-4y^2=4$.

12 Найти $\frac{dy}{dx}$, если $2\cos\left(x-2y\right)=2y-x$.

13 Найти $\frac{dy}{dx}$, если $xy+\ln y+\ln x=0$.

14 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2+y^2+z^2=a^2$.

15 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$.

16 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z\ln\left(x+y\right)-\frac{xy}{z}=0$.

17 Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $x+y+z=e^z$.

4.4 Домашнее задание

1 Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^y$, $x=\ln t$, $y=\sin t$.

2 Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\frac{\operatorname{ctg}^3\left(t\cos t\right)}{t^2\sin t}$.

3 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y=x^2$.

4 Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x=u\sin v$, $y=v\cos v$.

5 Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\frac{\cos(uv)}{\sin^2\frac{u}{v}}+\frac{v}{u}-uv\operatorname{tg}\frac{u}{v}$.

6 Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\frac{xy}{\sin x}+\ln\frac{y}{x}+e^{xy}=0$.

7 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3y+2y^3z^2+4xz^3-3xy^2z-2xy+z-23=0$.

5 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

5.1 Теоретическая часть

Касательной плоскостью к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется плоскость, в которой содержатся все касательные, проведенные через эту точку к всевозможным кривым, лежащим на поверхности $z=f(x,y)$.

Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то касательная плоскость в этой точке существует и имеет уравнение

$$z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0). \quad (5.1)$$

В какой-либо точке поверхность имеет либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Нормалью к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется прямая, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно касательной плоскости в этой точке. Уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \quad (5.2)$$

Если функция задана неявно, т. е. уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(M_0)\cdot(z-z_0)=0. \quad (5.3)$$

Если функция задана неявно, т. е. уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение нормали в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (5.4)$$

5.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке $M_0(1;1)$.

Решение

Поверхность задана явно. Воспользуемся формулами (5.1) и (5.2):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2;$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 2.$$

Уравнение касательной плоскости

$$z - 1 = -1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1),$$

$$x - 2y + z = 0.$$

Уравнение нормали

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Пример 2 – Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\cos(xy) + \frac{xz}{y} - x^2 z + z^2 - 2xyz + \sin z + 1 = 0$ в точке $M_0(\pi;1;0)$.

Решение

Поверхность задана неявно, поэтому воспользуемся формулами (5.3) и (5.4). Составим функцию

$$F(x, y, z) = \cos(xy) + \frac{xz}{y} - x^2 z + z^2 - 2xyz + \sin z + 1.$$

Тогда

$$F'_x = -y\sin(xy) + \frac{z}{y} - 2xz - 2yz, \qquad F'_x(\pi;1;0) = 0;$$

$$F'_y = -x\sin(xy) - \frac{xz}{y^2} - 2xz, \qquad F'_y(\pi;1;0) = 0;$$

$$F'_z = \frac{x}{y} - x^2 + 2z - 2xy + \cos z, \qquad F'_z(\pi;1;0) = 1 - \pi - \pi^2.$$

Уравнение касательной плоскости

$$0\cdot(x-\pi)+0\cdot(y-1)+\left(1-\pi-\pi^2\right)(z-0)=0,$$

$$z=0.$$

Уравнение нормали

$$\frac{x-\pi}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1-\pi-\pi^2}.$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к следующим поверхностям в указанных точках:

1) $z=x^2+y^2$ в точке $(1;-2)$;

2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0$ в точке $(4;3;4)$;

3) $x^2+y^2+z^2=2Rz$ в точке $(R\cos\alpha;R\sin\alpha;R)$;

4) $z=e^{x\cos y}$ в точке $(1;\pi)$;

5) $xy+x^2z-z^2+4x-y-2=0$ в точке $(1;-1;2)$.

5.4 Домашнее задание

Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к следующим поверхностям в указанных точках:

1) $z=x^3+2xy^2$ в точке $(1;-2)$;

2) $\frac{z}{xy}+\frac{x^2z}{y}-xz^2+2y-2=0$ в точке $(-1;1;0)$;

3) $\sin(xz)-\cos(yz)+x^2=1$ в точке $(0;\pi;1)$.

6 Производная по направлению. Градиент

6.1 Теоретическая часть

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x,y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l}\,(\cos\alpha,\cos\beta)$. Для характеристики скорости изменения функции в точке $M(x,y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной по направлению. Для этого проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпало с направлением $\vec{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)$. Обозначим расстояние между точками M и M_1 через $\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (или $\Delta l = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$). Функция $z = f\left(x, y\right)$ получит при этом приращение $\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)$.

Предел отношения приращения функции к расстоянию между точками M и M_1 при стремлении последнего к нулю (если он существует) называется ***производной функции*** $z = f\left(x, y\right)$ ***в точке*** $M\left(x, y\right)$ ***по направлению вектора*** $\vec{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

Если функция $z = f\left(x, y\right)$ дифференцируема в точке $M\left(x, y\right)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta. \tag{6.1}$$

Если $\alpha = 0,$ то $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x};$ если $\beta = 0\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right),$ то $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Следовательно, частные производные функции $z = f\left(x, y\right)$ являются частными случаями производной по направлению, т. е. если направление $\vec{l}$ совпадает с осями координат.

Если задана функция $u = f\left(x, y, z\right)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma, \tag{6.2}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Градиентом функции $z = f\left(x, y\right)$ в точке $M\left(x, y\right)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным функции $z = f\left(x, y\right)$ в точке $M\left(x, y\right)$:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}. \tag{6.3}$$

Производная по направлению будет принимать максимальное значение, если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением $\operatorname{grad} z$. При этом

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} z\right|. \tag{6.4}$$

Таким образом, $\operatorname{grad} z$ в точке $M\left(x, y\right)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания функции z в данной точке.

Антиградиент, т. е. $-\operatorname{grad} z$, характеризует направление наибыстрейшего убывания функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

Если задана функция $u = f(x, y, z)$, то градиент находят по формуле

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}\,. \tag{6.5}$$

6.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Вычислить производную функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $A(1;2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$ и градиент функции в этой точке, если $B(3;0)$.

Решение

Для нахождения производной по направлению воспользуемся формулой (6.1). Вектор $\overrightarrow{AB} = (3-1; 0-2) = (2; -2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Находим частные производные функции $z = x^2 + xy^2$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx; \qquad \frac{\partial z(A)}{\partial x} = 6, \qquad \frac{\partial z(A)}{\partial y} = 4.$$

Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\beta = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,.$$

Для нахождения градиента функции в точке A воспользуемся формулой (6.3). Получим

$$\operatorname{grad} z = 6\vec{i} + 4\vec{j}\,.$$

Пример 2 – Найти направление наибыстрейшего возрастания функции $u = x^2 y + \dfrac{xy^2}{z} - z^2$ в точке $P(3;2;-1)$ и значение производной в этом направлении.

Решение

Направление наибыстрейшего возрастания функции задает градиент. Воспользуемся формулой (6.5). Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + \frac{y^2}{z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{2xy}{z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy^2}{z^2} - 2z;$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x} = 8, \qquad \frac{\partial u(P)}{\partial y} = -3, \qquad \frac{\partial u(P)}{\partial z} = -10.$$

Имеем

$$\operatorname{grad} u = 8\vec{i} - 3\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Производная в направлении градиента принимает максимальное значение, которое проще найти по формуле (6.4). Получим

$$\frac{\partial u(P)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u(P)\right| = \sqrt{8^2 + (-3)^2 + (-10)^2} = \sqrt{173}.$$

6.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти производную функции $z = x^2 - 4xy - 3y^2$ в точке $P(2;1)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в $60°$.

Ответ: $-7\sqrt{3}$.

2 Найти производную функции $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ в точке $M(1;2)$ в направлении, идущем от точки M к точке $N(4;6)$.

Ответ: 1.

3 Найти производную функции $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $P(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4 Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $P(1;2;-1)$ в направлении вектора $\vec{v}$, составляющего одинаковые острые углы со всеми координатными осями.

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5 Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $M(5;3)$, если $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

6 Найти величину и направление $\operatorname{grad} u$ в точке $P(2;-2;1)$, если $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: $(4;-4;2)$; 6.

7 Найти направление быстрейшего возрастания функции $u = x^2 - 3yz + 5$

в точке $P(1;2;-1)$ и вычислить значение производной в этом направлении.

Ответ: $\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7};-\frac{6}{7}\right)$; 7.

6.4 Домашнее задание

1 Найти производную функции $z=x^2y-2xy+3y^2+4$ в точке $A(-1;3)$ в направлении, идущем от точки $B(-4;7)$ к точке A. Найти градиент функции $z=x^2y-2xy+3y^2+4$ в точке $B(-4;7)$.

Ответ: -24, $(-16;66)$.

2 Найти направление быстрейшего возрастания функции $u=\frac{x^2}{z}-yz+x^2$ в точке $P(0;2;1)$ и вычислить значение производной в этом направлении.

Ответ: $(0;-1;-2)$; $\sqrt{5}$.

7 Экстремумы функции двух переменных

7.1 Теоретическая часть

Локальный экстремум.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D. Точка $M_0(x_0,y_0)\in D$ называется ***точкой максимума*** (***минимума***) функции $z=f(x,y)$, если существует такая δ-окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$, что для каждой точки $M(x,y)$ из этой окрестности, отличной от $M_0(x_0,y_0)$, выполняется неравенство $f(x,y)<f(x_0,y_0)\ (f(x,y)>f(x_0,y_0))$.

Значения функции в точках максимума и минимума называются ***максимумом*** и ***минимумом функции*** соответственно. Максимумы и минимумы функции называют ***экстремумами функции***.

***Необходимые условия экстремума*:** если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{7.1}$$

Точки, в которой частные производные первого порядка равны нулю, называются ***стационарными точками*** функции $z = f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ также может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Такие точки и стационарные точки называются ***критическими точками***.

***Достаточные условия экстремума*:** пусть в критической точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \qquad C = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta < 0$, то M_0 не является точкой экстремума;

2) если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то M_0 является точкой максимума;

3) если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то M_0 является точкой минимума;

4) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Глобальный экстремум.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда она достигает в некоторых точках области D своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. имеет так называемый ***глобальный экстремум***. Эти значения могут достигаться функцией как в точках, расположенных внутри области D, так и в точках, лежащих на границе области D.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D, необходимо:

1) найти все критические точки функции, расположенные в области D, и вычислить значения функции в них;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области D;

3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Условный экстремум.

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, причем переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$, которое называется ***уравнением связи***.

Экстремум функции $z = f(x, y)$, достигаемый при условии $\varphi(x, y) = 0$, называется ***условным экстремумом*** функции.

В определенных случаях задача отыскания условного экстремума может быть решена методом подстановки. Для этого надо из уравнения связи выразить одну переменную через другую и подставить в заданную функцию. В результате получим функцию одной независимой переменной, которую следует исследовать на экстремум.

В случаях, когда применить метод подстановки не представляется возможным, отыскание условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум ***функции Лагранжа***

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y), \tag{7.2}$$

где λ – неопределенный постоянный множитель.

Функция Лагранжа является функцией трех переменных. Необходимым условием существования экстремума данной функции является равенство нулю частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Система уравнений (7.3) является ***необходимым условием условного экстремума***. Решения системы определяют критические точки функции Лагранжа.

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа для найденных решений системы при условии $d\varphi(x_0, y_0) = 0$ и $dx^2 + dy^2 \neq 0$. Пусть

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2,$$

тогда при $d^2L < 0$ функция $z = f(x, y)$ будет иметь условный максимум, а при $d^2L > 0$ – условный минимум.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции $z = f(x, y)$ называется ***методом множителей Лагранжа***.

Для функции Лагранжа трех переменных достаточные условия экстремума можно сформулировать следующим образом: пусть функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ имеют частные производные до второго порядка включительно. Составим в критической точке M_0 определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Тогда если $\Delta < 0$, то M_0 является точкой условного максимума, если $\Delta > 0$, то M_0 является точкой условного минимума.

7.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Найти экстремум функции $z = x^3 + 6xy + y^2 - 3x - 6y$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y - 3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x + 2y - 6.$$

Точек, в которых частные производные не существуют, нет. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений вида (7.1):

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y - 3 = 0, \\ 6x + 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили критические точки $M_1(5;-12)$ и $M_2(1;0)$. Далее находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6, \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Вычисляем значения частных производных второго порядка и составляем определитель Δ для каждой из критических точек.

Для точки M_1

$$A = 30,\ B = 6,\ C = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 30 \cdot 2 - 6^2 = 24.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то M_1 является точкой локального минимума. При этом

$$z_{\min} = z(5;-12) = -34.$$

Для точки M_2

$$A = 6,\ B = 6,\ C = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 6 \cdot 2 - 6^2 = -24.$$

Так как $\Delta < 0$, то M_2 не является точкой экстремума.

Пример 2 – Найти экстремум функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 3x^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3.$$

Точек, в которых частные производные не существуют, нет. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений вида (7.1):

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили критические точки $M_1(6;3)$ и $M_2(0;0)$. Далее находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y - 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2.$$

Вычисляем значения частных производных второго порядка и составляем определитель Δ для каждой из критических точек.

Для точки M_1

$$A = -18,\ B = 36,\ C = -108 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то M_1 является точкой локального максимума. При этом

$$z_{\max} = z(6;3) = 27.$$

Для точки M_2

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0.$$

Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю. Можно заметить, что $z = -y^4 < 0$ при $x = 0$, $y \neq 0$ и $z = -x^3 > 0$ при $x < 0$, $y = 0$, т. е. в окрестности точки M_2 функция принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, M_2 не является точкой экстремума.

Пример 3 – Для функции $z = x^2 - 2y^2 - 2x + 4y + 1$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

Решение

Построим область D (рисунок 7.1).

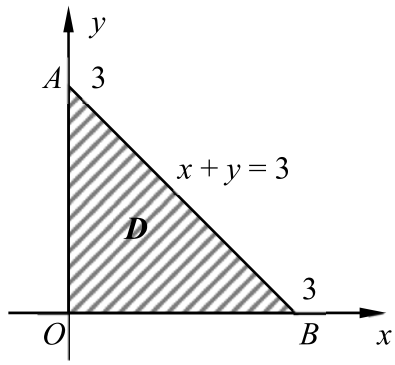

Рисунок 7.1

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 4.$$

Точек, в которых частные производные не существуют, нет. Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений вида (7.1):

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ -4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Получили критическую точку $M_0(1;1)$, лежащую внутри области D. Вычислим значение функции в точке M_0: $z(1;1) = 2$.

Исследуем функцию на границах области D. Рассмотрим сторону OA:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -2y^2 + 4y + 1, \; y \in [0;3];$$

$$z' = -4y + 4, \quad -4y + 4 = 0, \quad y = 1 \in [0;3];$$

$$z(0) = 1, \quad z(1) = 3, \quad z(3) = -5.$$

Рассмотрим сторону OB:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = x^2 - 2x + 1, \; x \in [0;3];$$

$$z' = 2x - 2, \quad 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \in [0;3];$$

$$z(0)=1, \quad z(1)=0, \quad z(3)=4.$$

Рассмотрим сторону AB:

$$y=3-x \quad \Rightarrow \quad z=-x^2+6x-5, \; x\in[0;3];$$

$$z'=-2x+6, \quad -2x+6=0, \quad x=3\in[0;3];$$

$$z(0)=-5, \quad z(3)=4.$$

Сравнивая найденные значения, получаем

$$\max_D z=\max\{2;1;3;-5;0;4\}=4=z(3;0),$$

$$\min_D z=\min\{2;1;3;-5;0;4\}=-5=z(0;3).$$

Пример 4 – Найти экстремум функции $z=x\,y$ при условии $2x+3y-5=0$.

Решение

Составляем функцию Лагранжа (7.2):

$$L=xy+\lambda\cdot(2x+3y-5).$$

Найдем частные производные первого порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda, \qquad \frac{\partial L}{\partial y}=x+3\lambda.$$

Необходимые условия экстремума (7.3) примут вид:

$$\begin{cases} y+2\lambda=0, \\ x+3\lambda=0, \\ 2x+3y-5=0. \end{cases}$$

Решением данной системы является точка $M_0\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6};-\frac{5}{12}\right)$.

Найдем частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=1, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0.$$

Дифференциалом второго порядка функции Лагранжа будет

$$d^2L=2dxdy.$$

Выразим x через y из уравнения связи и найдем его дифференциал:

$$dx = -\frac{3}{2}dy.$$

Отсюда получаем, что $d^2L = -3dy^2 < 0$. Следовательно, в точке M_0 функция имеет условный максимум, причем

$$z_{\max} = \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{24}.$$

7.3 Примеры для самостоятельной работы

1 Найти экстремум функции $z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35$.

Ответ: $z_{\max} = z(1;-4) = -14$.

2 Найти экстремум функции $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

Ответ: экстремума нет.

3 Найти экстремум функции $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$.

Ответ: $z_{\max} = z(-1;-1) = 82$, $z_{\min} = z(1;1) = -82$.

4 Найти экстремум функции $z = x^3y^2(6 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$.

Ответ: $z_{\max} = z(3;2) = 108$.

5 Найти экстремум функции $\frac{x^3}{3} + 2y^2 - z^2x + z = 0$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(\sqrt{\frac{3}{2}};0\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

6 Для функции $z = 1 + x + 2y$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x - y - 1 = 0$.

Ответ: $\max\limits_D z = z(1;0) = 2$, $\min\limits_D z = z(0;-1) = -1$.

7 Для функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x = 1$, $x = 4$, $y = -3$, $y = 2$.

Ответ: $\max\limits_D z = z(1;2) = 9$, $\min\limits_D z = z(3;-2) = -11$.

8 Для функции $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линией $2|x| + 7|y| = 14$.

Ответ: $\max\limits_D z = z(7;0) = 120$, $\min\limits_D z = z(-5;0) = -24$.

9 Для функции $z = x^2 - y^2$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линией $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $\max\limits_D z = z(1;0) = z(-1;0) = 1$, $\min\limits_D z = z(0;1) = z(0;-1) = -1$.

10 Найти экстремум функции $z = e^{xy}$ при условии $x + y = 1$.

Ответ: $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$.

11 Найти экстремум функции $z = xy^2$ при условии $x + 2y = 1$.

Ответ: $z_{\max} = z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$, $z_{\min} = z(1;0) = 0$.

12 Найти экстремум функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Ответ: $z_{\max} = z(1;2) = 5$, $z_{\min} = z(-1;-2) = -5$.

13 Найти экстремум функции $z = -\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y - \frac{1}{5}$ при условии $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 34 = 0$.

Ответ: $z_{\max} = z(-9;11) = 4$, $z_{\min} = z(-5;-1) = 0$.

7.4 Домашнее задание

1 Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$.

Ответ: $z_{\min} = z(7;-2) = -39$.

2 Найти экстремум функции $z = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y} + y$.

Ответ: $z_{\max} = z(-1;-1) = -4$, $z_{\min} = z(1;1) = 4$.

3 Найти экстремум функции $z = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$.

Ответ: экстремума нет.

4 Найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 4$.

5 Найти экстремум функции $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Ответ: $z_{\max} = z(1;-1) = 6$ или $z_{\min} = z(1;-1) = -2$.

6 Для функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 5 = 0$.

Ответ: $\max\limits_{D} z = z(0;-5) = 41$, $\min\limits_{D} z = z(-2;-1) = -3$.

7 Для функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.

Ответ: $\max\limits_{D} z = z(2;-1) = 13$, $\min\limits_{D} z = z(1;1) = z(0;-1) = -1$.

8 Для функции $z = 1 - y^2 - x^2$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линией $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Ответ: $\max\limits_D z = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$, $\min\limits_D z = -2\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

9 Для функции $z = x^2 + 2xy - 10$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линиями $y = 0$, $y = x^2 - 4$.

Ответ: $\max\limits_D z = z\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{20}{9}\right) = -\dfrac{62}{27}$, $\min\limits_D z = z(1;-3) = -15$.

10 Найти экстремум функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$.

Ответ: $z_{\max} = z\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

11 Найти экстремум функции $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $x + y = 4$.

Ответ: $z_{\min} = z(2;2) = 1$.

12 Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(\dfrac{18}{13}; \dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{36}{13}$.

13 Найти экстремум функции $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Ответ: $z_{\max} = z\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = z\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$,

$z_{\min} = z\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = z\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Список литературы

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – 7-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с.

2 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд. – Москва : Высшая школа, 1996. – Ч. 2. – 416 с.

3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 3 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 383 с.

4 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

5 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 16-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2019. – 608 с.

6 Руководство к решению задач по высшей математике: в 2 ч. / Под ред. Е. И. Гурского. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 349 с.

7 Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г. И. Кручковича. – Москва : Высшая школа, 1988. – 576 с.

8 Сборник задач по математике для втузов: в 2 ч. / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Ч. 1. – 464 с.

9 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – Москва : Высшая школа, 2005. – 479 с.