ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий к контрольной работе №1
для студентов заочной формы обучения специальности 1-53 01 02
«Автоматизированные системы обработки информации»

Могилев 2007

УДК 51
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой высшей математики 7 марта 2007 г., протокол № 6

Составители: В. Г. Замураев;
Т. Ю. Орлова;
С. Ф. Плешкунова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации».

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнёв

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка В. Э. Ковалевский

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ №02330/375 от 29.06.2004 г.
212005, г. Могилев, пр. Мира, 43

Содержание

1 Программа курса

Тема 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Матрицы и линейные операции над ними. Произведение матриц. Транспонирование матрицы. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Определитель n-го порядка. Обратная матрица и её построение. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Матричный метод решения невырожденных систем. Формулы Крамера. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Векторы в пространстве и линейные операции над ними. Понятие базиса. Координаты вектора. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения. Плоскость в пространстве и различные формы её задания. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Прямая в пространстве и способы её задания. Угол между прямыми. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Эллипсоид, гиперболоид, параболоид, конус, цилиндр. Метод сечений в исследовании уравнений поверхностей.

Тема 2. Введение в математический анализ.

Понятие предела числовой последовательности. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Непрерывность функции в точке и на отрезке. Точки разрыва функции и их классификация. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции и их применение к вычислению пределов. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Производная функции, её геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к кривой. Правила дифференцирования, производная сложной функции. Производные элементарных функций. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Основные разложения элементарных функций по формуле Тейлора. Монотонность и экстремумы функции. Теорема Ферма. Необходимые и достаточные условия экстремума. Выпуклость и точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика.

2 Общие требования к оформлению контрольной работы

2.1 Выбор варианта заданий

Номер варианта заданий равен последней цифре номера зачётной книжки. Если же последняя цифра – ноль, то следует выполнять задания варианта номер 10.

2.2 Правила оформления контрольной работы

Работа оформляется в отдельной тонкой тетради в обычную клетку.

На обложке тетради указывается название дисциплины; номер группы и название факультета; фамилия, имя, отчество, номер зачётной книжки; обратный адрес; номер варианта заданий.

Решения заданий приводятся в порядке, установленном в вариантах заданий.

Перед каждым решением указывается номер задания и его полное условие.

Решения приводятся с необходимыми краткими пояснениями, записываются крупным и разборчивым почерком. Чертежи выполняются простым карандашом.

Оформление каждого задания начинается с новой страницы.

В конце работы приводится список литературы, использованной при решении заданий.

Незачтённые работы не оформляются заново (если на необходимость этого не указано рецензентом). Исправленные решения задач приводятся в конце работы.

При несоблюдении хотя бы одного из указанных требований работа не рецензируется.

Прорецензированную и зачтённую контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтённой контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

3 Решение типового варианта

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+4z=2, \\ 2x+y-5z=-4, \\ 3x-y-z=-2. \end{cases}$$

Решение. Поскольку

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & 5 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ранг матрицы A системы $r=2$;

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -13 & -8 \\ 0 & 5 & -13 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ранг $\tilde{r}$ расширенной матрицы равен 2, $r=\tilde{r}$, то система совместна.

В матрице A минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, ему соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x-2y=2-4z, \\ 2x+y=-4+5z, \end{cases}$$

в которой x, y – базисные неизвестные, z – свободная неизвестная. Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$x=\begin{vmatrix} 2-4z & -2 \\ -4+5z & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2-4z-8+10z}{5}=\frac{6z-6}{5},$$

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 2-4z \\ 2 & -4+5z \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-4+5z-4+8z}{5}=\frac{13z-8}{5},$$

где z может принимать любые действительные значения.

Задание 2. Найти проекцию точки $M(-1,4,2)$ на плоскость

$$4x-7y+z-36=0.$$

Решение. Этой проекцией является точка пересечения плоскости и перпендикуляра к ней, проходящего через точку M. Для прямой, перпендикулярной плоскости, направляющим вектором будет $\mathbf{n}=(4,-7,1)$. Параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку M, примут вид

$$x=-1+4t,\ y=4-7t,\ z=2+t.$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, находим

$$4(-1+4t)-7(4-7t)+2+t-36=0,\ 66t-66=0,\ t=1.$$

При этом значении t из уравнений прямой получаем

$$x=-1+4\cdot 1=3,\ y=4-7\cdot 1=-3,\ z=2+1=3.$$

Следовательно, точка $N(3,-3,3)$ – искомая проекция.

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2-16y^2-36x-96y+36=0.$$

Решение. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения, получаем

$$9\left(x^2-4x+4\right)-16\left(y^2+6y+9\right)-36+144+36=0,$$

$$9(x-2)^2-16(y+3)^2=144,\ (x-2)^2/16-(y+3)^2/9=1.$$

Переходя к новым координатам по формулам $X=x-2$, $Y=y+3$, последнему уравнению придадим вид $X^2/16-Y^2/9=1$. Это уравнение определяет гиперболу с полуосями $a=4$, $b=3$ (рисунок 1). Центр гиперболы находится в точке, для которой $X=0$, $Y=0$, или $x-2=0$, $y+3=0$, откуда $x=2$, $y=-3$, т.е. в точке $O_1(2,-3)$.

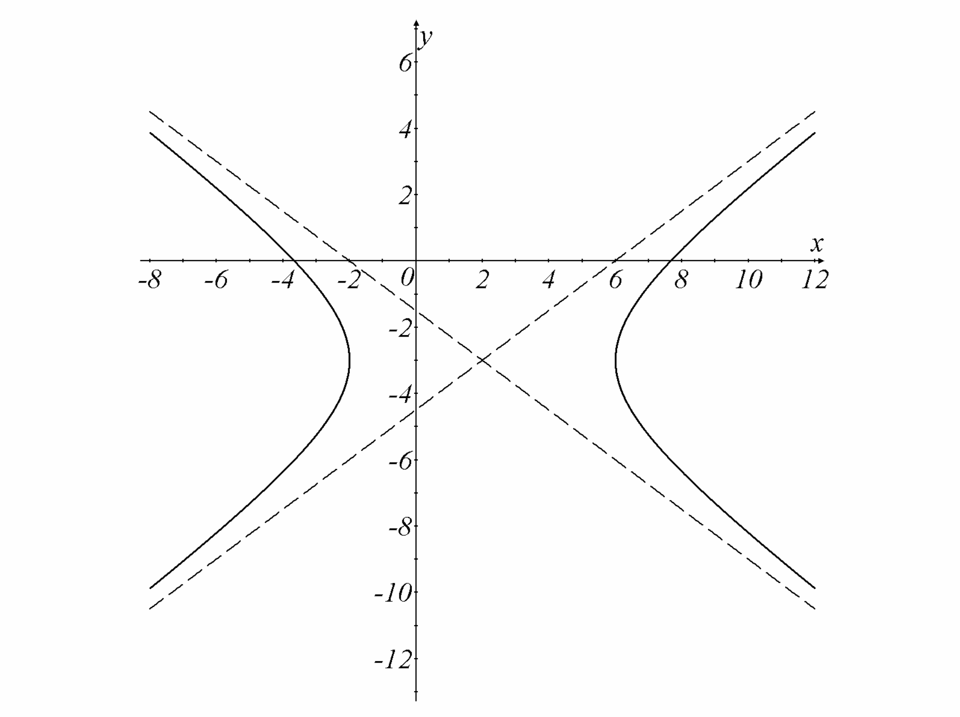

Рисунок 1

Задание 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+x+5}}{\sqrt[3]{5-x^3}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{3x}}$.

Решение:

а) при $x=-2$ числитель и знаменатель дроби равны 0, имеем неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, предварительно преобразуем дробь:

$$\frac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}=\frac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}=\frac{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2-x}\right)}{\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\frac{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2-x}\right)}{x+6-2+x}=\frac{(x+2)(x-3)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2-x}\right)}{2(x+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}(x-3)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2-x}\right).$$

Теперь, переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2-x}\right)}{2}=\frac{-5\cdot(2+2)}{2}=-10;$$

б) имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на x и воспользовавшись свойствами предела, получим

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x+5}}{\sqrt[3]{5-x^3}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{3+1/x+5/x^2}}{\sqrt[3]{5/x^3-1}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3+1/x+5/x^2\right)}}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5/x^3-1\right)}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{-1}}=-\sqrt{3};$$

в) при $x\to 0$ выражение $(1+\sin 2x)\to 1$, $\frac{1}{3x}\to\infty$, имеем неопределённость вида 1^{∞}. Преобразуя рассматриваемую функцию и применяя замечательные пределы, находим

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{3x}}=\left(\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}}=e^{\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

Задание 5. Найти производные следующих функций:

а) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|$; б) $y=x^{\cos x}$.

Решение:

а) применяя правила дифференцирования и таблицу производных, получаем

$$y'=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|\right)'=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}\right)'+\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|\right)';$$

$$\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}\right)'=\left(\frac{x}{2}\right)'\sqrt{x^2-2}+\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2-2}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{\left(x^2-2\right)'}{2\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}=\frac{2x^2-2}{2\sqrt{x^2-2}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2}};$$

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)'}{x+\sqrt{x^2-2}} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\right)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2-2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-2}+x}{\sqrt{x^2-2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}.$$

Таким образом,

$$y' = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}};$$

б) логарифмируя равенство $y = x^{\cos x}$ по основанию e, получаем

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x.$$

Дифференцируя, находим $\dfrac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \dfrac{1}{x}$, откуда

$$y' = y\left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y = 2^{3x^2}$.
Решение.

$$d^2y = y''dx^2 = \left(2^{3x^2}\right)'' dx^2 = \left(6x2^{3x^2}\ln 2\right)' dx^2 = 6\ln 2\left(x2^{3x^2}\right)' dx^2 =$$

$$= 6\ln 2\left(2^{3x^2} + x\cdot 6x2^{3x^2}\ln 2\right)dx^2 = 6\ln 2\cdot 2^{3x^2}\left(6x^2\ln 2 + 1\right)dx^2.$$

Задание 7. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2-3}$ и построить её график.

Решение.

1 Функция не определена лишь при $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$. Следовательно, область определения состоит из трёх интервалов: $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, два из которых являются бесконечными. Так как рассматриваемая функция является нечётной:

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-\frac{x^3}{x^2-3}=-y(x),$$

то её достаточно исследовать при положительных значениях аргумента из области её определения и принять во внимание, что график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

2 При стремлении аргумента к концам промежутков области определения соответственно получаем

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,\ \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-3/x^2}=+\infty.$$

Кроме того, находим $y(0)=0$.

3 Находим производные данной функции:

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'=\frac{3x^2(x^2-3)-x^3\cdot 2x}{(x^2-3)^2}=\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2},$$

$$y''=\left(\frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2}\right)'=\frac{(4x^3-18x)(x^2-3)^2-(x^4-9x^2)4x(x^2-3)}{(x^2-3)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-18x)(x^2-3)-(x^4-9x^2)4x}{(x^2-3)^3}=\frac{6x^3+54x}{(x^2-3)^3}=\frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}.$$

Поскольку $y'<0$ при $0<x<3$, $x\neq\sqrt{3}$, то функция убывает в интервалах $(0,\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3},3)$. Так как $y'>0$ при $x>3$, то функция возрастает в интервале $(3,+\infty)$.

Поскольку $y'=0$ при $x=3$ и $y''(3)>0$, то $x=3$ – точка минимума. Других критических точек при $x>0$ нет, ибо y' не определена при $x=\sqrt{3}$, но в этой точке не определена и сама функция.

4 Вычисляем значение минимума функции $y(3)=4{,}5$.

5 Поскольку $y''<0$ при $0<x<\sqrt{3}$, то график функции является выпуклым вверх в интервале $(0,\sqrt{3})$. Так как $y''>0$ при $x>\sqrt{3}$, то график функции является выпуклым вниз в интервале $(\sqrt{3},+\infty)$.

Точек перегиба при $x>0$ график данной функции не имеет, ибо вторая производная при положительных значениях x в нуль нигде не обращается и не определена в той же точке, в которой не определена сама функция.

6 График функции пересекает оси координат в точке $O(0,0)$.

7 Из пункта 2 следует, что при $x>0$ график функции имеет вертикальную асимптоту $x=\sqrt{3}$. Так как

$$\frac{x^3}{x^2-3}=\frac{x^3-3x+3x}{x^2-3}=\frac{x\left(x^2-3\right)+3x}{x^2-3}=x+\frac{3x}{x^2-3},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-3/x}=0,$$

то $y=x$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$.

Заметив ещё, что $y<0$ при $0<x<\sqrt{3}$ и $y>0$ при $x>\sqrt{3}$, строим график функции вначале при положительных, а затем симметрично относительно начала координат и при остальных значениях аргумента из области её определения (рисунок 2). Отметим также, что в начале координат график функции имеет перегиб, так как в этой точке выпуклость графика вниз меняется на выпуклость вверх.

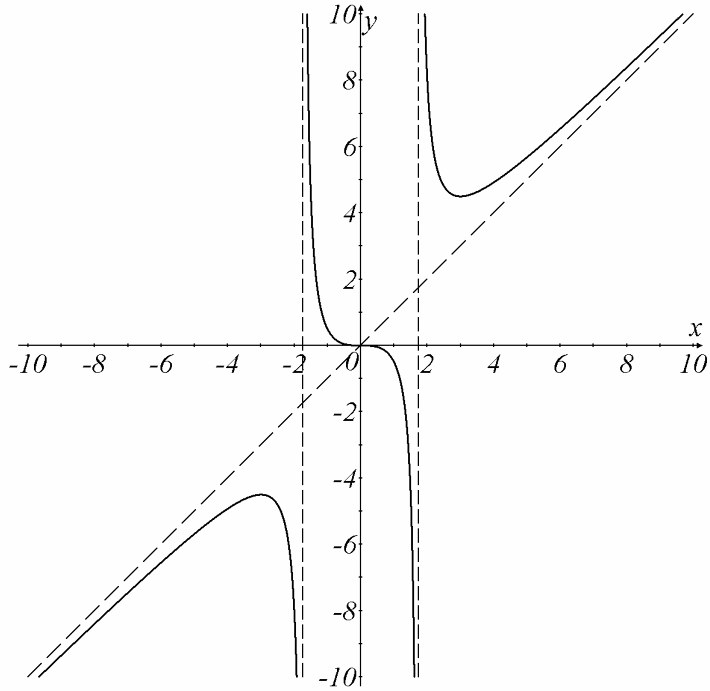

Рисунок 2

4 Варианты контрольных заданий

Вариант 1

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - y - 3z = 1, \\ x + 4y - z = 4, \\ 4x - 5y - 2z = -3. \end{cases}$$

Задание 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$$

и перпендикулярной к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 100y - 284 = 0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+4} - \sqrt{-2-x}}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^2 + 3x^5}}{\sqrt{x^2 + 5}}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - \cos 2x\right)^{\frac{2}{3x}}$.

Задание 5. Найти производные следующих функций:

а) $y = x - 2\ln\left(\sqrt{1 + e^x}\right)$; б) $y = 2x^{2/x}$.

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$.

Задание 7. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ и построить её график.

Вариант 2

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y - 7z = -9, \\ 3x + y - 3z = -2, \\ 2x - y + z = 5. \end{cases}$$

Задание 2. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$$

и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$4x^2 - y^2 + 32x + 8y + 44 = 0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}; \text{ б) } \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + x + 3}}{\sqrt[4]{x^4 + x^3 + 1}}; \text{ в) } \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{5}{x^2}}.$$

Задание 5. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right); \text{ б) } y = x^{2^x}.$$

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln\sqrt{x+1}$.

Задание 7. Исследовать функцию $y = 2x + 4\operatorname{arcctg} x$ и построить её график.

Вариант 3

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+5y-3z=-4, \\ 4x-3y-5z=-2, \\ x-18y+4z=10. \end{cases}$$

Задание 2. Убедившись в том, что прямые

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4},\ \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

принадлежат одной плоскости, написать уравнение этой плоскости.

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$y^2+6x+4y-26=0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+5}-\sqrt{13-x}};\ \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x+x^2+x^4}}{\sqrt[5]{5x-x^5}};\ \text{в) } \lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2 5x\right)^{\frac{2}{x^2}}.$$

Задание 5. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}};\ \text{б) } y=\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}.$$

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции

$$y=\sin^2\left(3x^3+4\right).$$

Задание 7. Исследовать функцию $y=\left(x+1\right)\left(x-2\right)^3$ и построить её график.

Вариант 4

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x+2y+z=0, \\ 5x+y+2z=-3, \\ x+y-z=3. \end{cases}$$

Задание 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$$

параллельно прямой

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{-1}.$$

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$x^2-9y^2-4x-90y-230=0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+x+10}}{\sqrt[3]{x^3-5x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Задание 5. Найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$; б) $y=x^{x^x}$.

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции

$$y=\sqrt[5]{6x^5-5x}.$$

Задание 7. Исследовать функцию $y=\dfrac{\ln x}{x}$ и построить её график.

Вариант 5

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+4y-5z=-11, \\ 7x+y+z=4, \\ 5x-7y+11z=26. \end{cases}$$

Задание 2. Найти точку пересечения прямой

$$\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ 2x-3y+3z-2=0 \end{cases}$$

и плоскости $3x+4y-z-6=0$.

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$x^2+49y^2+2x-98y+1=0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 7}\frac{x^2-6x-7}{\sqrt{x+9}-\sqrt{23-x}}\text{; б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^2+x^4}}{\sqrt[3]{2x^3+5x}}\text{; в) } \lim_{x\to 0}\left(1-\operatorname{tg}x\right)^{\frac{1}{7x}}.$$

Задание 5. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x\text{; б) } y=\left(\sin x\right)^{\arcsin x}.$$

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x+e^{1/x}$.

Задание 7. Исследовать функцию $y=\dfrac{\left(1+x\right)^{3/2}}{\sqrt{x}}$ и построить её график.

Вариант 6

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y-z=3, \\ 3x-2y+z=2, \\ x-8y+3z=-4. \end{cases}$$

Задание 2. Убедившись в том, что прямая

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

и плоскость $x+y-2z-1=0$ параллельны, найти расстояние между ними.

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$x^2+10x-8y+41=0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x+10}-\sqrt{8-x}}\text{; б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+12}}{\sqrt[3]{x^2+12x^3}}\text{; в) } \lim_{x\to\pi/2}\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

Задание 5. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y=\arcsin\frac{2\sin x-1}{3}\text{; б) } y=x^{x^2}.$$

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\log_2\sqrt{x}$.

Задание 7. Исследовать функцию $y=xe^{\frac{1}{x}}$ и построить её график.

Вариант 7

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-5y+z=1, \\ 2x+4y-z=-1, \\ x-9y+2z=2. \end{cases}$$

Задание 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,2,3)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x-y+3z-3=0, \\ 3x-y+2z-4=0. \end{cases}$$

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$x^2-4y^2-32y-128=0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt[3]{2x^3+4}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\arcsin 3x\right)^{\frac{4}{x}}$.

Задание 5. Найти производные следующих функций:

а) $y=-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$; б) $y=\left(\ln x\right)^{1/x}$.

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции

$$y=x\arccos 2x.$$

Задание 7. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{2\left(x-1\right)^2}$ и построить её график.

Вариант 8

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 2y + 7z = 9, \\ 2x - y - z = 0, \\ 2x - y + 8z = 9. \end{cases}$$

Задание 2. При каком значении λ плоскость $5x - 3y + \lambda z + 1 = 0$ будет параллельна прямой

$$\begin{cases} x - 4z - 1 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$x^2 + 36y^2 - 6x + 144y + 117 = 0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x+6} - \sqrt{12-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x + 2x^2 + 3x^3}}{\sqrt[5]{4 + 2x - 5x^5}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \sin 6x\right)^{\frac{1}{\ln(x+1)}}$.

Задание 5. Найти производные следующих функций:

а) $y = -\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^3}{3}\arccos x$; б) $y = \left(\operatorname{tg} x\right)^x$.

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции

$$y = \left(x-1\right)\sqrt{x^2+2}.$$

Задание 7. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{\ln|x|}$ и построить её график.

Вариант 9

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=-2, \\ 7x-y-2z=-1, \\ 4x+y-6z=1. \end{cases}$$

Задание 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(0,-3,2\right)$ и прямую

$$\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 3x-y-4z+2=0. \end{cases}$$

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2-y^2+108x+2y+322=0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+3x+1}}{\sqrt[3]{2x^3-3x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Задание 5. Найти производные следующих функций:

а) $y=-x-\operatorname{ctg}x\cdot\ln\left(e\sin x\right)$; б) $y=\left(\cos x\right)^{\arccos x}$.

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y=3x-5^{\sqrt{x}}$.

Задание 7. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ и построить её график.

Вариант 10

Задание 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + 4z = 7, \\ x - 6y + z = -4, \\ 3x + 5y + 3z = 11. \end{cases}$$

Задание 2. Найти канонические уравнения проекции прямой

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$$

на плоскость $x - 3y - z + 8 = 0$.

Задание 3. Построить линию, определяемую уравнением

$$4x^2 + 9y^2 + 64x - 36y + 256 = 0.$$

Задание 4. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x+5} - \sqrt{-3-x}}; \text{ б) } \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2 + 2x^3}}{\sqrt{2x^2 + 3x}}; \text{ в) } \lim_{x \to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

Задание 5. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|; \text{ б) } y = x^{\operatorname{arctg} x}.$$

Задание 6. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{1}{\ln\sqrt{2x}}$.

Задание 7. Исследовать функцию $y = \sin x + \cos x$ и построить её график.

Список литературы

1 **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2005. – 315 с.

2 Высшая математика: Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск : Выш. шк., 2000. – 351 с.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2003. – Т. 1. – 544 с.

4 **Гусак, А. А.** Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 5-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – 640 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

6 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис–пресс, 2004. – Ч. 1. – 288 с.

7 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – Т. 1. – 464 с.

8 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд. – М. : Высш. шк., 2005. – 479 с.